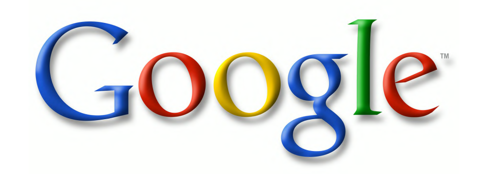


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

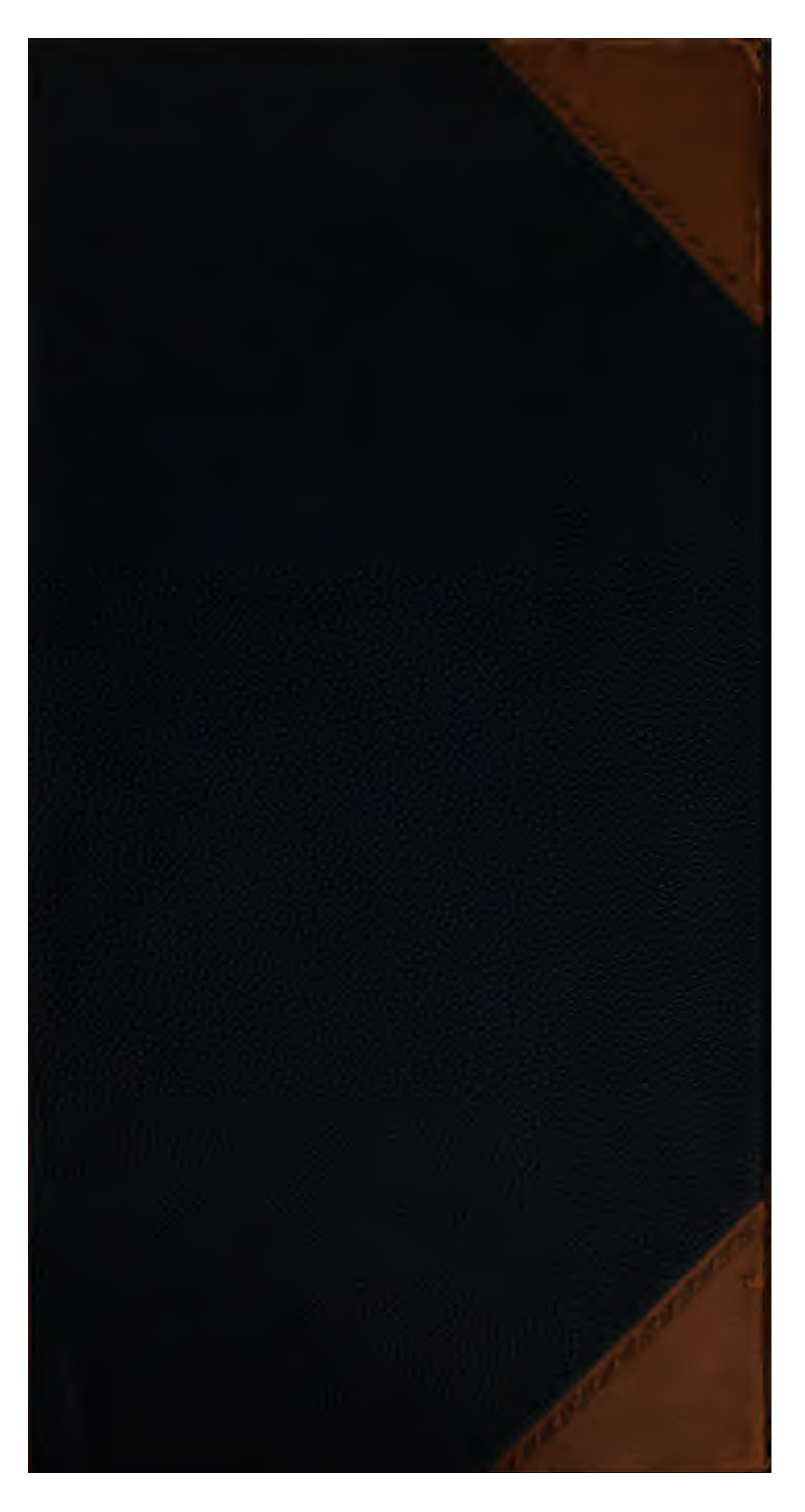
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

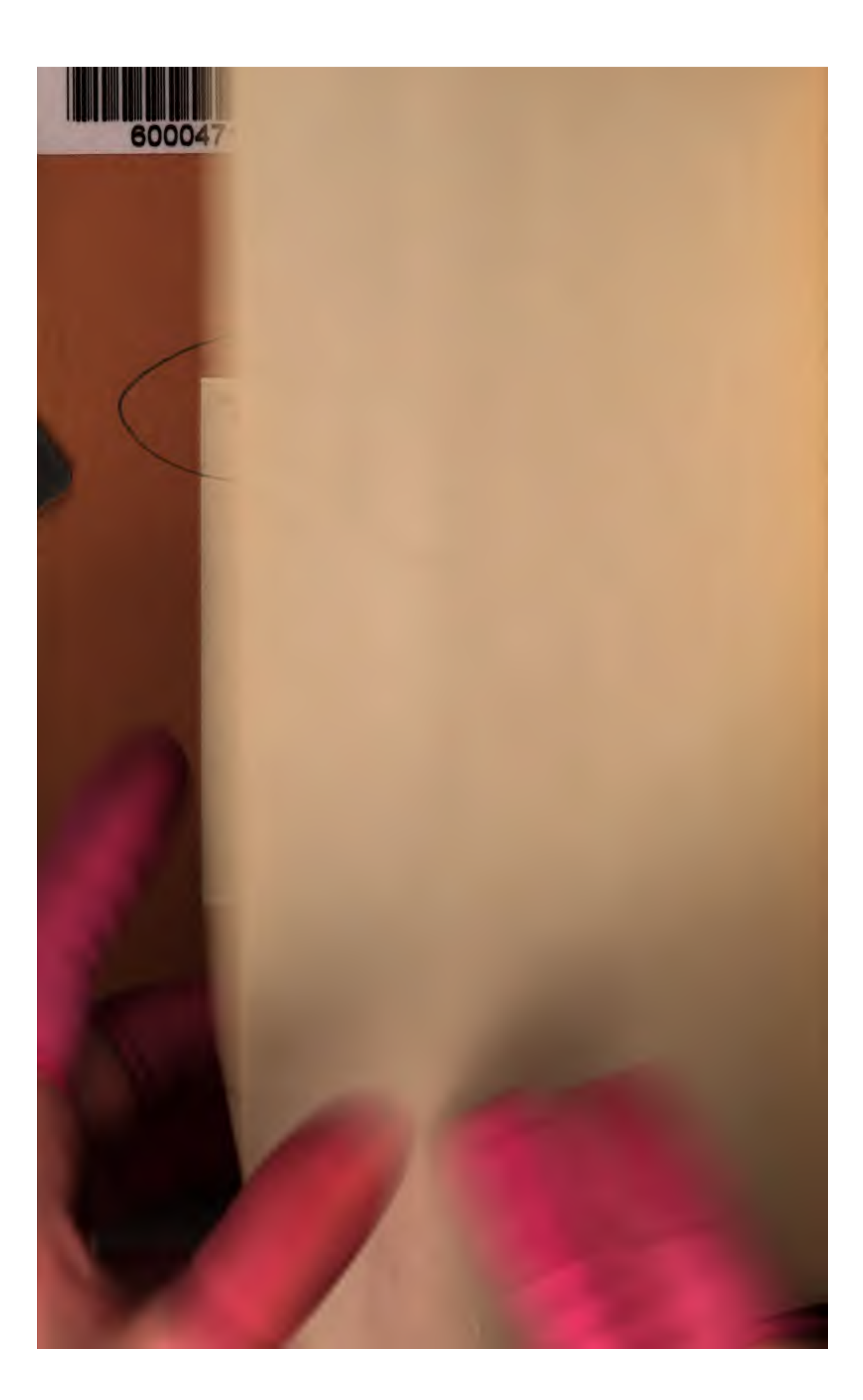
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

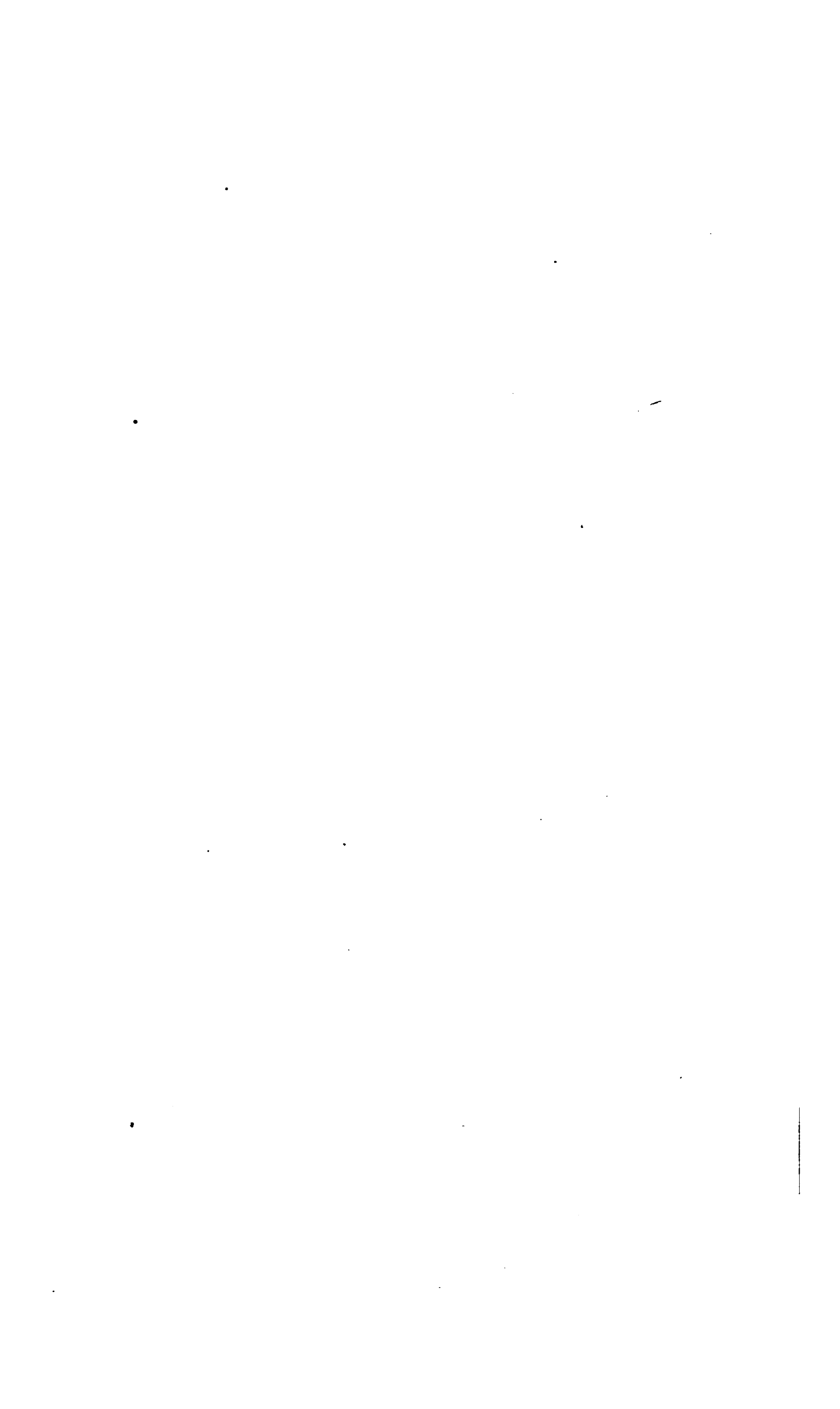
## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.









# JACOB STEINER'S

# VORLESUNGEN

ÜBER

# SYNTHETISCHE GEOMETRIE.

ZWEITER THEIL:

DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE,

GESTÜTZT AUF

PROJEKTIVISCHE EIGENSCHAFTEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1867.

# DIE

# THEORIE DER KEGELSCHNITTE,

GESTÜTZT AUF

## PROJEKTIVISCHE EIGENSCHAFTEN.

AUF GRUND VON UNIVERSITÄTSVORTRÄGEN UND MIT BENUTZUNG HINTERLASSENER MANUSCRIPTE JACOB STEINER'S

BEARBEITET

VON

**DR. HEINRICH SCHRÖTER,**

ORDENTL. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BRESLAU.

„Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen.“

**Steiner.**

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1867.

Verfasser und Verleger dieses Werkes behalten sich das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen vor, und werden ebensowohl den Nachdruck als die unbefugte Uebersetzung mit allen gesetzlichen Mitteln verfolgen.

# VORWORT.

Das für die synthetische Geometrie bahnbrechende Werk Jacob Steiner's: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" Berlin 1832, enthält in seiner Vorrede einen vollständigen Plan, nach welchem der berühmte Verfasser die Resultate seiner Forschungen in fünf einander folgenden Theilen niederzulegen gedachte. Von diesen ist nur der erste, allerdings wichtigste Theil erschienen, welcher die Prinzipien enthält, auf denen die synthetische Geometrie in ihrem heutigen Standpunkte beruht. Indessen wurde Vieles von dem Inhalte des fünften Theiles, welcher eine „ausführliche und umfassende Behandlung der Kurven und Flächen zweiten Grades durch Konstruktion und gestützt auf projektivische Eigenschaften" enthalten sollte, in den Vorlesungen, welche Steiner während einer Reihe von Jahren an der Berliner Universität gehalten hat, vorgetragen, Einiges ist in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, sowie schon früher in den Annales de mathématiques par M. Gergonne veröffentlicht worden. Jene geistreichen und zur eigenen Forschung anregenden mündlichen Vorträge, denen sich der grosse Geometer mit besonderer Liebe unterzog, kamen indess nur wenigen Jüngern der Wissenschaft zu Gute und die in diesen Vorlesungen auseinandergesetzten, hinsichtlich ihrer Anschaulichkeit und Fruchtbarkeit unübertroffenen, synthetischen Methoden und

Betrachtungen scheinen nachgerade der Gefahr nahe, vergessen oder von der immer weiter sich ausbreitenden allmächtigen analytischen Methode in den Hintergrund gedrängt zu werden; es erscheint daher als eine Pflicht deutscher Wissenschaft, dies zu verhüten und die Wege, welche der schöpferische Geist des grössten Geometers seiner Zeit den unmittelbaren Schülern zeigte, der Nachwelt zu erhalten, um dadurch den zahlreichen Entdeckungen auf die Spur zu kommen, welche noch heute Räthsel sind für die wissenschaftliche Welt. Hierzu gesellt sich für den Herausgeber noch die besondere Pflicht dankbarer Pietät gegen seinen hochverehrten Lehrer. Im Wintersemester 1852/53 hatte ich das Glück, eine von Steiner unter dem Titel: „Ueber die neueren Methoden der synthetischen Geometrie“ angekündigte Universitätsvorlesung zu hören und zugleich durch persönlichen Verkehr mit dem grossen Meister in den Ideengang seiner Schöpfungen eingeführt zu werden. Die damalige, wenn auch mangelhafte, doch sorgfältig ausgearbeitete Nachschrift liegt der heutigen Bearbeitung zu Grunde. Durch die Güte des Herrn Dr. C. F. Geiser, Docenten am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, welcher als Neffe des verstorbenen Steiner testamentarisch mit der Veröffentlichung seines wissenschaftlichen Nachlasses beauftragt ist, wurde mir die Bearbeitung dieses Abschnittes bereitwilligst überlassen und der Theil der hinterlassenen Manuscripte Steiner's, welcher sich auf „die geometrischen Gestalten“ bezieht, zur Verfügung gestellt; aus diesem reichen Schatze habe ich Alles, was in den vorgeschriebenen Gang der Darstellung gehörte, mit Gewissenhaftigkeit aufgenommen und aus unvollendeten Aufzeichnungen zu ergänzen oder herzustellen versucht. Dass es schon früh in Steiner's Absicht gelegen hat, diesen auf die Kegelschnitte bezüglichen fünften Abschnitt seines grossen Werkes vollständiger, als es im ersten Theil geschehen konnte, und abweichend von

der dortigen Behandlung allein von den Grundprinzipien aus darzustellen, zeigt die vollständig erhaltene Einleitung zu einer nicht vollendeten Abhandlung; die erstere ist in einem Konvolut von Papieren unter der Aufschrift „Aufklärungs-Broschüre 1833/34“ enthalten und lautet folgendermassen:

„Ueber einige merkwürdige Lehren der neueren synthetischen Geometrie. In dieser Abhandlung werde ich zunächst die Betrachtungen über projektivische Gerade und Strahlbüschel, welche im ersten Theile der von mir verfassten Schrift: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“, enthalten sind, kurz wiederholen und sodann die naturgemässe Erzeugung der Kegelschnitte aus jenen Gebilden ableiten, sowie ferner den Ursprung verschiedener merkwürdiger Eigenschaften, wie z. B. der sogenannten Involution und der théorie des polaires reciproques etc. aus denselben nachweisen.

In der genannten Schrift wurden der alt-hergebrachten Weise zu Liebe die Kegelschnitte aus dem Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, hergeleitet. Obwohl ich die Unzweckmässigkeit dieses Verfahrens schon damals deutlich fühlte, so glaubte ich doch, um nicht zu sehr von dem gewöhnlichen Gange abzuweichen, demselben folgen zu müssen. Allein der Umstand, dass man gezwungen ist, die Umkehrung eines Satzes zu behaupten (§ 38, II), der sich durch die Elementargeometrie nicht befriedigend beweisen lässt — nämlich des Satzes, dass jeder Kegel zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten werden kann — zeigte die Nothwendigkeit, jene Darstellungsweise zu verlassen und eine dem Gegenstande angemessenere aufzufinden. Die hier folgende genügt dieser Forderung im höchsten Grade, indem sie die Erzeugung der Kegel-

schnitte durch projektivische Gerade und Strahlbüschel als eine unmittelbare, systematisch nothwendige offenbart und dieselbe rein synthetisch auf die möglichst einfache Weise bewerkstelligt. Ebenso wird das wahre Wesen der Involution und der théorie des polaires reciproques durch besondere Eigenschaften der genannten projektivischen Gebilde geoffenbart, indem ihre nothwendige Entstehung auf überraschende Weise aus diesen Eigenschaften sich nachweisen lässt und zugleich ihr inniger Zusammenhang sich kund giebt, was übrigens in der mehrerwähnten Schrift bereits angedeutet worden (§ 45). Die Schwierigkeit, die hierbei in Rücksicht auf die Kegelschnitte zu überwinden war, bestand darin, zu beweisen, dass das durch zwei schiefliegende projektivische Gerade hervorgebrachte Erzeugniss identisch sei mit dem Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel, die sich in schiefer Lage befinden. Diese Schwierigkeit ist jetzt nicht nur sehr leicht, sondern ich möchte sagen, sie ist auf die einfachste Weise gehoben, nämlich durch consequentes Festhalten der geringsten Anzahl von Elementen, durch welche die Projektivität jener Gebilde bestimmt wird, und zwar durch diejenigen Elemente, welche sich sowohl in Hinsicht der Gebilde, als in Bezug auf den Kegelschnitt am bemerkbarsten machen. Dadurch können nun zugleich alle übrigen Lehren, welche den Gegenstand des ersten Theiles der genannten Schrift bilden, zweckmässiger entwickelt werden, weil nunmehr die Betrachtungen in der Ebene sich bis zu ihrer Vollendung ausführen lassen, ohne dass es nöthig wird, den Büschel im Raume, der ihr entgegensteht, zu Hülfe zu nehmen. Die Eigenschaften des letzteren lassen sich dann umgekehrt leicht aus jenen der Ebene ableiten, was der natürlichere Gang ist. Der Kegel

zweiten Grades erhält dabei eine allgemeinere Erklärung, die nicht mehr an seine besondere Eigenschaft, an seine Kreisschnitte, geknüpft ist, und nicht allein die verschiedenen Eigenschaften aller seiner ebenen Schnitte, sondern auch die Eigenschaften, welche ihm im Ganzen zukommen, seine zwei Erzeugungsarten durch projektivische Gebilde sind dann mit seiner Entstehung zugleich bekannt. Auch führt die gegenwärtige Erzeugungsweise der Kegelschnitte schneller nnd direkter als jene frühere Betrachtungsweise in ihre innere Natur hinein und schliesst uns am unmittelbarsten den organischen Zusammenhang ihrer zahlreichen Eigenschaften und Geheimnisse auf. Ich bemerke hier noch, dass die Betrachtung projektivischer Gerader und Strahlbüschel sich so vereinfachen lässt, dass sie ohne Hülfe trigonometrischer Ausdrücke durchgeführt werden kann, wodurch sie geeignet wird, der Elementargeometrie einverleibt zu werden und darin manche zweckmässige Verbesserung zu bewirken, indem zu ihrem trocknen Inhalt die belebenden Porismen, die Theorie der Transversalen und besonders die vollständige Lehre von den Kegelschnitten hinzutritt, dergestalt, dass alle diese Gegenstände sich ebenso leicht und einfach behandeln lassen, als nach der bisherigen Methode der Kreis. Dass in meiner mehrerwähnten Schrift trigonometrische Ausdrücke eingeführt worden, ist kein Irrthum oder Mangel in der Darstellung, wie man beim ersten Anblick leicht wähnen möchte, sondern die Entwickelungen der folgenden Theile bedürfen derselben, um zu der allseitig vollendeten Ausbildung zu gelangen, der sie fähig sind.“

„Den 24. Mai 1836.“

Diese vor dreissig Jahren geschriebene Einleitung habe ich geglaubt, der gegenwärtigen Bearbeitung ungekürzt vor-

ausschicken zu dürfen, weil ich bemüht gewesen bin, in dem hier ausgesprochenen Sinne die Lehre von den Kegelschnitten darzustellen. Von der versprochenen Abhandlung selbst finden sich unter den Papieren nur Bruchstücke, welche vorzugsweise die Theorie der Involution (das Punkt- und Strahlsystem) behandeln, ferner den erwähnten Beweis von der Identität der beiden Erzeugnisse projektivischer Gerader und projektivischer Strahlbüschel und einige Notizen über Involutions-Netze enthalten. Unter den übrigen, mir zur Einsicht gestatteten Manuskripten, welche aus den verschiedensten Zeitepochen herrühren, fanden sich zur Verwerthung für den vorliegenden Zweck Untersuchungen über Kegelschnitt-Büschel und -Schaaren, insbesondere über „konjugirte Kegelschnittbüschel" und „harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte", manche schwer zu enträthselnde kurze Aufzeichnungen und viele Bemerkungen, die vermuthlich den Vorlesungen ihren Ursprung verdanken. Alles, was über die Ebene hinausging und sich grösstentheils auf Oberflächen zweiter Ordnung bezog, musste für jetzt unberücksichtigt bleiben. Der Anfang einer beabsichtigten Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten, wie sie Steiner in seinen Vorlesungen vorzutragen pflegte, findet sich noch an einer späteren Stelle, welche mit den charakteristischen Worten beginnt:

> „Juni 1849. Der veränderte Gang, der nach § 18 (Syst. Entw. d. A. g. G.) eintritt, ist seit Jahren in den Vorlesungen verbessert und einige Mal sogar mit Begeisterung vorgetragen worden, musste aber jedesmal mit saurer Mühe wieder erst neu hergestellt werden, was in der neuesten Zeit bei Abnahme an Eifer und Gedächtniss stets schwieriger wurde. Es wird nun kaum möglich sein, die in einzelnen Perioden in günstigen Licht-Momenten vorgetragenen Sätze und Beweise wieder

hervorzurufen, um den besten Gang der Betrachtung endlich festzustellen . . ."

Hierauf folgen verschiedene Aufzeichnungen aus den Vorträgen im Sommersemester 1849, die aber zum grössten Theil Wiederholungen sind und nur bis zu dem erwähnten Identitätsbeweise reichen.

Hinsichtlich der Vertheilung und Behandlung des Stoffes habe ich mir nur wenig Abweichungen von der zu Grunde liegenden Ausarbeitung der Steiner'schen Vorlesung erlaubt, während die Menge desselben erheblich vergrössert ist; auch die Steiner'sche Terminologie habe ich bis auf wenige Ausnahmen festgehalten; der Gebrauch der Bezeichnung „Punktreihe" anstatt „Gerade" (als kontinuirliche Aufeinanderfolge sämmtlicher Punkte einer unendlich-langen geraden Linie) ist schon so üblich geworden, dass er keiner Entschuldigung bedarf. Der erste Abschnitt (projectivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander) enthält eine kurze Wiederholung der ersten in der syst. Entw. niedergelegten Prinzipien; hier wie in der Folge habe ich die von Moebius in die Geometrie eingeführte Auffassung entgegengesetzter Grössen (Strecken und Winkel) durch Berücksichtigung des Richtungs- und Drehungs-Sinnes festgehalten, wonach z. B. wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Punkte bezeichnen, durch „$\mathfrak{a}\mathfrak{b}$" nicht blos der absolute Abstand beider Punkte, sondern die in dem Sinne von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ durchlaufene Strecke bedeutet, also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = 0$ ist. Die ebenfalls von Moebius herrührenden Beziehungen zwischen den 24 möglichen Werthen eines Doppelverhältnisses (§ 6) habe ich aufgenommen. Sodann ist die Bestimmung der doppelten Systeme entsprechender gleicher Strecken und Winkel bei zwei projektivischen Punktreihen und Strahlbüscheln (§§ 12, 13) und eine ausführliche Behandlung der Involution (des Punkt- und Strahl-Systems, §§ 16 und 17) hinzugekommen. Der zweite

Abschnitt (der Kegelschnitt als Erzeugniss projektivischer Gebilde) definirt den Kegelschnitt auf doppelte Art und weist die Identität beider Erzeugnisse nach (§ 23). Der Pascal'sche (und Brianchon'sche) Satz erscheint nur als ein etwas veränderter Ausdruck der Projektivität zweier gleichartiger Gebilde. Die Eintheilung der Kegelschnitte geschieht durch Berücksichtigung der unendlich-entfernten Punkte (§ 25). Zu den Kriterien für die Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte durch zwei projektivische Punktreihen ist das für die gleichseitige Hyperbel hinzugekommen, welches ich nirgends gefunden habe. Die Steiner'sche Erweiterung des berühmten hexagrammum mysticum (§ 28) schien mir, obwohl sie etwas von dem Gange der Untersuchung abführt, doch mitzutheilen erlaubt, zumal ich das hier zusammengestellte Tableau der 60 Sechsecke, aus deren Gruppirung die Lage der Pascal'schen Linien, Steiner'schen Punkte und Geraden in der von Hesse angegebenen Weise am anschaulichsten hervortritt, anderswo vermisst habe. Das naturgemässe Auftreten des Punkt- und Strahlsystems beim Kegelschnitt (§ 29) führt zu den Polareigenschaften desselben (§§ 30, 31), welche möglichst vollständig auseinandergesetzt sind. Als besondere Fälle dieser allgemeinen Beziehungen ergeben sich dann die Eigenschaften der konjugirten Durchmesser, der Axen des Kegelschnitts (§§ 32, 33) und der Brennpunkte (§§ 35, 36). Die metrischen Beziehungen treten dabei ungezwungen und fast ohne Rechnung hervor (§ 33). Auf die Fokaleigenschaften wird dann noch etwas näher eingegangen, um die Brücke vollständig herzustellen, welche die hier durchgeführte Auffassung der Kegelschnitte mit derjenigen mehr elementaren Behandlung derselben verbindet, bei der die metrischen Eigenschaften der Brennpunkte den Ausgangspunkt bilden. Der letzte Paragraph (§ 37) über den Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte ist mehr als ein Anhang

zu betrachten, bestimmt, die Nützlichkeit des Prinzips der projektivischen Beziehung an einem besonderen Beispiel vor Augen zu führen.

Der dritte Abschnitt ist dem Kegelschnittbüschel und der Kegelschnittschaar gewidmet. Von den drei mitgetheilten Entstehungsarten dieser Gebilde ist die erste (Steiner'sche, § 38) die anschaulichste, erfordert aber die Realität der vier Mittelpunkte (Grundpunkte) des Büschels; bei der zweiten (§ 40) können auch zwei von diesen Punkten imaginär sein; die dritte (§ 41) ist die allgemeinste und liefert auch das Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten durch reelle Konstruktion. Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Geraden in den Punktenpaaren eines Punktsystems getroffen zu werden, tritt bei allen drei Entstehungsarten unmittelbar hervor. Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, welche in einem Büschel und einer Schaar vorkommen und wie sich dieselben in Gruppen vertheilen, lässt, wie mir scheint, den Vorzug der synthetischen Methoden recht deutlich erkennen; hieran knüpfen sich die Polar-Eigenschaften dieser Gebilde und einige besondere Fälle. Einen neuen oder doch wenig bekannten Gegenstand: „drei konjugirte Kegelschnittbüschel" behandelt § 50. Endlich werden die gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte ermittelt (§ 53) und die verschiedenen Fälle, welche hinsichtlich der Realität dieser Elemente eintreten können, genauer diskutirt. Der letzte Paragraph dieses Abschnittes behandelt einen bisher wenig untersuchten Gegenstand: Die harmonisch-zugeordneten oder sich polar selbst-entsprechenden Kegelschnitte, mit denen im Zusammenhange die Aufgabe gelöst wird: „Zu zwei gegebenen Kegelschnitten einen solchen dritten zu finden, in Bezug auf welchen als Basis der eine die Polarfigur des

andern ist.“ Hier tritt schon der imaginäre Kegelschnitt auf und verlangt eine Erweiterung des Begriffes, welche in dem vierten Abschnitt durch das Involutions-Netz (Polarsystem) gegeben wird. Die Polareigenschaften eines Kegelschnitts werden unabhängig von demselben aufgefasst und liefern ein stets reelles Gebilde, das Involutions-Netz, welches, je nachdem es hyperbolisch oder elliptisch ist, einen reellen oder imaginären Kegelschnitt vertritt, ebenso wie das Punktsystem auf einer Geraden ein reelles Punktenpaar (Asymptotenpunkte) oder ein imaginäres vertritt. Von den verschiedenen Bestimmungsarten des Netzes (§ 57), deren Zahl durch Hinzunahme anderer Elemente leicht beträchtlich vermehrt werden kann, ist die allgemeinste vermittelst fünf beliebiger Paare konjugirter Punkte durch eine zwar umständliche aber lineare Konstruktion bewerkstelligt. Die folgenden Paragraphen enthalten zum Theil eine Wiederholung früherer Betrachtungen auf der allgemeineren Grundlage, indem die ausgezeichneten Elemente des Netzes: Durchmesser, Mittelpunkt, Brennpunkte mit ihren hervorragendsten Eigenschaften für das Netz ähnlich, wie für den reellen Kegelschnitt ermittelt werden. Die Annahme zweier beliebig gegebenen Netze in der Ebene (§ 61) führt zum Netz-Büschel und zur Netz-Schaar; dadurch werden die früheren Gebilde des Kegelschnitt-Büschels und der Kegelschnitt-Schaar vervollständigt, indem auch die imaginären Kegelschnitte, welche ihnen angehören können, zum Vorschein kommen. Der letzte Paragraph (§ 62) untersucht das aus drei beliebig angenommenen Netzen oder Kegelschnitten gebildete Kegelschnitt-Netz und die Tripelkurve und bildet somit den Uebergang zur Theorie der Kurven dritten Grades.

Aus der vorstehenden Inhaltsangabe und bei einer genaueren Durchsicht des Buches wird der kundige Leser

erkennen, dass ich manche Resultate aufzunehmen mir gestattet habe, welche im Laufe der Zeit hinzugekommen sind und von denen ich nicht mehr ermitteln konnte, ob Steiner sie früher als Andere gefunden hat, oder nicht, wenn sie sich eben in dem systematischen Entwickelungsgange naturgemäss darboten und der Steiner'schen Anschauungsweise ungezwungen anschlossen. Ich glaube, dass dies nicht zum Nachtheil eines Buches geschehen ist, welches seines ganz elementaren Charakters wegen vorzugsweise bestimmt ist, als Lehrbuch zur Einführung der studirenden Jugend in die synthetische Geometrie zu dienen. Aus diesem Grunde lag mir auch weniger daran, die in Anwendung gebrachten Methoden bis zur äussersten Grenze auszubeuten und die in unerschöpflicher Menge sich darbietenden Sätze und Eigenschaften mit möglichster Vollständigkeit aufzureihen, als vielmehr die fruchtbaren Betrachtungen selbst, welche zu jenen führen, in das klarste Licht zu setzen; dem Leser sollte auch noch Etwas zu thun übrig bleiben und überall da z. B., wo nach dem in der Natur des Gegenstandes begründeten Prinzip der Dualität einer Betrachtung sich die polar gegenüberstehende anschloss, ist diese entweder blos angedeutet, oder es sind die abweichenden Punkte allein ausgeführt; möchte der Leser daher noch recht viel Stoff zur Ergänzung und Erweiterung und besonders die Aufmunterung zur eigenen Forschung aus dem Vorgetragenen entnehmen.

Was meinen eigenen bescheidenen Antheil an diesem Buche betrifft, so verzichte ich selbstverständlich in Anbetracht der Entstehung desselben auf jeden Anspruch, wie auf jede Priorität, ohne darum die Verantwortlichkeit für Dasjenige, was etwa Irriges in demselben vorkommen sollte, von mir abzulehnen. Ich halte meine Arbeit für hinreichend belohnt, wenn dadurch das Studium der Steiner'schen Schrif-

ten erleichtert, das Interesse für synthetisch-geometrische Forschungen von Neuem angeregt und insbesondere die studirende Jugend zu einem der interessantesten und fruchtbarsten Felder mathematischer Spekulation hingeführt wird.

Schliesslich bleibt mir noch übrig, Herrn Dr. Geiser hiermit öffentlich meinen Dank auszusprechen für die freundlichst gestattete Einsicht in die Steiner'schen Manuskripte und das bereitwillige Abtreten seines Anrechtes zur Veröffentlichung dieser Vorlesung.

Breslau im September 1866.

**Heinrich Schröter.**

# INHALTSVERZEICHNISS.

## Erster Abschnitt:

### Projektivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander.

## Zweiter Abschnitt:

### Der Kegelschnitt als Erzeugniss projektivischer Gebilde.

## Dritter Abschnitt:

### Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.



## Vierter Abschnitt:

### Das Involutions-Netz (Polarsystem).

# Erster Abschnitt.

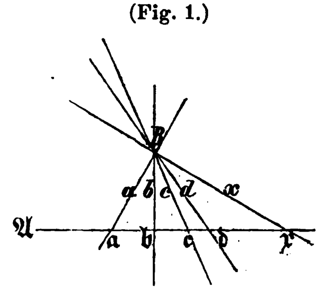
## Projektivische Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander.

### § 1. Grundgebilde.

Die sämmtlichen auf einander folgenden Punkte einer (unendlich langen) geraden Linie nennt man eine gerade Punktreihe oder schlechtweg Punktreihe, wenn nur von geraden Punktreihen die Rede ist. Die Gerade selbst, deren Punkte aufgefasst werden, soll der Träger der Punktreihe heissen. Die sämmtlichen durch einen Punkt in einer Ebene gehenden Strahlen (unendlich lange gerade Linien) nennt man ein ebenes Strahlbüschel oder schlechtweg Strahlbüschel, wenn nur von ebenen Strahlbüscheln die Rede ist. Der Punkt, durch welchen sämmtliche Strahlen gehen, heisst der Mittelpunkt des Strahlbüschels. Die Punkte der Punktreihe und die Strahlen des Strahlbüschels heissen Elemente dieser geometrischen Gebilde.

### § 2. Projektivische Beziehung der Grundgebilde auf einander.

(Fig. 1.)




Diese beiden einfachsten geometrischen Gebilde (Punktreihe und Strahlbüschel) sind von gleicher Mächtigkeit und einfacher Unendlichkeit, d. h. es giebt ebenso viel Punkte auf einer Geraden, als Strahlen durch einen Punkt. Dies erkennen wir, indem wir die beiden Gebilde zu einander in Beziehung setzen. Sämmtliche durch einen Punkt $B$, den Mittelpunkt eines Strahlbüschels gehende Strahlen $a, b, c, d \ldots x \ldots$ treffen eine

beliebige (nicht durch $B$ gehende) Gerade 𝔄 in den resp. Punkten 𝔞𝔟𝔠𝔡 . . . . 𝔵 . . (Fig. 1) und stellen eine derartige Beziehung zwischen den Elementen beider Gebilde her, dass jeder Strahl des Strahlbüschels durch den gleichnamigen Punkt der Punktreihe geht und umgekehrt jeder Punkt der Punktreihe auf dem gleichnamigen Strahl des Strahlbüschels liegt. Zwei solche zusammenliegende Elemente heissen entsprechende Elemente und diese Lage der beiden Gebilde, bei welcher jeder Strahl des Strahlbüschels durch den entsprechenden Punkt der Punktreihe geht, perspektivische Lage. Die durch die perspektivische Lage beider Gebilde hergestellte eindeutige Beziehung der Elemente auf einander kann nun festgehalten werden, während die perspektivische Lage aufgehoben wird (etwa dadurch, dass das Strahlbüschel $B$ und die Punktreihe 𝔄 beliebig in der Ebene verschoben werden), aber die entsprechenden Elemente in irgend einer Weise z. B. durch Bezeichnung mit gleichlautenden Buchstaben fixirt werden. Die auf diese Art von der perspektivischen Lage unabhängig gemachte eindeutige Beziehung der Elemente beider Gebilde auf einander heisst projektivische Beziehung und die Gebilde selbst projektivisch, wenn ihre entsprechenden Elemente so liegen, dass jene in perspektivische Lage gebracht werden können.

## § 3. Unendlich entfernter Punkt der Punktreihe und Parallelstrahl des Strahlbüschels.

Die Zusammengehörigkeit entsprechender Elemente lässt sich bei der perspektivischen Lage der beiden Grundgebilde auch so auffassen, dass man einen veränderlichen Strahl $x$ des Strahlbüschels um den Mittelpunkt $B$ dreht, wodurch sein Schnittpunkt 𝔵 mit dem Träger 𝔄 auf demselben fortrückt. Dabei tritt nun ein Mal der besondere Fall ein, dass der Strahl $x$ in parallele Lage zu dem Träger 𝔄 gelangt und dadurch der Schnittpunkt 𝔵, welcher sonst immer eine bestimmte angebbare Lage auf 𝔄 hatte, der Wahrnehmung entschwindet oder, wie man sich ausdrückt, ins Unendliche rückt. Betrachten wir den Strahl $x$ kurz vor und kurz nach dieser parallelen Lage, so wird der entsprechende Punkt 𝔵 einmal nach der einen Seite und das andere Mal nach der andern Seite hin sehr weit entfernt liegen, während es bei der parallelen Lage selbst zweifelhaft bleibt, ob er nach der

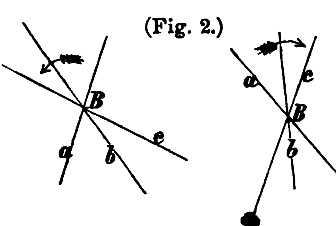
einen oder nach der andern Seite hin liegt. Trotzdem nehmen wir der Uebereinstimmung wegen an, dass auch der Parallelstrahl den Träger 𝔄 nur in einem Punkte treffe, und nennen diesen (obwohl er sich der Wahrnehmung entzieht) den unendlich entfernten Punkt der Punktreihe, den wir uns sowohl nach der einen Seite als auch nach der andern Seite hin liegend vorstellen können. Der unendlich entfernte Punkt der Geraden 𝔄 ist ein ausgezeichneter und bei Verrückung derselben unveränderlicher Punkt, welcher die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass jeder nach ihm hingehende Strahl mit der Geraden parallel ist.

Der unendlich entfernte Punkt verbindet gewissermassen die nach entgegengesetzten Seiten hin verlaufenden Enden der geraden Linie und stellt eine Kontinuität her entsprechend der kontinuirlichen Drehung des Strahles im Strahlbüschel.

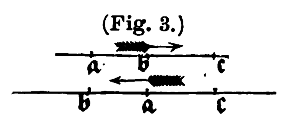
## § 4. Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge von Strahlen des Strahlbüschels und den entsprechenden Punkten der Punktreihe.

Aus der eben betrachteten zusammengehörigen Bewegung: der Drehung des Strahles $x$ um $B$ und dem Fortrücken des entsprechenden Punktes $\mathfrak{x}$ auf 𝔄 ergiebt sich zugleich eine Uebereinstimmung der Aufeinanderfolge entsprechender Elemente oder des Drehungssinnes mit dem Richtungssinn. Der Strahl $x$ kann sich um den Mittelpunkt $B$ entweder in dem einen oder entgegengesetzten Drehungssinne herumbewegen (⌒ ⌒ entweder wie der Zeiger einer Uhr, auf welche man sieht, oder entgegengesetzt); dem entsprechend muss der Punkt $\mathfrak{x}$ entweder in dem einen (von links nach rechts) oder in dem entgegengesetzten Richtungssinne (von rechts nach links) auf dem Träger 𝔄 fortrücken. Sind $a$ und $b$ zwei besondere Lagen des sich drehenden Strahles $x$, so kann $x$ auf doppelte Weise aus der Lage $a$ in die Lage $b$ übergeführt werden, entweder in dem einen oder entgegengesetzten Drehungssinne. Diese Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen $abc$ annehmen und verlangen, der veränderliche Strahl solle von $a$ durch $b$ nach $c$ gelangen (ohne indessen, während er sich von $a$ nach $b$ bewegt, in die Lage von $c$ gekommen zu sein). Durch die Aufeinander-

folge $a\,b\,c$ ist der Drehungssinn von $x$ mit bestimmt (Fig. 2).


(Fig. 2.)

Sind a und b zwei besondere Lagen des fortrückenden Punktes x, so kann x von a nach b auf doppelte Weise gelangen, entweder direkt oder durch den unendlichen entfernten Punkt (§ 3). Diese beiden Wege haben entgegengesetzten Richtungssinn. Die Zweideutigkeit hört aber auf, sobald wir drei besondere Lagen abc annehmen und festsetzen, der Punkt x solle von a durch b nach c gelangen (ohne auf dem Wege von a nach b die Lage c eingenommen zu haben); durch die Aufeinanderfolge abc ist der Richtungssinn von x mitbestimmt (Fig. 3).


(Fig. 3.)

Da nun $a\,b\,c$ und abc entsprechende Elemente der beiden projektivischen Gebilde sind, so wird, sobald durch die Aufeinanderfolge $a\,b\,c$ der Drehungssinn des Strahlbüschels festgestellt ist, durch die zugehörige Aufeinanderfolge abc der Richtungssinn der Punktreihe unzweideutig mitbestimmt, und nehmen wir im Strahlbüschel den entgegengesetzten Drehungssinn durch die Aufeinanderfolge $a\,c\,b$, so wird durch die Aufeinanderfolge acb auch der zugehörige Richtungssinn in der Punktreihe entgegengesetzt. Durch diese Bemerkung wird später jede Zweideutigkeit hinsichtlich der Lage entsprechender Elemente aufgehoben.

## § 5. Doppelverhältniss. (Anharmonische Funktion.)

Um die gegenseitige Abhängigkeit der Elemente der beiden Grundgebilde, welche durch die perspektivische Lage derselben hervorgerufen wird, unabhängig von letzterer darzustellen, suchen wir Beziehungen auf zwischen den Abständen beliebiger Punkte der Punktreihe und den Winkeln, welche die entsprechenden Strahlen mit einander bilden, solchergestalt, dass diese Beziehungen von der relativen Lage der beiden Gebilde unabhängig sind.

Seien abcd . . . beliebige Punkte der Punktreihe 𝔄, so soll nach dem Vorgange von Möbius durch die Nebeneinanderstellung der Buchstaben

ab

nicht allein die Strecke zwischen den Punkten a und b (ihr Ab-

stand) bezeichnet werden, sondern auch der Richtungssinn, in welchem die Strecke von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ hin auf **direktem** Wege durchlaufen wird, so dass also

(I.) . . . . . $\mathfrak{ab} + \mathfrak{ba} = 0$, d. h. $\mathfrak{ba} = -\mathfrak{ab}$

ist, wonach dann für irgend drei Punkte $\mathfrak{abc}$ der Geraden die Gültigkeit der Gleichung

(II.) . . . $\mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{ac}$ oder $\mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} + \mathfrak{ca} = 0$

allgemein stattfindet, mag der Punkt $\mathfrak{c}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ oder ausserhalb der Strecke liegen, und für irgend vier auf der Geraden befindliche Punkte $\mathfrak{abcd}$ u. a. eine Beziehung gilt, die wir nur desshalb anführen, weil wir sogleich von ihr Gebrauch machen werden; da nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} &= \mathfrak{ac} \\ \mathfrak{ad} &= \mathfrak{ab} + \mathfrak{bd} \end{aligned}$$

so folgt

$$\mathfrak{ab} . \mathfrak{ad} + \mathfrak{bc} . \mathfrak{ad} = \mathfrak{ac} . \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac} . \mathfrak{bd}$$
$$\mathfrak{ab}\{\mathfrak{ad} - \mathfrak{ac}\} = \mathfrak{ac} . \mathfrak{bd} - \mathfrak{bc} . \mathfrak{ad}$$

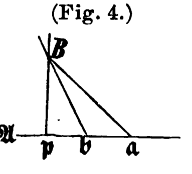
(III.) . . . . $\mathfrak{ab} . \mathfrak{cd} + \mathfrak{bc} . \mathfrak{ad} + \mathfrak{ca} . \mathfrak{bd} = 0$.

Seien ferner $abcd$ . . . die entsprechenden Strahlen des mit der Punktreihe $\mathfrak{abc}$ . . . perspektivisch liegenden Strahlbüschels $B$ und bezeichne

$$(ab)$$

den Winkel zwischen den beiden Strahlen $a$ und $b$ von einem veränderlichen Strahl $x$ in demjenigen Drehungssinne von $a$ nach $b$ hin beschrieben, welcher übereinstimmt mit dem Richtungssinne der Strecke $\mathfrak{ab}$ (§ 4), dann lassen sich leicht Beziehungen ermitteln zwischen den Winkeln des Strahlbüschels und den entsprechenden Abschnitten auf der Punktreihe, indem man nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie die Fläche des Dreiecks $B\mathfrak{ab}$ auf doppelte Weise ausdrückt; das aus $B$ auf $\mathfrak{A}$ gefällte Perpendikel treffe in $\mathfrak{p}$, dann wird

(Fig. 4.)




$$B\mathfrak{a} . B\mathfrak{b} . \sin (ab) = B\mathfrak{p} . \mathfrak{ab}$$

oder

(1) . . . . . . . . . . $\dfrac{\mathfrak{ab}}{\sin (ab)} = \dfrac{B\mathfrak{a} . B\mathfrak{b}}{B\mathfrak{p}}$

Nimmt man ein drittes Paar $c$ und $\mathfrak{c}$ entsprechender Elemente hinzu,

so treten in gleicher Weise zwei neue Relationen hinzu:

$$(2) \quad \dots \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\sin(ac)} = \frac{B\mathfrak{a} \cdot B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}; \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sin(bc)} = \frac{B\mathfrak{b} \cdot B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}$$

Nur die rechten Seiten dieser Beziehungen enthalten Stücke, welche von der perspektivischen Lage beider Gebilde abhängen, während die linken Seiten frei davon sind; es gelingt aber nicht, aus diesen drei Gleichungen (1) und (2) jene Stücke zu eliminiren; wir ziehen daher noch ein viertes Paar entsprechender Elemente $d$ und $\mathfrak{d}$ in die Betrachtung und erhalten drei neue Relationen

$$(3) \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a} \cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}; \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\sin(bd)} = \frac{B\mathfrak{b} \cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}; \quad \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\sin(cd)} = \frac{B\mathfrak{c} \cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}$$

Aus diesen 6 Relationen (1) (2) (3) können wir nun in mehrfacher Weise andere ableiten, die unabhängig sind von den Stücken $B\mathfrak{a}$ $B\mathfrak{b}$ $B\mathfrak{c}$ $B\mathfrak{d}$ $B\mathfrak{p}$, also bestehen bleiben, wenn die perspektivische Lage aufgehoben wird; es folgt nämlich u. a. die Beziehung

$$(4) \quad \dots \dots \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

und alle übrigen Relationen, wenn wir in irgend einer Weise die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, in derselben Weise aber auch $abcd$ permutiren.

Der Ausdruck $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$, welchen wir der Kürze wegen mit

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

bezeichnen wollen, heisst das **Doppelverhältniss** (oder das anharmonische Verhältniss, die anharmonische Funktion) von vier Punkten, und um die Bildungsweise desselben leichter zu übersehen, nennen wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Paar **zugeordneter** Punkte, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ das andere Paar zugeordneter Punkte; dann sind zur Bildung des Doppelverhältnisses die einfachen Verhältnisse der Abstände jedes Punktes des einen Paares zugeordneter Punkte von den beiden Punkten des anderen Paares: $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ und $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ durch einander zu theilen; welche von den vier Punkten übrigens auf diese Weise einander zugeordnet werden, ist an sich gleichgültig, nur sollen bei der Bezeichnung $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ die beiden ersten und die beiden letzten als zugeordnete Punktenpaare festgehalten werden. Ebenso heisst der Ausdruck

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

welchen wir mit $(abcd)$ bezeichnen, das Doppelverhältniss von vier Strahlen des Strahlbüschels und es werden dabei ebenfalls $a$ und $b$, $c$ und $d$ als zugeordnete aufgefasst.

Die gefundene Beziehung (4) sagt also aus:

Bei zwei projektivischen Gebilden: einer Punktreihe und einem Strahlbüschel findet zwischen irgend vier entsprechenden Elementenpaaren $\mathfrak{abcd}$ und $abcd$ immer die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd).$$

## § 6. Verschiedene Werthe eines Doppelverhältnisses durch Vertauschung der Elemente.

Ehe wir aus dem gefundenen Resultat Folgerungen ziehen, wollen wir untersuchen, in welchem Zusammenhange die 24 Werthe des Doppelverhältnisses mit einander stehen, welche wir erhalten, wenn wir die Elemente desselben auf alle möglichen Arten mit einander vertauschen. Sei der Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = (\mathfrak{abcd}) = k$$

so erkennen wir zunächst aus der Bildungsweise desselben, dass

$$(1) \quad \ldots \quad (\mathfrak{ab\,cd}) = (\mathfrak{ba\,dc}) = (\mathfrak{cd\,ab}) = (\mathfrak{dc\,ba})$$

ferner, da

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} : \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}}$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{abcd}) \cdot (\mathfrak{abdc}) = 1.$$

Endlich giebt die Relation (III) § 5 zwischen irgend vier Punkten einer Geraden:

$$\mathfrak{ab}\,.\,\mathfrak{cd} + \mathfrak{bc}\,.\,\mathfrak{ad} + \mathfrak{ca}\,.\,\mathfrak{bd} = 0$$

folgende Beziehung zwischen Doppelverhältnissen

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} + \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cb}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{cd}} = 1$$

oder

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathfrak{abcd}) + (\mathfrak{acbd}) = 1$$

und hieraus lassen sich die Werthe des Doppelverhältnisses für alle 24 möglichen Vertauschungen folgendermassen durch einen Werth desselben $k$ ausdrücken:

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mathfrak{abcd}) = (\mathfrak{badc}) = (\mathfrak{cdab}) = (\mathfrak{dcba}) = k \\
(\mathfrak{abdc}) = (\mathfrak{bacd}) = (\mathfrak{dcab}) = (\mathfrak{cdba}) = \frac{1}{k} \\
(\mathfrak{acbd}) = (\mathfrak{cadb}) = (\mathfrak{bdac}) = (\mathfrak{dbca}) = 1-k \\
(\mathfrak{acdb}) = (\mathfrak{cabd}) = (\mathfrak{dbac}) = (\mathfrak{bdca}) = \frac{1}{1-k} \\
(\mathfrak{adbc}) = (\mathfrak{dacb}) = (\mathfrak{bcad}) = (\mathfrak{cbda}) = \frac{k-1}{k} \\
(\mathfrak{adcb}) = (\mathfrak{dabc}) = (\mathfrak{cbad}) = (\mathfrak{bcda}) = \frac{k}{k-1}.
\end{array}\right.$$

Dieselben Beziehungen ergeben sich für das Doppelverhältniss von vier Strahlen $(abcd)$ aus der in § 5 nachgewiesenen Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd),$$

## § 7. Veränderung des Werthes eines Doppelverhältnisses bei der Bewegung eines seiner Elemente.

Für die Folge ist es nützlich zu wissen, wie sich der Werth eines Doppelverhältnisses verändert, wenn eines seiner Elemente alle möglichen Lagen annimmt, während die drei andern festgehalten werden. Nehmen wir das Doppelverhältniss von vier Punkten $(\mathfrak{abcd})$ und lassen den Punkt $\mathfrak{d}$ sich bewegen, so bleibt von dem Doppelverhältnisse $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$ das erste Verhältniss unverändert und es variirt nur das zweite. Untersuchen wir daher zunächst, wie sich das Verhältniss $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ verändert, während $\mathfrak{x}$ alle möglichen Lagen auf der Geraden $\mathfrak{ab}$ einnimmt. Es treten hierbei zwei wesentlich verschiedene Fälle ein: entweder liegt $\mathfrak{x}$ auf der endlichen Strecke zwischen $\mathfrak{ab}$ oder auf einer der beiden unendlichen Strecken ausserhalb $\mathfrak{ab}$; im ersten Falle haben die Strecken $\mathfrak{ax}$ und $\mathfrak{bx}$ entgegengesetzten, im zweiten Falle gleichen Richtungssinn (§ 5); wir nehmen daher im ersten Falle den absoluten Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ mit dem negativen Vorzeichen (—), im zweiten Falle mit dem positiven Vorzeichen (+) und unterscheiden dadurch die beiden Gebiete auf der geraden Linie, in welchen der Punkt $\mathfrak{x}$ liegen kann. Wenn nun $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, so ist der Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{ax}}{\mathfrak{bx}}$ gleich 0, er bleibt negativ, solange sich $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ hin

bewegt; er wird $= -1$, wenn $\mathfrak{x}$ in die Mitte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ fällt, wächst (absolut genommen), während $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{b}$ geht, und wird, wenn $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt, unendlich gross ($\infty$); dabei liegen die absoluten Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$, während $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ liegt, zwischen 0 und 1, während $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, zwischen 1 und $\infty$ und keine zwei gleichen Werthe können vorkommen; das Verhältniss nimmt also alle negativen Werthe von 0 bis $\infty$ und jeden nur ein Mal an; geht $\mathfrak{x}$ weiter über $\mathfrak{b}$ hinaus, so wird $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$ positiv und nimmt ab von dem Werth $\infty$ an, welchen es in $\mathfrak{b}$ hatte; je weiter $\mathfrak{x}$ gelangt, desto mehr nähert sich der Werth des Verhältnisses dem Werthe $+1$, da $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}} = 1 + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$; für den unendlich entfernten Punkt selbst wird daher das Verhältniss den Grenzwerth $+1$ annehmen; gehen wir durch den unendlich entfernten Punkt auf die andere Seite der Geraden über (§ 3), so wird der Werth des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}} < 1$, weil jetzt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{x}$ entfernter liegt als $\mathfrak{a}$, während es vorher umgekehrt war; nähert sich $\mathfrak{x}$ mehr und mehr dem Punkte $\mathfrak{a}$, so nimmt der Werth $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$ immer mehr ab bis zum Werthe 0, der dann eintritt, wenn $\mathfrak{x}$ wieder mit $\mathfrak{a}$ zusammenfällt. Für das ganze Gebiet ausserhalb der Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, welches durch den unendlich entfernten Punkt in zwei Abschnitte zerfällt, ist demnach der Werth des Verhältnisses positiv und zwar auf dem einen Abschnitte $> 1$ (nimmt von $\infty$ bis 1 ab), auf dem andern Abschnitte $< 1$ (nimmt von 1 bis 0 ab), für den unendlich entfernten Punkt selbst $+1$; jeder positive Werth des Verhältnisses kommt aber nur ein Mal vor. Im Ganzen nimmt also das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{x}}{\mathfrak{b}\mathfrak{x}}$ bei der Bewegung von $\mathfrak{x}$ alle positiven und alle negativen Werthe von $\pm 0$ bis $\pm \infty$ und jeden nur ein Mal an. Will man vom Vorzeichen absehen und nur den absoluten Werth des Verhältnisses auffassen, so tritt ein solcher immer zwei Mal auf, einmal für eine bestimmte Lage zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, das andere Mal ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$; die Punkte gruppiren sich also dann paarweise, wie z. B. der Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ und der unendlich entfernte Punkt dem Werthe 1 entspricht; durch das hinzugefügte Vorzeichen heben wir aber diese Zweideutigkeit auf.

Hieraus ergiebt sich nun auch die Veränderung des Doppel-

verhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$, wenn eines seiner Elemente sich bewegt. Sei $\mathfrak{d}$ dies veränderliche Element, so wird in dem Doppelverhältnisse $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ allein das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}$ sich ändern und alle positiven und negativen Werthe durchlaufen; die mit dem konstanten Werthe $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ multiplicirten reciproken Werthe dieses Verhältnisses werden daher auch alle positiven und negativen Werthe in stetiger Aufeinanderfolge annehmen und jeden nur ein Mal. Wie die positiven und negativen Werthe mit der Veränderung von $\mathfrak{d}$ einander folgen, hängt von dem Werthe des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ ab, welcher positiv oder negativ ist, je nachdem $\mathfrak{c}$ ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegt:

1) Liegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Art: —|— $\mathfrak{a}$ —|— $\mathfrak{b}$ —|— $\mathfrak{c}$ —, so ist $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ positiv und der Werth des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$

| | | |
|---|---|---|
| wird für | $\mathfrak{d}$ im Unendlichen | $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = +$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\infty$ bis $\mathfrak{a}$ geht | $+$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{a}$ hineinfällt | $= \infty$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{b}$ geht | $-$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt | $= 0$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{c}$ geht | $+$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt | $= +1$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{c}$ bis ins Unendl. geht | $+$. |

2) Liegen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Art: —|— $\mathfrak{a}$ —|— $\mathfrak{c}$ —|— $\mathfrak{b}$ —, so ist $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$ negativ und der Werth des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$

| | | |
|---|---|---|
| wird für | $\mathfrak{d}$ im Unendlichen | $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = -$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\infty$ bis $\mathfrak{a}$ geht | $-$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{a}$ hineinfällt | $= \infty$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{a}$ bis $\mathfrak{c}$ geht | $+$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt | $= +1$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{b}$ geht | $+$ |
| wenn | $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{b}$ hineinfällt | $= 0$ |
| während | $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{b}$ bis $\infty$ geht | $-$. |

Die beiden zugeordneten Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, für welche, wenn $\mathfrak{d}$ hineinfällt, das Doppelverhältniss die Werthe $\infty$ und 0 annimmt, bilden die Uebergänge von den positiven zu den negativen Wer-

then desselben; ausserdem tritt einmal der besondere Werth $+1$ auf, wenn $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ hineinfällt, also das andere Paar zugeordneter Punkte zusammenfällt und für den unendlich entfernten Punkt geht das Doppelverhältniss in das einfache $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}$ über.

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Paar entsprechenden Elementen einer Punktreihe und eines mit ihr projektivischen Strahlbüschels können wir auf einen ganz gleichen Verlauf des Werthes von $(abcd)$ schliessen, wenn von den vier Strahlen einer z. B. $d$ das ganze Strahlbüschel durchläuft.

## § 8. Harmonische Elemente.

Unter allen Werthen, welche ein Doppelverhältniss annehmen kann, giebt es einen, welcher seines häufigen Vorkommens wegen von besonderer Wichtigkeit ist; ehe wir daher in den allgemeinen Betrachtungen fortfahren, wollen wir diesen besonderen Fall näher ins Auge fassen. Dieser wichtigste specielle Werth eines Doppelverhältnisses ist $-1$, und wenn das Doppelverhältniss von vier Punkten

$$(\mathfrak{abcd}) = -1$$

ist, so heissen diese vier harmonische Punkte und zwar $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zugeordnete harmonische Punkte, ebenso $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zugeordnete; da das Doppelverhältniss von vier harmonischen Punkten $-1$ ist, so folgt (§ 7), dass, wenn $\mathfrak{c}$ zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, nothwendig $\mathfrak{d}$ ausserhalb $\mathfrak{ab}$ liegen muss und umgekehrt, dass also bei vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordneter Punkte durch das andere Paar getrennt wird und zwischen ihren Abständen die Bedingung stattfindet

$$\text{(I)} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} + \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = 0 \text{ oder } \frac{\mathfrak{ca}}{\mathfrak{da}} + \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{db}} = 0$$

oder die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}$ und $\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}$ haben gleichen, aber entgegengesetzten Werth. Aus den Beziehungen in § 6 ergiebt sich für $k = -1$, dass, wenn

$$(\mathfrak{abcd}) = -1$$

$$(\mathfrak{abcd}) = (\mathfrak{abdc}) = (\mathfrak{badc}) = (\mathfrak{bacd})$$

$$= (\mathfrak{cdab}) = (\mathfrak{cdba}) = (\mathfrak{dcab}) = (\mathfrak{dcba}) = -1,$$

dass man also sowohl ein Paar zugeordneter harmonischer Punkte unter sich, als auch mit dem andern Paar vertauschen kann, ohne

die harmonische Eigenschaft aufzuheben. Ferner ergiebt sich aus § 7, dass, wenn man irgend drei Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ auf einer Geraden willkührlich annimmt und zwei z. B. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als zugeordnet auffasst, nur ein einziger bestimmter vierter dem $\mathfrak{c}$ zugeordeter harmonischer Punkt $\mathfrak{d}$ existirt, welcher, wenn $\mathfrak{c}$ zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegt, ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegen muss und umgekehrt; eine einfache Konstruktion desselben allein mittels des Lineals ergiebt sich später (siehe § 9). Hier erwähnen wir nur noch einige metrische Beziehungen, welche sich aus dem besonderen Werthe — 1 des Doppelverhältnisses ergeben.

Wenn nämlich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = -1,$$

so ist (§ 6)

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}) = \frac{1}{2}$$

das heisst

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$$

Schreiben wir diese Beziehung dergestalt

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}},$$

so folgt

$$\text{(II)} \; \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} + \frac{1}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}\right\}$$

das heisst, der reciproke Werth des Abstandes eines von dem zugeordneten harmonischen Punkte ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den reciproken Werthen der Abstände des ersten von den beiden andern zugeordneten Punkten.

Ferner führen wir die Mitte $\mathfrak{m}$ zwischen zwei zugeordneten Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein, also

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{m}\mathfrak{b},$$

dann wird die vorige Relation

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}},$$

woraus folgt

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}$$

und durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$

$$\frac{\mathfrak{m}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}};$$

aus den beiden Beziehungen

$$\frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{ad}}=\frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{cd}} \qquad \frac{\mathfrak{ma}}{\mathfrak{ac}}=\frac{\mathfrak{bd}}{\mathfrak{cd}}$$

folgt durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten

$$\frac{\mathfrak{md}}{\mathfrak{ad}}=\frac{\mathfrak{bd}}{\mathfrak{cd}} \qquad \frac{\mathfrak{mc}}{\mathfrak{ac}}=\frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{cd}}$$

und hieraus folgt:

$$\text{(III)} \ldots\ldots \quad (\mathfrak{ma})^2=(\mathfrak{mb})^2=\mathfrak{mc}\,.\,\mathfrak{md}$$

$$\text{(IV)} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{mc}}{\mathfrak{md}}=\left(\frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{bd}}\right)^2=\left(\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ad}}\right)^2$$

Auch kann u. A. noch die Relation bemerkt werden:

$$\text{(V)} \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \mathfrak{ca}\,.\,\mathfrak{cb}=\mathfrak{cm}\,.\,\mathfrak{cd} \\ \mathfrak{da}\,.\,\mathfrak{db}=\mathfrak{dm}\,.\,\mathfrak{dc} \end{cases}$$

welche alle sich leicht in Worten ausdrücken lassen; ähnliche metrische Relationen ergeben sich, wenn wir die Mitte $\mathfrak{n}$ zwischen den beiden andern zugeordneten Punkten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ einführen.

Von besonderem Interesse ist die Beziehung III. für vier harmonische Punkte: das Quadrat des Abstandes der Mitte zwischen zwei zugeordneten Punkten von einem derselben ist gleich dem Rechteck aus den Abständen derselben Mitte von den beiden andern zugeordneten Punkten.

Halten wir bei vier harmonischen Punkten ein Paar zugeordneter Punkte $\mathfrak{ab}$ fest, so bleibt auch deren Mitte $\mathfrak{m}$ unverändert; bewegen wir dann $\mathfrak{c}$, so verändert sich mit ihm der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{d}$ in der Weise, dass das Rechteck $\mathfrak{mc}\,.\,\mathfrak{md}$ konstant bleibt. Wir können hierdurch, während wir von vier harmonischen Punkten das eine Paar zugeordneteter Punkte festhalten, das ganze System von Paaren zugeordneter Punkte verfolgen, welche mit den beiden festen harmonisch liegen, und merken insbesondere zwei specielle Fälle: 1) wenn $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{m}$ liegt, so liegt $\mathfrak{d}$ im Unendlichen, d. h. zwei beliebige Punkte einer Geraden, die Mitte zwischen ihnen und der unendlich entfernte Punkt sind immer vier harmonische Punkte und zwar die beiden ersten zugeordnet, die beiden letzten zugeordnet; 2) wenn $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{b}$ oder in $\mathfrak{a}$ hineinfällt, so muss auch $\mathfrak{d}$ hineinfallen, d. h. wenn von vier harmonischen Punkten ein Paar zugordnete zusammenfallen, so muss in diesem Punkte auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte liegen, oder: vier harmonische Punkte

können insbesondere so liegen, dass drei zusammenfallen und einer abgesondert ist. Weil endlich $\mathfrak{m}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{d} = (\mathfrak{m}\mathfrak{a})^2$ positiv ist, so müssen $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{d}$ gleichen Richtungssinn haben, d. h. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ immer auf derselben Seite von $\mathfrak{m}$ liegen; während also $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{a}$ fortschreitet, geht der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{d}$ vom Unendlichen in entgegengesetztem Richtungssinne nach $\mathfrak{a}$ (denn je grösser von dem konstanten Rechteck die eine Seite wird, desto kleiner muss die andere werden), und wenn $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{m}$ nach $\mathfrak{b}$ fortrückt, bewegt sich $\mathfrak{d}$ vom unendlich entfernten Punkt ebenfalls nach $\mathfrak{b}$ hin (vergl. § 7).

Dieselben Betrachtungen können wir nun direkt übertragen auf vier Strahlen, deren Doppelverhältniss den Werth $-1$ hat. Solche vier Strahlen $abcd$ eines Strahlbüschels, für welche

$$(abcd) = -1$$

ist, heissen *vier harmonische Strahlen* und zwar $ab$ *zugeordnete*, $cd$ *zugeordnete Strahlen*; der Werth des Doppelverhältnisses liefert zwischen den Winkeln die Beziehung

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} + \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = 0.$$

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse (§ 5) folgt, dass, *wenn man irgend vier harmonische Punkte mit einem Punkt $B$ durch Strahlen verbindet, diese vier harmonische Strahlen sind, und wenn man irgend vier harmonische Strahlen durch eine beliebige Gerade schneidet, die vier Schnittpunkte vier harmonische Punkte sind*, zugleich auch zugeordnete Strahlen die zugeordneten Punkte enthalten und umgekehrt.

Hiernach ergiebt sich die relative Lage von vier harmonischen Strahlen aus der von vier harmonischen Punkten. Zwei zugeordnete Strahlen $ab$ theilen nämlich die ganze Ebene in vier Winkelräume, von denen zwei und zwei (Scheitelwinkelräume) gleich sind; das andere Paar zugeordneter Strahlen kann nun nicht in dieselben Scheitelwinkelräume fallen, sondern wenn der Strahl $c$ in das eine Paar Scheitelräume fällt, so muss der zugeordnete $d$ in das andere Paar Neben-Scheitelräume fallen oder wie man sich kürzer ausdrückt: bei vier harmonischen Strahlen wird ein Paar zugeordneter Strahlen durch das andere Paar *getrennt*. Ferner giebt es zu drei beliebig gewählten Strahlen nur einen bestimm-

ten vierten harmonischen, der, wenn zwei als zugeordnet festgesetzt sind, dem dritten zugeordnet ist. Ebenso übertragen sich die metrischen Relationen II, III, IV, auf vier harmonische Strahlen:

Da

$$\frac{\sin(da)}{\sin(ca)} + \frac{\sin(db)}{\sin(cb)} = 0$$

und

$$(da) = (dc) + (ca); \quad (db) = (dc) + (cb)$$

bei festgehaltenem Drehungssinn, so ergiebt sich durch Auflösung der sin der Summen

$$(2) \ldots \operatorname{cotg}(cd) = \tfrac{1}{2}\left\{\operatorname{cotg}(ca) + \operatorname{cotg}(cb)\right\}.$$

Auch die übrigen metrischen Beziehungen zwischen vier harmonischen Strahlen, analog III und IV ergeben sich, wenn man mit $m$ einen Halbirungsstrahl des Winkels $(ab)$ bezeichnet, also

$$(am) = (mb) = -(bm) = -(ma);$$

die Relation (1) lässt sich dann so schreiben

$$\frac{\sin\left\{(am) + (mc)\right\}}{\sin\left\{(bm) + (mc)\right\}} + \frac{\sin\left\{(am) + (md)\right\}}{\sin\left\{(bm) + (mb)\right\}} = 0$$

und giebt aufgelöst mit Berücksichtigung der vorigen Relationen

$$\frac{\operatorname{tg}(mc) - \operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(mc) + \operatorname{tg}(ma)} + \frac{\operatorname{tg}(md) - \operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(md) + \operatorname{tg}(ma)} = 0$$

$$\frac{\operatorname{tg}(mc)}{\operatorname{tg}(ma)} = \frac{\operatorname{tg}(ma)}{\operatorname{tg}(md)}.$$

$$(3) \ldots \operatorname{tg}^2(ma) = \operatorname{tg}^2(mb) = \operatorname{tg}(mc) \cdot \operatorname{tg}(md).$$

Ferner

$$\sin\left\{(am) + (mc)\right\} + \sin\left\{(bm) + (mc)\right\} = \sin(ac) + \sin(bc)$$

aufgelöst

$$2\cos(am) \cdot \sin(mc) = \sin(ac) + \sin(bc)$$

ebenso

$$2\cos(am) \cdot \sin(md) = \sin(ad) + \sin(bd)$$

anderseits

$$2\sin(am)\cos(mc) = \sin(ac) - \sin(bc)$$

$$2\sin(am)\cos(md) = \sin(ad) - \sin(bd).$$

Es folgt aber aus (1)

$$\frac{\sin(ac) + \sin(bc)}{\sin(bd) - \sin(ad)} = \frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}; \quad \frac{\sin(ad) + \sin(bd)}{\sin(bc) - \sin(ac)} = \frac{\sin(bd)}{\sin(bc)},$$

woraus dann folgt:

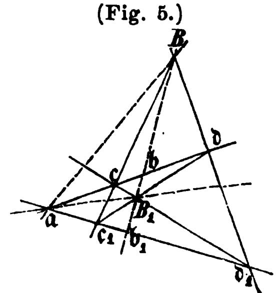
$$(4) \quad \ldots \quad \frac{\sin 2(mc)}{\sin 2(md)} = \left\{\frac{\sin(bc)}{\sin(bd)}\right\}^2 = \left\{\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)}\right\}^2.$$

Die Beziehung (3) lässt ähnlich wie (III) die Abhängigkeit eines Paares zugeordneter Strahlen von dem andern und der Halbirungslinie ihres Winkels erkennen; halten wir $ab$ und also auch die Halbirungslinie $m$ des Winkels $(ab)$ fest und verändern $c$, so wird auch der vierte harmonische Strahl $d$ sich bewegen, aber das Produkt $\operatorname{tg}(mc) \,.\, \operatorname{tg}(md)$ konstant bleiben; fällt insbesondere $c$ auf $m$, so muss $\operatorname{tg}(md) = \infty$ werden, also $d$ zu $m$ senkrecht stehen oder was dasselbe sagt: $d$ wird der Halbirungsstrahl des Nebenwinkels von $(ab)$. Wir schliessen also: *Wenn zwei Strahlen den Winkel und Nebenwinkel zweier andern halbiren, so bilden sie mit jenen vier harmonische Strahlen und sind einander zugeordnet*; aber auch umgekehrt: *Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete zu einander rechtwinklig sind, so halbiren sie die Winkel der beiden andern zugeordneten Strahlen.* (Wir erkennen ferner leicht, dass dieselbe Relation (3) bestehen bleibt, wenn wir statt der einen Halbirungslinie $m$ des Winkels $(ab)$ die andere, zu ihr senkrechte Halbirungslinie des Nebenwinkels setzen). Fällt zweitens bei der Bewegung von $c$ dieser Strahl auf $a$ oder $b$, so muss auch $d$ auf denselben fallen, also: *Wenn von vier harmonischen Strahlen ein Paar zugeordneter zusammenfallen, so muss auch einer des andern Paares hineinfallen*, oder: vier harmonische Strahlen können die besondere Lage haben, dass drei zusammenfallen und der vierte abgesondert liegt. Hinsichtlich der Bewegung sehen wir endlich, dass, während $c$ das Gebiet zweier Scheitelräume des Winkels $(ab)$ durchstreift, der zugeordnete Strahl $d$ das Gebiet der beiden andern Neben - Scheitelräume in entgegengesetztem Drehungssinne durchstreift und dass beide einmal in $a$, das andere Mal in $b$ zusammenkommen.

## § 9. Vorkommen harmonischer Elemente beim vollständigen Viereck und Vierseit.

Harmonische Punkte und Strahlen bieten sich bei sehr vielen geometrischen Untersuchungen dar; des Folgenden wegen müssen wir auf ihr Vorkommen beim vollständigen Viereck und Vierseit aufmerksam machen. Sind nämlich $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ irgend vier Punkte

der Ebene (Fig. 5) (ein vollständiges Viereck), so giebt es drei Paar Verbindungslinien je zweier derselben (drei Seitenpaare) nämlich


(Fig. 5.)

$\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ $\quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ die sich in $\mathfrak{a}$ treffen mögen
$\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ $\quad \mathfrak{b}\mathfrak{d}_1$ - - - $B$ - -
$\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$ $\quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}$ - - - $B_1$ - -

Diese drei Schnittpunkte bilden das sogenannte Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks und seine drei Seiten heissen die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks, seine Ecken die Diagonalpunkte desselben; ziehen wir $BB_1$, welche Linie $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ resp. in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ treffe, so ist, weil die vier Strahlen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$, $B\mathfrak{d}$ die Gerade $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ resp. in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ treffen, das Doppelverhältniss der vier Strahlen einmal gleich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ und zweitens gleich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$ (§ 5), mithin

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1).$$

Die vier Strahlen $B_1\mathfrak{a}$, $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{c}_1$, $B_1\mathfrak{d}_1$ treffen aber die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ in den resp. Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$, mithin ist

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c})$$

folglich auch

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}).$$

Nun ist aber allgemein (§ 6, 2) $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = 1$, folglich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})^2 = 1,$$

$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ selbst also $+1$ oder $-1$; den Werth $+1$ kann dies Doppelverhältniss nach § 7 nicht haben, weil derselbe nur dann auftritt, wenn zwei zugeordnete Punkte zusammenfallen, was hier offenbar nicht der Fall ist, mithin muss

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = -1$$

sein, d. h. (§ 8) die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ sind harmonisch gelegen, ebenso $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$; folglich sind auch die vier von $B$ ausgehenden Strahlen vier harmonische Strahlen und ebenso die vier durch $B_1$ laufenden Strahlen; da von den letzteren sowohl die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ als auch $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ in vier harmonischen Punkten getroffen wird, durch welche die vier von $\mathfrak{a}$ ausgehenden Strahlen laufen, so sind auch die letzteren vier harmonische Strahlen. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Beim vollständigen Viereck bilden in jedem der drei Diagonalpunkte die beiden Seiten und die beiden

Diagonalen, welche durch denselben gehen, vier harmonische Strahlen und zwar je ein Paar zugeordnete.

Dieselbe Figur lässt sich auch anders auffassen: Wir können die vier Verbindungslinien $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ als vier beliebige Gerade in der Ebene, ein vollständiges Vierseit ansehen; diese vier Geraden schneiden sich in drei Punktenpaaren, den sechs Ecken des vollständigen Vierseits oder den drei Paar Gegenecken, nämlich $B$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{c}_1$; die drei Verbindungslinien dieser drei Paar Gegenecken heissen Diagonalen des vollständigen Vierseits, ihre Schnittpunkte die Diagonalpunkte. Hiernach lautet der vorige Satz:

Beim vollständigen Vierseit bilden auf jeder der drei Diagonalen die beiden Ecken des Vierseits und die Schnittpunkte der beiden andern Diagonalen vier harmonische Punkte und zwar je ein Paar zugeordnete.

Es folgt hieraus leicht eine Konstruktion sowohl des vierten harmonischen Punktes als auch Strahles zu drei gegebenen allein mit Hülfe des Lineals, wenn zwei als zugeordnete angenommen sind:

1) Sind auf einer Geraden drei Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gegeben, und soll der vierte harmonische dem $\mathfrak{c}$ zugeordnete Punkt $\mathfrak{d}$ gefunden werden, während $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ das eine Paar zugeordneter Punkte ist, so ziehe man durch $\mathfrak{c}$ einen beliebigen Strahl und nehme zwei beliebige Punkte $x$ und $y$ auf demselben, verbinde $x\mathfrak{a}$, $x\mathfrak{b}$, $y\mathfrak{a}$, $y\mathfrak{b}$ und bestimme die Schnittpunkte

$$(x\mathfrak{a},\ y\mathfrak{b}) \text{ und } (x\mathfrak{b},\ y\mathfrak{a}),$$

deren Verbindungslinie die Gerade in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{d}$ trifft.

2) Sind drei durch einen Punkt $O$ gehende Strahlen $abc$ gegeben und man soll den vierten harmonischen dem $c$ zugeordneten Strahl $d$ finden, während $ab$ das andere Paar zugeordneter Strahlen sind, so ziehe man durch einen beliebigen Punkt von $c$ irgend zwei Gerade, welche $a$ und $b$ resp. in $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ treffen; dann giebt der Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1)$ mit $O$ verbunden den gesuchten vierten harmonischen Strahl $d$.

## § 10. Allgemeine Folgerungen aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse. Konstruktion entsprechender Elemente zweier projektivischer Gebilde.

Die am Ende des § 5 bewiesene Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Punkten einer Geraden und vier

Strahlen eines Strahlbüschels, welche durch jene gehen:

$$(\mathfrak{abcd}) = (abcd)$$

liefert zuvörderst zwei allgemeine Sätze, deren specielle Fälle für harmonische Punkte und Strahlen wir bereits angewendet haben, nämlich:

1) Zieht man durch ein beliebiges Strahlbüschel von vier Strahlen $abcd$ irgend welche Gerade (Transversalen), die jene resp. in den Punkten $\mathfrak{abcd}$ treffen, so ist der Werth des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{abcd})$ immer derselbe

$$(\mathfrak{abcd}) = \text{const.}$$

welches auch die Lage der hindurchgehenden Transversale sei, nämlich gleich dem Werthe des Doppelverhältnisses der vier Strahlen $(abcd)$.

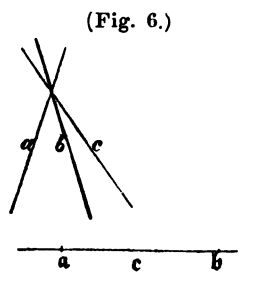
2) Verbindet man irgend vier Punkte $\mathfrak{abcd}$ einer Geraden mit beliebigen Punkten der Ebene durch je vier Strahlen $abcd$, so haben diese Strahlbüschel immer dasselbe Doppelverhältniss

$$(abcd) = \text{const.}$$

welches auch die Lage ihres Mittelpunktes sei, nämlich das Doppelverhältniss der vier Punkte $(\mathfrak{abcd})$.

Da ferner diese Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen entsprechenden Elementen der beiden in perspektivischer Lage befindlichen Gebilde ganz unabhängig ist von der perspektivischen Lage, indem sie nur die Abstände der Punkte und die Winkel zwischen den entsprechenden Strahlen enthält, so bleibt sie auch bestehen, wenn die perspektivische Lage aufgehoben wird, und enthält das allgemeine Gesetz für die projektivische Beziehung (§ 2) eines Strahlbüschels und einer Punktreihe auf einander. Wenn wir also die Strahlen eines Strahlbüschels und die Punkte einer Punktreihe projektivisch auf einander beziehen wollen, so dürfen wir drei Paar Elemente $abc$ und $\mathfrak{abc}$ willkührlich als entsprechende annehmen (Fig. 6), denn erst zwischen vier Paaren besteht die Bedingung

(Fig. 6.)




$$(abcd) = (\mathfrak{abcd}).$$

Durch jene drei Paar ist aber die Beziehung vollständig und eindeutig bestimmt; denn nehmen wir jetzt einen beliebigen vierten Strahl $d$ des Strahlbüschels, so ist der Werth von $(abcd)$ gegeben, und da $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ denselben gegebenen Werth hat, so giebt es nur einen bestimmten Punkt $\mathfrak{d}$ (§ 7), welcher diesen Werth liefert, wofern man auch das Vorzeichen des Werthes von $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ berücksichtigt. (Will man von dem Vorzeichen absehen, so würde durch die vorige Gleichung das Verhältniss $\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}$ nur seinem absoluten Werthe nach gegeben sein und die Lage des Punktes $\mathfrak{d}$ wäre dann zweideutig; ob aber $\mathfrak{d}$ zwischen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder ausserhalb $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ liegt, entscheidet alsdann die Uebereinstimmung des Drehungssinnes mit dem Richtungssinn in beiden projektivischen Gebilden und diese gestattet nur eine Lage von $\mathfrak{d}$; siehe § 4). Demnach gehört zu jedem Strahle $d$ nur ein einziger entsprechender Punkt $\mathfrak{d}$ und auch umgekehrt; lassen wir den Strahl $d$ das ganze Strahlbüschel durchstreichen, so wird der entsprechende Punkt die ganze Punktreihe durchlaufen. Wir können also den *allgemeinen Satz* aussprechen:

*Sämmtliche Paare entsprechender Elemente zweier projektivischer Gebilde (eines Strahlbüschels und einer Punktreihe) sind vollständig bestimmt durch drei Paar entsprechender Elemente, welche willkührlich angenommen werden können; zu jedem vierten Element des einen Gebildes kann das entsprechende Element des andern aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse*

$$(abcx) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}) \quad .$$

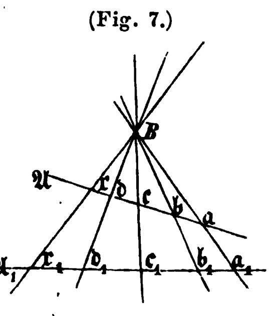
*unzweideutig ermittelt werden und die beiden Gebilde lasssen sich dadurch, wenn sie in beliebiger (allgemeiner) Lage sich befinden, in ihre ursprüngliche perspektivische Lage zurückbringen.*

Wir werden bald Konstruktionen ermitteln, um entsprechende Elemente bei allgemeiner Lage der Gebilde, allein mittels des Lineals zu erhalten. (Siehe Ende des §).

Die beiden im Anfange dieses § ausgesprochenen Sätze lassen sich nun in dem Sinne erweitern, dass man an Stelle von vier Strahlen und vier Punkten das ganze Strahlbüschel und die ganze Punktreihe treten lässt und an Stelle der Gleichheit der Doppel-

verhältnisse die durch dieselbe gegebene projektivische Beziehung entsprechender Elemente zweier Gebilde.

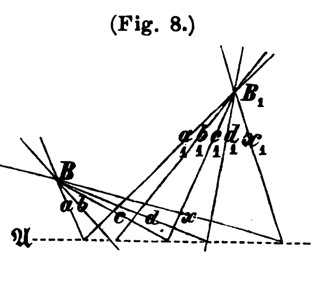
(Fig. 7.)




Wir sagen, zwei Punktreihen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \ldots \mathfrak{x} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{x}_1 \ldots$ befinden sich in perspektivischer Lage, wenn sie sich in demselben Strahlbüschel $B$ befinden, d. h. die Verbindungslinien entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ sämmtlich durch einen Punkt $B$ laufen (Fig. 7); der Punkt $B$ heisst dabei Projektionspunkt, die sämmtlichen Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \ldots$ Projektionsstrahlen, diejenigen Punkte, welche auf demselben Projektionsstrahle liegen, entsprechende Punkte. Diese Beziehung entsprechender Punkte der beiden Punktreihen ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher betrachtete Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, dass nämlich für irgend vier Paar entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet $$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1)$$ nach § 10, 1).

Diese Beziehung bleibt also bestehen, auch wenn die perspektivische Lage aufgehoben wird, und heisst für die allgemeine Lage der beiden Punktreihen die projektivische Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst projektivisch. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei projektivische Punktreihen. Anderseits sagen wir, zwei Strahlbüschel $abcd \ldots x \ldots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots x_1 \ldots$ befinden sich in perspektivischer Lage, wenn ihre Strahlen durch die Punkte derselben Punktreihe gehen oder die Schnittpunkte entsprechender Strahlen $(a a_1)$ $(b b_1)$ $(c c_1) \ldots (x x_1)$ auf derselben Geraden $\mathfrak{A}$ liegen (Fig. 8); diese Gerade heisst alsdann der perspektivische Durchschnitt der beiden Strahlbüschel und immer zwei entsprechende Strahlen, welche durch denselben Punkt des perspektivischen Durchschnitts gehen. Diese Beziehung entsprechender Strahlen der beiden Strahlbüschel auf einander ist demselben Gesetze unterworfen, wie die früher unter-

(Fig. 8.)



suchte Beziehung zwischen Strahlbüschel und Punktreihe, dass nämlich für irgend vier Paar entsprechender Elemente die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(a\,b\,c\,x) = (a_1\,b_1\,c_1\,x_1)$$

stattfindet (nach § 10, 2); sie bleibt also bestehen, auch wenn die perspektivische Lage aufgehoben wird, und heisst ebenfalls für die allgemeine Lage zweier Strahlbüschel **projektivische** Beziehung derselben, oder die Gebilde selbst projektivisch. Der vorhin für Strahlbüschel und Punktreihe ausgesprochene allgemeine Satz gilt jetzt in ganz gleicher Weise für zwei projektivische Strahlbüschel.

Wir haben hiedurch eine eindeutige gegenseitige Abhängigkeit der Elemente zweier Gebilde (mögen diese 1) Strahlbüschel und Punktreihe oder 2) zwei Punktreihen oder 3) zwei Strahlbüschel sein) aus der perspektivischen Lage derselben abgeleitet und durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse zwischen irgend vier entsprechenden Elementenpaaren unabhängig von der perspektivischen Lage ausgedrückt, so dass wir auch umgekehrt schliessen können:

**Wenn die Elemente zweier Gebilde in der Weise einander entsprechen, dass zwischen irgend vieren des einen Gebildes und den entsprechenden des andern die Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet, zugleich aber auch Uebereinstimmung des Drehungssinnes (oder) und Richtungssinnes (§ 4) herrscht, dann sind die beiden Gebilde projektivisch d. h. können in perspektivische Lage gebracht werden.**

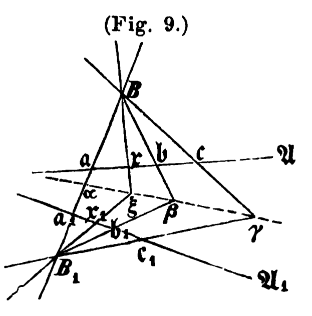
Hieraus folgt ein allgemeiner sehr häufig zur Anwendung kommender Satz:

**Wenn eine beliebige Anzahl von Gebilden (Punktreihen oder Strahlbüschel) in der Verbindung mit einander stehen, dass das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten, das dritte mit dem vierten u. s. f. das vorletzte mit dem letzten projektivisch ist, so ist auch das letzte mit dem ersten projektivisch.**

Wir wollen hievon sogleich eine Anwendung machen zur Konstruktion entsprechender Elemente bei zwei projektivischen Gebilden, deren Beziehung durch drei Paar willkührlich gewählte Elementenpaare bestimmt wird:

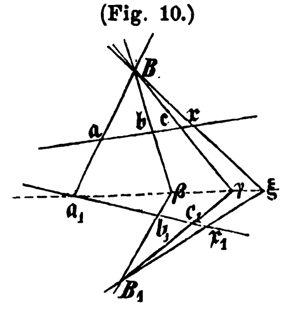
a) Sind auf zwei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ drei Paar Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ willkührlich gegeben und sollen diese entsprechende Punktenpaare zweier projektivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ sein, so ist durch sie die ganze projektivische Beziehung fest bestimmt und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Punkte allein mittels des Lineals in folgender Weise konstruirt werden: Man ziehe $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und nehme in diesem Strahl zwei beliebige Punkte $B$ und $B_1$ an (Fig. 9), dann treffen sich $B\mathfrak{b}$ und $B_1\mathfrak{b}_1$ in $\beta$, ferner $B\mathfrak{c}$ und $B_1\mathfrak{c}_1$ in $\gamma$; man ziehe $\beta\gamma$ und verbinde irgend einen Punkt $\xi$ dieser Linie einmal mit $B$ und das andere Mal mit $B_1$; wo diese Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ treffen, hat man allemal zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der beiden Punktreihen; bewegt man $\xi$ auf der Geraden $\beta\gamma$, so erhält man dadurch sämmtliche Paare entsprechender Punkte. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist mit Hülfe des vorigen Satzes evident, denn bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $\beta\gamma$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ durch $\alpha$, so ist die Punktreihe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}$.. projektivisch mit der Punktreihe $\alpha\beta\gamma\xi$, weil beide perspektivisch liegen (im Strahlbüschel $B$), ferner $\alpha\beta\gamma\xi$ projektivisch mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1$, weil beide perspektivisch liegen (im Strahlbüschel $B_1$), folglich auch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}$.. projektivisch mit $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1$ w. z. b. w.

(Fig. 9.)



Andere Konstruktion. (Fig. 10). Man nehme in dem Strahle $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ einen beliebigen Punkt $B$ an und ziehe durch $\mathfrak{a}_1$ eine beliebige Gerade, welche von $B\mathfrak{b}$ und $B\mathfrak{c}$ resp. in $\beta$ und $\gamma$ getroffen wird; dann mögen sich $\beta\mathfrak{b}_1$ und $\gamma\mathfrak{c}_1$ in $B_1$ treffen; verbindet man irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der ersten Punktreihe mit $B$ und trifft $B\mathfrak{x}$ in $\xi$ die Gerade $\beta\gamma$, so wird $B_1\xi$ die zweite Punktreihe in dem gesuchten entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ treffen.

(Fig. 10.)



b) Sind durch die Mittelpunkte $B$ und $B_1$ drei Strahlenpaare $abc$ und $a_1b_1c_1$ willkührlich gezogen und sollen dieselben entsprechende Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel $B$ und $B_1$

sein, so ist durch sie die ganze projektivische Beziehung vollkommen bestimmt und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Strahlen allein mittels des Lineals in folgender Weise konstruirt werden: Durch den Schnittpunkt $(a, a_1)$ ziehe man zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und bestimme die Schnittpunkte $(\mathfrak{A} b) = \mathfrak{b}$ $(\mathfrak{A} c) = \mathfrak{c}$ $(\mathfrak{A}_1 b_1) = \mathfrak{b}_1$ $(\mathfrak{A}_1 c_1) = \mathfrak{c}_1$; $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1) = O$. Jeder durch $O$ gehende Strahl trifft $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in zwei solchen Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, dass dieselben mit $B$ und $B_1$ verbunden zwei entsprechende Strahlen $x x_1$ der beiden Strahlbüschel liefern und wir erhalten durch die Bewegung der Geraden um $O$ die sämmtlichen Paare entsprechender Strahlen. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Konstruktion sowie die Uebertragung der zweiten im vorigen Falle a) angegebenen Konstruktion wird für den Leser ohne Schwierigkeit sein.

c) Sind drei Strahlen $a b c$ eines Strahlbüschels $B$ und drei Punkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$ einer Geraden $\mathfrak{A}_1$ willkührlich gegeben und sollen dies entsprechende Elemente zweier projektivischen Gebilde $B, \mathfrak{A}_1$ sein, so ist durch sie die ganze projektivische Beziehung vollständig bestimmt und es können beliebig viele andere Paare entsprechender Elemente allein mittels des Lineals in doppelter Weise konstruirt werden: entweder man schneide das Strahlbüschel $B$ durch eine beliebige Transversale, wodurch man drei Schnittpunkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ auf derselben erhält, suche nach a) zu $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$ beliebig viele Elementenpaare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und ziehe $B\mathfrak{x}$, so ist dieses der jedesmal entsprechende Strahl zu $\mathfrak{x}_1$; oder man verbinde einen beliebigen Punkt $B_1$ mit $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1$ durch drei Strahlen $a_1 b_1 c_1$, suche nach b) zu $a b c$ und $a_1 b_1 c_1$ beliebig viele Paare entsprechender Strahlen $x x_1$; der Schnittpunkt von $x_1$ mit $\mathfrak{A}_1$ liefert denjenigen Punkt $\mathfrak{x}_1$, welcher dem Strahle $x$ entsprechend ist.

## § 11. Bedingung für die perspektivische Lage zweier projektivischer Gebilde.

Zwei projektivische Gebilde: ein Strahlbüschel und eine Punktreihe befinden sich dann in perspektivischer Lage, wenn jeder Strahl des Strahlbüschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Punktreihe geht (§ 2) oder jeder Punkt der Punktreihe auf dem ihm entsprechenden Strahl des Strahlbüschels liegt. Dies ist der Fall für jedes Elementenpaar, sobald es nur für irgend drei Paar entsprechender Elemente statt-

findet, weil durch diese drei Paare die ganze projektivische Beziehung bestimmt wird. Hat man daher ein Strahlbüschel und eine mit ihm projektivische Punktreihe in irgendwelcher Lage, so dürfte es höchstens zwei Mal vorkommen, dass Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen; denn käme es drei Mal vor, so müssten sämmtliche Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen und die beiden Gebilde lägen perspektivisch.

Zwei projektivische Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage, wenn die Verbindungsstrahlen sämmtlicher Paare entsprechender Punkte (Projektionsstrahlen) durch einen und denselben Punkt (Projektionspunkt) gehen (§ 10); dies wird auch hier für sämmtliche Paare der Fall sein, sobald es für irgend drei Paare stattfindet, weil durch drei Paare die ganze projektivische Beziehung bestimmt wird. Derjenige Projektionsstrahl, welcher bei der perspektivischen Lage der beiden Punktreihen nach dem Schnittpunkte ihrer Träger hingeht, trifft sie in zwei zusammenliegenden, im Schnittpunkte vereinigten Punkten, welche entsprechende Punkte sind; umgekehrt: wenn im Schnittpunkte der Träger beider Punktreihen zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so wird der sie verbindende Projektionsstrahl seiner Richtung nach unbestimmt oder kann jede Gerade sein, die durch diesen Schnittpunkt geht; suchen wir daher den Schnittpunkt zweier beliebiger anderer Projektionsstrahlen auf und verbinden ihn mit dem Schnittpunkte der Träger, so können wir sagen, dass durch ihn drei Projektionsstrahlen gehen, dass also die beiden Punktreihen perspektivisch liegen; wir können daher für die perspektivische Lage zweier Punktreihen folgende einfachere Bedingung setzen:

I. Wenn zwei projektivische Punktreihen so liegen, dass in dem Schnittpunkte ihrer Träger zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so befinden sie sich in perspektivischer Lage, d. h. die Verbindungslinien sämmtlicher Paare entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt.

In gleicher Weise verhält es sich mit der perspektivischen Lage zweier projektivischer Strahlbüschel; dieselbe findet dann statt, wenn die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen auf derselben Geraden liegen, und dies ist der Fall, sobald drei von diesen Schnittpunkten in einer Geraden liegen; diese

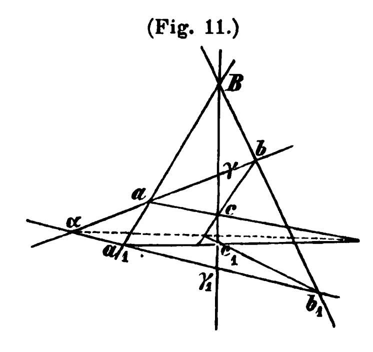
Bedingung wird aber wieder dadurch erfüllt, dass auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, weil deren Schnittpunkt jeder beliebige ihrer Punkte sein kann; die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier beliebiger anderer Strahlenpaare enthält dann also drei solcher Punkte und die Gebilde liegen somit perspektivisch; also:

II. Wenn zwei projektivische Strahlbüschel so liegen, dass auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, so befinden sie sich in perspektivischer Lage, d. h. die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden.

Diese beiden Sätze werden in der Folge die häufigste Anwendung finden; beispielsweise wollen wir ein Paar geometrische Sätze aus ihnen ableiten:

Werden zwei sich in $\alpha$ treffende Gerade von drei durch einen Punkt $B$ gehenden Strahlen in den Punkten $ab\gamma$ und $a_1 b_1 \gamma_1$ getroffen (Fig. 11) und nehmen wir auf $\gamma\gamma_1$ zwei beliebige Punkte $cc_1$ an, so werden, weil die Punkte $\alpha a b \gamma$ und $\alpha a_1 b_1 \gamma_1$ perspektivisch liegen, wenn wir $c$ mit den ersteren und $c_1$ mit den letzteren verbinden, in $c$ und $c_1$ zwei projektivische Strahlbüschel von je vier Strahlen entstehen; diese haben aber, weil $c\gamma$ und $c_1\gamma_1$ zusammenfallen auf $cc_1$ nothwendig perspektivische Lage (I), mithin liegen die drei Schnittpunkte $(ca,\ c_1 a_1)$ $(cb,\ c_1 b_1)$ und $\alpha$ oder $(ab,\ a_1 b_1)$ in einer Geraden d. h.

(Fig. 11.)




Wenn zwei Dreiecke $abc$ und $a_1 b_1 c_1$ so liegen, dass die Verbindungslinien ihrer Ecken $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ durch einen Punkt laufen, dann liegen die Schnittpunkte ihrer korrespondirenden Seiten

$$(ab,\ a_1 b_1)\ (bc,\ b_1 c_1)\ (ca,\ c_1 a_1)$$

auf einer Geraden.

Der in derselben Weise abzuleitende gleichlaufende Satz ist zugleich der umgekehrte von diesem:

Wenn zwei Dreiecke $abc$ und $a_1 b_1 c_1$ so liegen, dass die drei Schnittpunkte ihrer Seiten $(ab,\ a_1 b_1)$ $(bc,\ b_1 c_1)$ und $(ca,\ c_1 a_1)$ auf einer Geraden sich finden, so laufen die Verbindungslinien ihrer korrespondirenden Ecken $aa_1,\ bb_1,\ cc_1$ durch einen Punkt.

Denkt man sich noch ein drittes Dreieck $a_2 b_2 c_2$ so gelegen (perspektivisch), dass $aa_1 a_2,\ bb_1 b_2,\ cc_1 c_2$ in je einer durch den Punkt $B$ gehenden Geraden liegen, so kommt der vorige Satz drei Mal zur Anwendung und die Schnittpunkte korrespondirender Seitenpaare liegen drei Mal zu je dreien auf einer Geraden; diese drei Geraden laufen wieder durch einen Punkt; bezeichnen wir nämlich diese Schnittpunkte in mehr symmetrischer Weise:

$$\begin{array}{lll} (b_1 c_1,\ b_2 c_2) = \alpha & (b_2 c_2,\ bc) = \alpha_1 & (bc,\ b_1 c_1) = \alpha_2 \\ (c_1 a_1,\ c_2 a_2) = \beta & (c_2 a_2,\ ca) = \beta_1 & (ca,\ c_1 a_1) = \beta_2 \\ (a_1 b_1,\ a_2 b_2) = \gamma & (a_2 b_2,\ ab) = \gamma_1 & (ab,\ a_1 b_1) = \gamma_2 \end{array}$$

so liegen nach dem vorigen Satze sowohl $\alpha\beta\gamma$ als auch $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ in je einer Geraden; fassen wir nun die beiden Dreiecke $\alpha\alpha_1\alpha_2$ und $\beta\beta_1\beta_2$ auf, so ergiebt sich aus dem Schema, dass

$$\begin{array}{ll|ll} \alpha\ \alpha_1 & \text{identisch ist mit } b_2 c_2 & \beta\ \beta_1 & \text{identisch mit } c_2 a_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \text{-- -- --}\ b\ c & \beta_1 \beta_2 & \text{-- --}\ c\ a \\ \alpha_2 \alpha & \text{-- -- --}\ b_1 c_1 & \beta_2 \beta & \text{-- --}\ c_1 a_1 \end{array}$$

folglich der Schnittpunkt

$$\begin{array}{ll} (\alpha\ \alpha_1,\ \beta\ \beta_1) & \text{identisch mit } c_2 \\ (\alpha_1 \alpha_2,\ \beta_1 \beta_2) & \text{-- --}\ c \\ (\alpha_2 \alpha\ ,\ \beta_2 \beta\ ) & \text{-- --}\ c_1. \end{array}$$

Da nun $cc_1 c_2$ in einer Geraden liegen, so müssen nach dem vorigen Satze $\alpha\beta,\ \alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2$ sich in einem Punkte treffen. Wir haben daher folgenden Satz:

Wenn auf drei durch einen Punkt $O$ gehenden Strahlen sich die Ecken von drei Dreiecken $abc,\ a_1 b_1 c_1,\ a_2 b_2 c_2$ so gelegen vorfinden, dass $aa_1 a_2,\ bb_1 b_2,\ cc_1 c_2$ in je einem Strahle liegen, dann werden von den Schnittpunkten korrespondirender Seiten:

$$\begin{array}{lll} (b_1 c_1,\ b_2 c_2) = \alpha & (b_2 c_2,\ bc) = \alpha_1 & (bc,\ b_1 c_1) = \alpha_2 \\ (c_1 a_1,\ c_2 a_2) = \beta & (c_2 a_2,\ ca) = \beta_1 & (ca,\ c_1 a_1) = \beta_2 \\ (a_1 b_1,\ a_2 b_2) = \gamma & (a_2 b_2,\ ab) = \gamma_1 & (ab,\ a_1 b_1) = \gamma_2 \end{array}$$

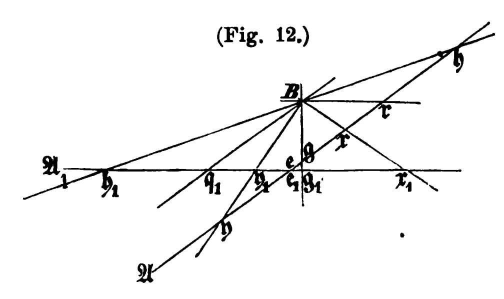
die Punkte: $\alpha\beta\gamma,\ \alpha_1\beta_1\gamma_1,\ \alpha_2\beta_2\gamma_2$ in je einer Geraden liegen und diese drei Geraden durch einen Punkt $Q$ laufen.

Diese Figur liefert ein eigenthümliches Arrangement von 15 Geraden und 20 Punkten in der Art, dass immer 4 von den 20 Punkten auf einer der 15 Geraden liegen und immer 3 von den 15 Geraden durch einen der 20 Punkte laufen. Die 20 Punkte entsprechen sich ferner paarweise in der Art, dass, wenn man von irgend einem ausgeht, die drei durch ihn gehenden Geraden und die auf letzteren gelegenen Ecken dreier Dreiecke aufsucht, die angegebene Konstruktion zu einem bestimmten anderen Punkte des Systems führt, ebenso wie man von $O$ zu $Q$ gelangt.*)

## § 12. Besondere Elemente bei zwei projektivischen Punktreihen. Doppeltes System entsprechender gleicher Strecken.

Unter allen Paaren entsprechender Punkte bei zwei projektivischen Punktreihen giebt es einige von besonderer Eigenthümlichkeit, welche ihrer Bedeutung wegen näher untersucht werden sollen; bei jeder Geraden ist der unendlich entfernte Punkt von besonderem Interesse, weil er seine Eigenthümlichkeit nicht verändert, wenn die Gerade irgendwie ihre Lage verändert (§ 3). Nennen wir bei zwei projektivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ den unendlich entfernten Punkt der einen $\mathfrak{q}$, den der andern $\mathfrak{r}_1$, so werden die ihnen entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{r}$ von besonderer Bedeutung sein. Denken wir uns die beiden Punktreihen in perspektivische Lage gebracht, wodurch die unendlich entfernten Punkte sich nicht ändern, und sei $B$ der Projektionspunkt für die perspektivische Lage (Fig. 12), so treffen die durch $B$ zu den Trägern der beiden Punktreihen gezogenen Parallelen jene in den beiden Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$. Die durch diese Buchstaben $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ sanktionirten ausgezeichneten Punkte heissen daher die **Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen** und sind nichts an-

(Fig. 12.)



*) Auf diese Figur hat zuerst Hesse (im Crelleschen Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 41 Seite 270) aufmerksam gemacht und gezeigt, dass dieselbe bei der Steinerschen Erweiterung des Pascalschen Satzes auftritt (§ 28).

deres als *die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte*; sie bleiben unverändert, wenn die perspektivische Lage aufgehoben wird, weil die unendlich entfernten Punkte selbst $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}_1$ sich nicht ändern. Es könnte scheinen, als ob das bei der perspektivischen Lage in dem Schnittpunkt der beiden Träger vereinigte Paar $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ ein ausgezeichnetes Paar entsprechender Punkte wäre; dies ist aber nicht der Fall, weil es seine Eigenthümlichkeit mit der Aufhebung der perspektivischen Lage verliert und jedes andere Paar entsprechender Punkte vereinigt ebenfalls perspektivische Lage hervorruft. Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ und die besonderen Paare $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$, so ist wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{r}\mathfrak{q}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{q}_1)$$

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1} : \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1};$$

da nun $\mathfrak{q}$ der unendlich entfernte Punkt der ersten Geraden ist und allgemein

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} + 1,$$

so wird für $\mathfrak{y}\mathfrak{q} = \infty$

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{q}}{\mathfrak{y}\mathfrak{q}} = 1, \text{ ebenso } \frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{r}_1} = 1,$$

mithin

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{y}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1},$$

oder

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1;$$

halten wir also ein Paar $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ fest und verändern das andere Paar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, so bleibt dieses Rechteck konstant

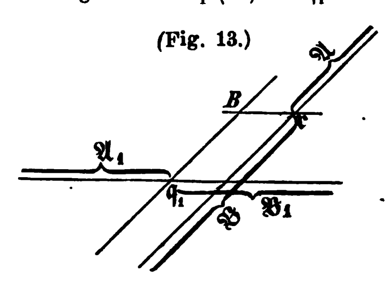
$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \text{const.}$$

und wir sehen das ganze System entsprechender Punkte vermittelst der Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen durch eine viel einfachere Relation mit einander verbunden, als es die Gleichheit der Doppelverhältnisse war, denn es gilt der Satz:

*Bei zwei projektivischen Punktreihen ist das Rechteck aus den Abständen irgend eines Paares entsprechender Punkte von den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen unveränderlich.*

Dieses konstante Rechteck soll „*Potenz der projektivischen Beziehung*“ genannt werden.

Sobald man also zu irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ bestimmen will, wird man nur nöthig haben, die andere Seite eines Rechtecks, dessen eine $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ ist und dessen Inhalt durch die projektivische Beziehung gegeben ist, zu ermitteln und dieselbe von $\mathfrak{q}_1$ auf die andere Gerade $= \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ abzutragen; es entsteht dabei aber noch die Zweideutigkeit, ob diese Strecke nach der einen oder andern Seite hin abzutragen sei oder welcher von den beiden so erhaltenen Endpunkten der wirkliche dem $\mathfrak{x}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ sein wird. Diese Zweideutigkeit wird gehoben durch die Nothwendigkeit der Uebereinstimmung des Richtungssinnes bei zwei projektivischen Punktreihen. Die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ theilen nämlich jeder die beiden Träger in zwei unendlich lange Hälften, welche einzeln einander entsprechen; dies erkennen wir, indem wir von der perspektivischen Lage ausgehend, um den Projektionspunkt $B$ einen veränderlichen Strahl drehen, welcher immer zwei entsprehende Punkte auf den beiden Trägern fixirt (Fig. 13); während also $\mathfrak{x}$ die eine Hälfte $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}$ ($\infty$) durchläuft, muss $\mathfrak{x}_1$ eine bestimmte Hälfte $\mathfrak{A}_1$ des zweiten Trägers von $\mathfrak{r}_1$ ($\infty$) bis $\mathfrak{q}_1$ durchlaufen, und wenn $\mathfrak{x}$ die zweite Hälfte $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{q}$ ($\infty$) bis $\mathfrak{r}$ durchläuft, wird $\mathfrak{x}_1$ die andere entsprechende Hälfte von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{r}_1$ ($\infty$) durchlaufen; diese Hälften aber entsprechen so einander, dass Punkte, die auf der Hälfte $\mathfrak{A}$ liegen, ihre entsprechenden n u r auf der Hälfte $\mathfrak{A}_1$ haben (nicht auf der andern) und Punkte, die auf der Hälfte $\mathfrak{B}$ liegen, ihre entsprechenden nur auf $\mathfrak{B}_1$ haben. Die vorhin aufgetretene Zweideutigkeit ist also gehoben und es bliebe nur noch zu bestimmen, wie die entsprechenden Hälften aus der gegebenen projektivischen Beziehung zu ermitteln seien bei nicht perspektivischer Lage. Die ganze Beziehung ist bestimmt, sobald $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ und irgend ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gegeben sind, denn diese vertreten in der That drei Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, welche bekanntlich die projektivische Beziehung vollständig bestimmen (§ 10); verfolgen wir nun den unzweideutig bestimmten Richtungssinn (§ 4) von $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{q}$ ($\infty$) und nennen diese



(Fig. 13.)

Hälfte $\mathfrak{A}$, so ist dadurch der Richtungssinn von $\mathfrak{r}_1$ $(\infty)$ durch $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{q}_1$ unzweideutig mitbestimmt, also die entsprechende Hälfte $\mathfrak{A}_1$ gefunden; die beiden andern Hälften sind dann natürlich auch entsprechende $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$; oder kürzer, diejenigen Hälften, auf welchen das eine gegebene Paar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ liegt, sind entsprechende.

Das Rechteck mit konstantem Inhalt und veränderlichen Seiten kann insbesondere ein Quadrat werden und die Seite dieses Quadrates auf die entsprechenden Hälften von $\mathfrak{r}$ und von $\mathfrak{q}_1$ aus aufgetragen, liefert zwei besondere Punktenpaare, welche zwar von Steiner keine eigenen Namen empfangen haben, aber durch die Buchstaben

$$\mathfrak{g} \text{ und } \mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{h} \text{ und } \mathfrak{h}_1$$

(Fig. 12) sanktionirt sind; es ist also

$$\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}\mathfrak{r} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{q}_1$$

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2 = (\mathfrak{r}\mathfrak{h})^2.$$

Selbstverständlich behalten die besonderen Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ ihre Eigenthümlichkeit bei Aufhebung der perspektivischen Lage und sind daher ebenso wie $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ ausgezeichnete Elemente; ihre Konstruktion wird in elementarer Weise mittels eines Kreises leicht zu bewerkstelligen sein.

Aus der Eigenschaft des konstanten Rechtecks ergiebt sich für irgend zwei Paar entsprechender Punkte

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1$$

die Proportion

$$\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}}{\mathfrak{r}\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1} \text{ oder } \frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}\mathfrak{y}} = \frac{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1},$$

woraus durch Hinzufügung von 1 auf beiden Seiten folgt

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1}$$

und dies führt zu einem bemerkenswerthen Verhalten von Paaren entsprechender Punkte. Es lassen sich nämlich hiernach solche Paare $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ von Punkten der einer Punktreihe ermitteln, dass die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ eine gleiche Strecke einschliessen, oder kürzer: es lassen sich gleiche entsprechende Strecken auf den Trägern der beiden Punktreihen finden; in der That, damit $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ sei, ist es nur nothwendig, dass

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1\mathfrak{q}_1,$$

also auch

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1$$

sei, d. h. wenn wir eine Strecke von beliebiger Grösse von $\mathfrak{r}$ aus abtragen $= \mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und dieselbe Strecke von $\mathfrak{q}_1$ aus auf dem zweiten Träger $= \mathfrak{q}_1\mathfrak{y}_1$, alsdann zu $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}_1$ die entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}$ bestimmen, so ist die Strecke

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1.$$

Wegen der willkürlichen Grösse der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und der Zweideutigkeit, wonach dieselbe Strecke in entgegengesetzten Richtungen abgetragen werden kann, erhalten wir auf den beiden projektivischen Punktreihen ein doppeltes System entsprechender gleicher Strecken; tragen wir nämlich eine Strecke von beliebiger Länge auf die erste Gerade von $\mathfrak{r}$ aus nach beiden Seiten hin auf

$$\mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{b}$$

und dieselbe Strecke auf die zweite Gerade von $\mathfrak{q}_1$ aus

$$\mathfrak{c}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{r}$$

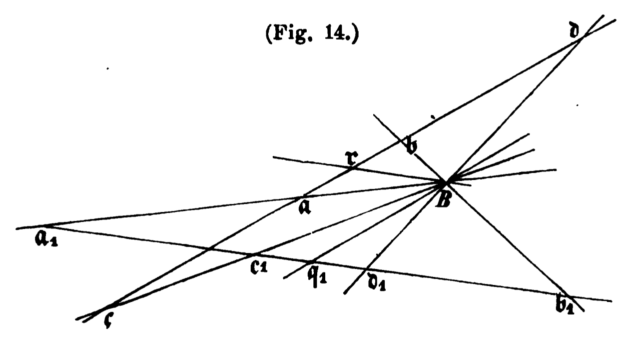
und bestimmen die vier entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, so ist nicht nur

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 \end{cases}$$

sondern auch

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1. \end{cases}$$

(Fig. 14.)




Weil nämlich $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1) = -1$ dies also vier harmonische Punkte sind, da $\mathfrak{q}_1$ die Mitte von $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{r}_1$ im Unendlichen ist (§ 8), so muss auch $(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{q}\mathfrak{r}) = -1$, also, da $\mathfrak{q}$ im Unendlichen liegt, $\mathfrak{r}$ die Mitte von $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ sein; aus gleichem Grunde ist $\mathfrak{q}_1$ die Mitte von $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$; wir haben nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{d} &= \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 \\ \mathfrak{a}\mathfrak{r} \quad &= \mathfrak{d}_1\mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{r}\mathfrak{b} \quad &= \mathfrak{q}_1\mathfrak{c}_1 \\ \hline \mathfrak{c}\mathfrak{b} &= \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \end{aligned}$$

und auf gleiche Weise

$$\mathfrak{d}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1$$

und verändern wir die willkührlich angenommene Länge $\mathfrak{r}\mathfrak{a}$, so erhalten wir das ganze doppelte System entsprechender gleicher Strecken. Fassen wir das gewonnene Resultat zusammen:

Bei zwei projektivischen Punktreihen giebt es zwei Systeme von Paaren entsprechender gleicher Strecken; jedes Paar des **einen** Systems hat seine beiden Endpunkte auf denselben entsprechenden Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ aus); die besonderen Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ repräsentiren zwei gleiche entsprechende Strecken von dem Werthe 0, ebenso $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$; die Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}_1\mathfrak{q}_1$ haben den Werth $\infty$; die entsprechenden gleichen Strecken dieses Systems nehmen also alle Werthe von 0 bis $\infty$ an; jedes Paar des **andern** Systems hat dagegen seine beiden Endpunkte auf entgegengesetzten Hälften der beiden Träger (schliesst also die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ ein) und die entsprechenden Strecken dieses Systems nehmen nur Werthe an zwischen $\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1 = \infty$. Jeder Punkt einer Punktreihe ist ein Endpunkt für zwei Paar entsprechende gleiche Strecken, deren eines dem einen, das andere dem andern Systeme angehört und deren Konstruktion oben angegeben ist.

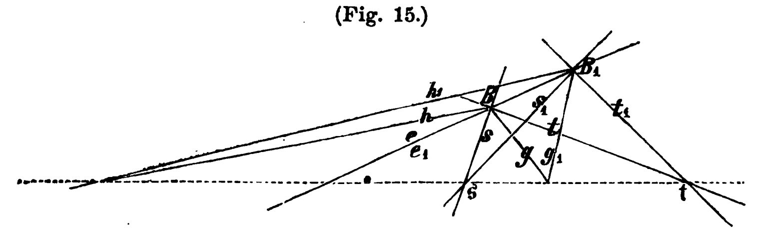
Wir werden später eine wichtige Anwendung hiervon zu machen haben (§ 16).

## § 13. Besondere Elemente bei zwei projektivischen Strahlbüscheln. Doppeltes System entsprechender gleicher Winkel.

Unter den unendlich vielen Paaren entsprechender Strahlen bei zwei projektivischen Strahlbüscheln giebt es einige von besonderem Interesse und von ähnlicher Bedeutung, wie bei zwei projektivischen Punktreihen die Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ (§ 12); das ganze Doppelsystem entsprechender gleicher

Strecken findet sich hier wieder als System entsprechender gleicher Winkel, und so wie dort die unendlichen Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}_1\mathfrak{q}_1$ von besonderer Wichtigkeit sind, so sind es hier die Schenkel entsprechender rechter Winkel; denken wir uns nämlich die beiden projektivischen Strahlbüschel $BB_1$ in perspektivische Lage gebracht, so giebt es im Allgemeinen in dem ersten Strahlbüschel nur zwei besondere zu einander rechtwinkelige Strahlen $s$, $t$ von solcher Beschaffenheit, dass die entsprechenden Strahlen $s_1 t_1$ auch zu einander rechtwinkelig sind; diese heissen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel und können bei der perspektivischen Lage so ermittelt werden, dass wir uns einen Kreis durch $B$ und $B_1$ gelegt denken, welcher den perspektivischen Durchschnitt der beiden Strahlbüschel zum Durchmesser hat, dessen Mittelpunkt also der Punkt sein würde, in welchem die in der Mitte von $BB_1$ auf dieser Verbindungslinie errichtete Senkrechte den perspektivischen Durchschnitt trifft; es giebt daher im Allgemeinen nur einen solchen Kreis (ausser wenn der perspektivische Durchschnitt selbst in der Mitte von $BB_1$ auf dieser Verbindungslinie senkrecht stände). Dieser Kreis trifft den perspektivischen Durchschnitt in zwei Punkten $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$, welche mit $B$ und $B_1$ verbunden diese besonderen Strahlenpaare $ss_1$ und $tt_1$ liefern (Fig. 15). Da diese Eigenschaft der besonderen

(Fig. 15.)



Paare $ss_1$ und $tt_1$ unabhängig von der perspektivischen Lage ist, so giebt es auch bei zwei projektivischen Strahlbüscheln nur ein Paar entsprechende rechte Winkel, deren Schenkel eben durch die Buchstaben $st$ und $s_1 t_1$ bezeichnet werden.

Nehmen wir irgend zwei Paare entsprechender Strahlen $xx_1$ und $yy_1$, so wird sich wegen der besonderen Eigenthümlichkeit der Schenkel entsprechender rechter Winkel die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(stxy) = (s_1 t_1 x_1 y_1)$$

wesentlich vereinfachen

$$\frac{\sin(sx)}{\sin(tx)} : \frac{\sin(sy)}{\sin(ty)} = \frac{\sin(s_1x_1)}{\sin(t_1x_1)} : \frac{\sin(s_1y_1)}{\sin(t_1y_1)}$$

$$(sx) = (st) + (tx) = 90^0 + (tx)$$

$$\frac{\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(tx)} = \frac{\operatorname{tg}(t_1y_1)}{\operatorname{tg}(t_1x_1)} = \frac{\operatorname{tg}(s_1x_1)}{\operatorname{tg}(s_1y_1)} = \frac{\operatorname{tg}(sx)}{\operatorname{tg}(sy)}$$

also

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1x_1) = \operatorname{tg}(ty) \,.\, \operatorname{tg}(s_1y_1).$$

Hieraus folgt, dass, wenn wir das Paar $yy_1$ festhalten und das andere Paar entsprechender Strahlen der projektivischen Beziehung gemäss verändern, das Produkt der Tangenten konstant bleibt

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1x_1) = \text{const.},$$

d. h. bei zwei projektivischen Strahlbüscheln ist das Produkt aus den Tangenten derjenigen Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel ($ts_1$ oder auch $st_1$) bilden, von unveränderlichem Werthe. Dieser Werth ist in dem einen Falle der reciproke von dem im andern Falle, weil

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1x_1) = \frac{1}{\operatorname{tg}(sx) \,.\, \operatorname{tg}(t_1x_1)}.$$

Durch dieses konstante Produkt, welches an Stelle der Gleichheit der Doppelverhältnisse tritt, wird mit Hülfe der Schenkel der entsprechenden rechten Winkel eine einfachere Relation zwischen entsprechenden Strahlen der beiden projektivischen Strahlbüschel hergestellt und es liesse sich leicht eine einfache Konstruktion entsprechender Strahlen daraus ableiten, wenn man noch die Uebereinstimmung des Drehungssinnes berücksichtigte. Ohne hierauf näher einzugehen, bemerken wir nur noch, dass die Faktoren des einen sowohl wie des andern konstanten Produktes einander gleich werden können, das Produkt also in ein Quadrat übergeht und zwar giebt es zwei besondere Strahlenpaare

$$g \text{ und } g_1, \quad h \text{ und } h_1,$$

für welche dieser Fall eintritt:

$$\operatorname{tg}(tx) \,.\, \operatorname{tg}(s_1x_1) = \operatorname{tg}^2(tg) = \operatorname{tg}^2(s_1g_1)$$
$$= \operatorname{tg}^2(th) = \operatorname{tg}^2(s_1h_1).$$

Für diese besonderen Strahlenpaare ist:

$$(sg) = (t_1 g_1) = (hs) = (h_1 t_1)$$
$$(tg) = (s_1 g_1) = (ht) = (h_1 s_1) \quad \text{(Fig. 15).}$$

Endlich giebt es auch bei zwei projektivischen Strahlbüscheln ein doppeltes System von entsprechenden gleichen Winkeln, zu welchen uns eine analoge Betrachtung wie in § 12 führt. Aus der allgemeinen Relation folgt nämlich

$$\frac{\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)} \text{ und hieraus } \frac{\operatorname{tg}(xt) + \operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)} = \frac{\operatorname{tg}(x_1 s_1) + \operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)},$$

also

$$\operatorname{tg}(xy)\left\{\frac{1 - \operatorname{tg}(xt)\cdot\operatorname{tg}(ty)}{\operatorname{tg}(xt)}\right\} = \operatorname{tg}(x_1 y_1)\left\{\frac{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1)\operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(s_1 y_1)}\right\}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(xy)}{\operatorname{tg}(x_1 y_1)} = \frac{\operatorname{tg}(s_1 y_1)}{\operatorname{tg}(xt)} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}(xt)\cdot\operatorname{tg}(ty)}{1 - \operatorname{tg}(x_1 s_1)\cdot\operatorname{tg}(s_1 y_1)}.$$

Sollen nun zwei Strahlen $xy$ des einen Strahlbüschels dieselben Winkel einschliessen, als die entsprechenden $x_1 y_1$ des andern, so muss die linke Seite der letzten Gleichung 1 sein, d. h.

$$\operatorname{tg}(s_1 y_1) - \operatorname{tg}(xt)\cdot\operatorname{tg}(ty)\operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(xt) - \operatorname{tg}(s_1 y_1)\operatorname{tg}(xt)\operatorname{tg}(x_1 s_1),$$

woraus folgt, weil

$$\operatorname{tg}(ty)\cdot\operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(tx)\operatorname{tg}(s_1 x_1)$$

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(s_1 y_1) = \operatorname{tg}(xt) \\ \operatorname{tg}(ty) \ \ = \operatorname{tg}(x_1 s_1)\end{cases} \text{also auch } \begin{cases}\operatorname{tg}(sy) \ \ = \operatorname{tg}(x_1 t_1) \\ \operatorname{tg}(t_1 y_1) = \operatorname{tg}(xs)\end{cases}.$$

Hieraus ergiebt sich nun eine einfache Konstruktion solcher Paare von Strahlen und ihrer entsprechenden, welche gleiche Winkel einschliessen; man trage, nachdem man die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $ss_1\, tt_1$ bestimmt hat, einen Winkel von beliebiger Grösse an den Strahl $s$, sowohl nach einer wie auch nach der andern Drehrichtung hin an und erhält dadurch zwei Strahlen $a$ und $b$, denselben Winkel trage man zweitens an den Strahl $t_1$ nach beiden Seiten an und erhält dadurch $c_1$ und $d_1$; sucht man alsdann die entsprechenden Strahlen $a_1 b_1 c d$ zu jenen vieren, so bilden folgende Paare gleiche Winkel:

$$(1) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases}(ac) = (a_1 c_1) \\ (bd) = (b_1 d_1)\end{cases}$$

$$(2) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases}(bc) = (c_1 b_1) \\ (ad) = (d_1 a_1)\end{cases}.$$

Verändert man die willkührlich angenommene Grösse des anzutragenden Winkels, so liefern (1) und (2) zwei Systeme von

Paaren entsprechender gleicher Winkel, deren eines die Eigenschaft hat, dass beide Schenkel des einen Winkels und ebenso die beiden Schenkel des entsprechenden gleichen Winkels innerhalb desselben Winkelraumes $(st)$ und $(s_1 t_1)$ liegen; $(st)$ und $(s_1 t_1)$ gehören selbst diesem Systeme an; ebenso $(gg)$ und $(g_1 g_1)$, welche den Winkel 0 oder 180° repräsentiren, auch $(hh)$ und $(h_1 h_1)$, während das andere System die Eigenschaft hat, dass die beiden Schenkel eines Winkels und auch die des entsprechenden gleichen Winkels durch die Strahlen $s$ und $t$, anderseits $s_1$ und $t_1$ getrennt werden; in diesem Systeme nimmt kein Paar entsprechender gleicher Winkel den Werth 0 an, vielmehr schwanken die Werthe zwischen

$$(gh) = (h_1 g_1) \text{ und } (st) = (t_1 s_1) = 90^0.$$

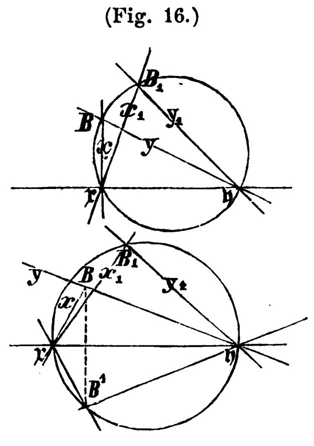
Diese mit den im vorigen Paragraphen abgeleiteten vollständig analogen Resultate ausführlicher zu entwickeln, können wir um so mehr dem Leser überlassen, als wir hier ein zweites sehr einfaches Mittel haben, die beiden Systeme entsprechender gleicher Winkel anzuschauen. Denken wir uns nämlich, was bekanntlich immer auf unendlich viele Arten zulässig ist (§ 11), die beiden projektivischen Strahlbüschel in perspektivische Lage gebracht, so können wir auf dieselbe Weise, wie wir die Schenkel entsprechender rechter Winkel bestimmt haben, überhaupt die Schenkel irgend eines Paares entsprechender gleicher Winkel dadurch ermitteln, dass wir durch die Mittelpunkte $B B_1$ der beiden Strahlbüschel irgend einen Kreis legen, welcher den perspektivischen Durchschnitt in zwei Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ trifft; aus der bekannten Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind, folgt, dass die von $B$ und $B_1$ nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gezogenen Strahlenpaare gleiche Winkel einschliessen

$$(xy) = (x_1 y_1).$$

Verändern wir den durch $B$ und $B_1$ gelegten Kreis, wodurch wir eine Kreisschaar (sämmtliche durch zwei Punkte gehende Kreise) erhalten, so liefert dieselbe ein System von entsprechenden gleichen Winkeln, aber nur eines der beiden Systeme. Das andere System wird durch eine zweite Kreisschaar bestimmt; denken wir uns nämlich aus $B$ ein Perpendikel auf den perspektivischen Durchschnitt gefällt und um sich

selbst bis $B^1$ verlängert, so dass $B^1$ das Spiegelbild von $B$ in Bezug auf den perspektivischen Durchschnitt ist, so wird irgend ein durch $B^1$ und $B_1$ gelegter Kreis den perspektivischen Durchschnitt in zwei solchen Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ treffen, dass $B^1\mathfrak{x}$ und $B^1\mathfrak{y}$ dieselben Winkel mit einander bilden, wie $B_1\mathfrak{x}$ und $B_1\mathfrak{y}$; $B^1\mathfrak{x}$ und $B^1\mathfrak{y}$ bilden aber auch dieselben Winkel mit einander wie $B\mathfrak{x}$ und $B\mathfrak{y}$, folglich ist der Winkel

(Fig. 16.)



$$(y\,x) = (x_1\,y_1) \quad \text{(Fig. 16).}$$

Wir erhalten also, indem wir durch $B^1B_1$ die ganze Kreisschaar legen, das zweite System entsprechender gleicher Winkel. Es ist einleuchtend, dass, wenn wir statt $B_1$ sein Spiegelbild in Bezug auf den perspektivischen Durchschnitt $B^1{}_1$ nehmen, die durch $BB^1{}_1$ gelegte Kreisschaar dasselbe System, die durch $B^1B^1{}_1$ gelegte Kreisschaar aber wieder das erste System liefert. Die eine der beiden Kreisschaaren, welche die Systeme entsprechender gleicher Winkel liefern, hat allemal ihre beiden Schnittpunkte $(BB_1)$ auf derselben Seite vom perspektivischen Durchschnitt, die andere $(B^1B_1)$ aber nothwendig auf entgegensetzten Seiten, so dass unter der einen Kreisschaar zwei (leicht zu ermittelnde) Kreise sich vorfinden, welche den perspektivischen Durchschnitt berühren, unter der andern aber keine solche Berührungskreise vorhanden sind. Die nach den Berührungspunkten hin gehenden entsprechenden Strahlen sind $g$ und $g_1$, $h$ und $h_1$; die ihnen zugehörigen gleichen entsprechenden Winkel haben den Werth Null.

## § 14. Auf einander liegende projektivische Gebilde. Doppelelemente.

Wir haben in § 11 gesehen, dass es bei allgemeiner (nicht perspektivischer) Lage eines Strahlbüschels und einer mit ihm projektivischen Punktreihe nicht drei Mal vorkommen kann, dass Strahlen durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen oder Punkte auf den ihnen entsprechenden Strahlen liegen,

weil dann dieses Zusammenliegen bei allen Elementenpaaren stattfindet oder die Gebilde perspektivisch liegen; ob aber bei allgemeiner Lage weniger als drei (etwa zwei oder eines oder keines) entsprechende Elementenpaare zusammenliegen, ist eine Kardinalfrage für die Theorie, die wir in doppelter Weise auffassen können. Seien $abc\ldots$ die Strahlen des Strahlbüschels $B$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots$ die entsprechenden Punkte der mit ihm projektivischen Punktreihe $\mathfrak{A}_1$, dann wird das Strahlbüschel $B$ den Träger $\mathfrak{A}_1$ selbst, den wir uns noch ein Mal als einen neuen Träger $\mathfrak{A}$ denken können, in einer neuen Punktreihe $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$ treffen und die vorige Frage reducirt sich auf folgende:

*Fallen bei zwei beliebig auf einander liegenden projektivischen Punktreihen entsprechende Punkte zusammen, und wie viel Paare?*

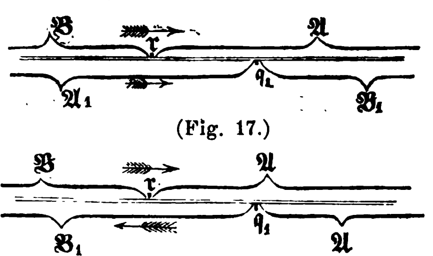
Oder wir können anderseits den Mittelpunkt $B$ mit den Punkten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots$ durch neue Strahlen $a_1b_1\,c_1\ldots$ verbinden und erhalten in $B$ zwei concentrische projektivische Strahlbüschel $B$ und $B_1$; die obige Frage coincidirt daher mit folgender:

*Fallen bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projektivischen Strahlbüscheln entsprechende Strahlen zusammen, und wie viel Paare?*

Es ist einleuchtend, dass mit der einen Frage die andere mit beantwortet wird, und wir wollen uns daher zunächst mit der ersten Frage beschäftigen.

Sind bei zwei gegebenen projektivischen Punktreihen die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ und die entsprechenden Hälften $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ (§ 12, Fig. 13) ermittelt, und denken wir uns die Träger der beiden Punktreihen irgendwie auf einander gelegt, so können zwei Fälle eintreten: entweder fallen Theile entsprechender Hälften zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ über einander oder nicht, d. h. die Abschnitte von $\mathfrak{r}$ bis $\infty$ und $\mathfrak{q}_1$ bis $\infty$ enthalten Theile entsprechender Hälften über einander; diese beiden Fälle lassen sich noch kürzer dadurch von einander unterscheiden, dass in dem ersten Fall der Richtungssinn in beiden Punktreihen derselbe, im zweiten Fall entgegengesetzt ist, was wir leicht erkennen (Fig. 17), wenn wir auf entsprechenden Hälften von $\mathfrak{r}$ nach $\mathfrak{q}$ $(\infty)$ und von $\mathfrak{r}_1$ $(\infty)$ nach $\mathfrak{q}_1$ gehen. Wir nennen daher in dem ersten Falle die Punktreihen *gleichlaufend*, im zweiten Falle *ungleichlaufend* und können, sobald

die beiden auf einander liegenden projektivischen Punktreihen durch irgend drei Paar entsprechende Punkte gegeben sind, sogleich entscheiden, ob sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, indem wir ihren Richtungssinn vergleichen (§ 4). Hieraus folgt, dass, wenn die auf einander liegenden Punktreihen gleichlaufend sind, der Werth der Potenz $(\mathfrak{r}\mathfrak{x} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1)$ negativ sein muss, weil die Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ entgegengesetzten Richtungssinn haben; wenn dagegen die Punktreihen ungleichlaufend sind, der Werth der Potenz positiv ist.



(Fig. 17.)

Ob nun zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, das wird in dem zweiten Fall, wenn die Punktreihen ungleichlaufend sind, sofort zu entscheiden sein; da nämlich nur entsprechende Hälften entsprechende Punkte enthalten, so werden in diesem Fall zusammenfallende entsprechende Punkte nur ausserhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ zu suchen sein; dort müssen sie aber nothwendig vorkommen; denn während ein Punkt $\mathfrak{x}$ der ersten Punktreihe die Hälfte $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}$ $(\infty)$ durchläuft, geht der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf der Hälfte $\mathfrak{A}_1$ in entgegengesetzter Richtung von $\mathfrak{c}_1$ $(\infty)$ bis $\mathfrak{q}_1$ und erst dann, wenn $\mathfrak{x}$ bis ins Unendliche gekommen ist, gelangt $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{q}_1$; sie laufen sich also entgegen und überholen sich, müssen sich mithin nothwendig irgendwo getroffen haben; dasselbe findet statt, wenn wir die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die andern Hälften $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in dem Sinne, welchen die projektivische Beziehung angiebt, durchlaufen lassen; es kommt daher nothwendig zwei Mal (auf jeder der unendlichen Strecken ausserhalb $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ ein Mal) vor, dass entsprechende Punkte zusammenfallen, und von diesen beiden sogenannten Doppelpunkten der auf einander liegenden projektivischen Punktreihen steht der eine so weit von $\mathfrak{r}$ ab, wie der andere von $\mathfrak{q}_1$, wegen der Eigenschaft des konstanten Rechtecks $\mathfrak{r}\mathfrak{x} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$. Es werden sich hieraus die Doppelpunkte in elementarer Weise konstruiren lassen; hat man nämlich die Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ (oder $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$) bestimmt, für welche

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{g}^2,$$

so würde man nur nöthig haben, in $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{q}_1$) eine Senkrechte

auf den zusammen liegenden Trägern der beiden Punktreihen zu errichten, auf dieser zwei Stücke $= \mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\mathfrak{r}$ zu beiden Seiten von $\mathfrak{r}$ abzutragen und durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke einen Kreis zu legen, welcher seinen Mittelpunkt in der Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ hat; dieser Kreis geht durch die Doppelelemente der beiden Punktreihen, wie sich aus bekannten Elementarsätzen ergiebt; denn wäre $\mathfrak{x}$ ein ausserhalb $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ liegender Punkt von solcher Beschaffenheit, dass in ihm zwei entsprechende Punkte über einander lägen, so hätte man zur Bestimmung von $\mathfrak{x}$ die Relationen:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 - \mathfrak{x}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$$
$$\mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{r} = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2,$$

also ein Rechteck zu konstruiren, dessen Inhalt und Differenz der Seiten gegeben sind; ein solches Rechteck lässt sich aber auf die angegebene Weise immer konstruiren, weil, wenn wir die Differenz der Seiten festhalten, durch Veränderung der Seiten selbst dem Inhalte des Rechtecks jeder beliebige Werth zuertheilt werden kann.

Anders verhält es sich im ersten Falle, wenn die auf einander liegenden projektivischen Punktreihen gleichlaufend sind; hier fallen nur auf das Stück zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ Theile entsprechender Hälften über einander; wenn daher zusammenfallende entsprechende Punkte vorkommen, so können sie nur innerhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ enthalten sein. Wenn nun zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ ein Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ über einander fiele, etwa in den Punkt $\mathfrak{x}$, so müsste sein:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} + \mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2;$$

wir hätten also zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{x}$ ein Rechteck zu konstruiren, für welches der Inhalt und die Summe der Seiten gegeben sind. Wenn aber die Summe der Seiten gegeben ist, so kann man aus ihr **nicht** Rechtecke von jedem beliebigen Inhalt machen, sondern der Inhalt des grössesten Rechtecks, welches man herstellen kann, ist der des Quadrates, dessen Seite gleich der Hälfte der gegebenen Summe ist*); wenn daher der

*) Anmerkung. Um uns in elementarer Weise davon zu überzeugen, dass unter allen Rechtecken, welche dieselbe Summe der Seiten haben, das Quadrat den grössesten Inhalt besitzt, können wir folgendermassen verfahren:

Abstand der Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ kleiner ist als die doppelte Seite des Quadrates, d. h. $2 . \mathfrak{r}\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$, so giebt es kein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, oder wenn

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{g}\mathfrak{h} \text{ (oder } \mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\text{)},$$

so giebt es keine Doppelpunkte; wenn dagegen

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 > \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so giebt es ein Rechteck von der verlangten Beschaffenheit, dessen Seiten von $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{q}_1$ aus zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ abgetragen, zwei solche Endpunkte liefern, in deren jedem zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen über einander liegen; es giebt also in diesem Fall wieder zwei Doppelpunkte; ist insbesondere

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

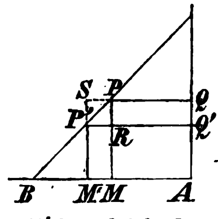
so wird das konstruirte Rechteck selbst ein Quadrat; die beiden zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ liegenden Doppelpunkte, von denen der eine so weit von $\mathfrak{r}$ wie der andere von $\mathfrak{q}_1$ absteht, fallen zusammen; es giebt also in diesem Grenzfalle nur einen Doppelpunkt oder vielmehr zwei zusammenfallende.

Auch in diesem Falle zweier gleichlaufenden projektivischen Punktreihen können die Doppelpunkte durch elementare Konstruktion gefunden werden: Man beschreibe über $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ als Durchmesser einen Kreis und trage in $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{q}_1$) auf der Tangente dieses Kreises nach beiden Seiten hin Stücke

$$= \mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\mathfrak{r} \text{ (oder } \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1\mathfrak{q}_1\text{)}$$

ab; die durch die Endpunkte der abgetragenen Stücke zu dem Träger der Punktreihen gezogenen Parallelen treffen den Kreis in solchen Punkten, dass die von ihnen auf den Träger herabge-

---




Sei $AB$ die gegebene Summe der Seiten und $M$ die Mitte von $AB$; ferner $AMPQ$ das Quadrat über der Seite $AM$; ziehen wir $BP$ und fällen aus irgend einem Punkte $P'$ dieser Linie die Perpendikel $P'M'$ und $P'Q'$ auf $AM$ und $AQ$, so hat das Rechteck $AM'P'Q'$ offenbar dieselbe Summe der Seiten; es ist aber, wenn sich $M'P'$ und $PQ$ in $S$, $P'Q'$ und $PM$ in $R$ treffen, das Rechteck $MM'SP$ gleich dem Rechteck $PQQ'R$ (kongruent), folglich $MM'P'R$ kleiner als $PQQ'R$, mithin das Rechteck $AM'P'Q'$ kleiner als das Quadrat $AMPQ$; da dasselbe von jedem andern in gleicher Weise konstruirten Rechteck gilt, so ist das Quadrat das grösseste unter allen Rechtecken von gleichem Umfang.

lassenen Perpendikel zu Fusspunkten die gesuchten Doppelpunkte haben. Diese Konstruktion, deren Richtigkeit einleuchtet, enthält auch das vorhin angegebene Kriterium, ob die Doppelpunkte reell vorhanden sind oder nicht; wenn nämlich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} < \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ (der Radius des Kreises), so schneidet die Parallele den Kreis in zwei reellen Punkten, es giebt also Doppelpunkte; wenn dagegen $\mathfrak{r}\mathfrak{g} > \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, so trifft die Parallele den Kreis nicht, es giebt also keine Doppelpunkte; wenn endlich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, so berührt die Parallele den Kreis, also es giebt nur einen Doppelpunkt.

Das gewonnene Resultat lässt sich, wie folgt, zusammenfassen:

Bei zwei auf einander liegenden projektivischen Punktreihen giebt es im Allgemeinen zwei Mal zwei zusammenfallende entsprechende Punkte (Doppelpunkte); diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Punktreihen ungleichlaufend sind, und liegen ausserhalb des Abstandes der Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ symmetrisch zu diesen; sind dagegen die Pnnktreihen gleichlaufend, so sind die Doppelpunkte nur dann reell vorhanden, wenn der Abstand

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 > \mathfrak{g}\mathfrak{h} \text{ (oder } \mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\text{)},$$

und liegen zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ symmetrisch zu diesen Punkten; ist

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so giebt es nur einen Doppelpunkt (oder vielmehr: die beiden Doppelpunkte fallen selbst zusammen); dieser liegt in der Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ und enthält als zusammenfallende Punkte eines der besonderen Paare $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$; ist endlich

$$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 < \mathfrak{g}\mathfrak{h},$$

so liegt kein Paar entsprechender Punkte zusammen (oder, wie man sich ausdrückt, die beiden Doppelpunkte sind imaginär).

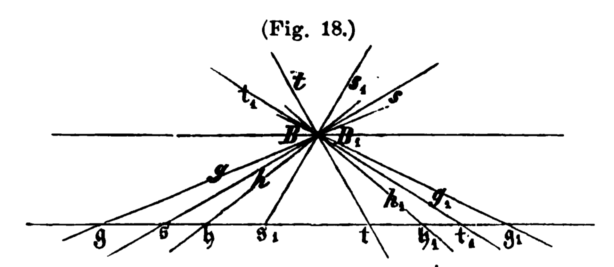
Sind die Punktreihen gleichlaufend und wir bestimmen die ausgezeichneten Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$, so werden bei dem Aufeinanderliegen der Punktreihen Doppelelemente nur dann vorhanden sein, wenn die Strecken $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ sich in keinem ihrer Theile decken (ganz ausser einander liegen); sobald $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$

ein Stück gemeinschaftlich haben, giebt es keine Doppelpunkte; den Uebergang bildet der Fall, wenn diese Strecken mit ihren Endpunkten entweder mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder mit $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$ an einander stossen; hieraus können wir, wenn wir die in sich festgehaltenen Punktreihen auf einander verschieben, den Spielraum erkennen, innerhalb dessen keine Doppelelemente vorhanden sind.

Es wäre nun übrig, die analoge Untersuchung für zwei auf einander liegende (concentrische) projektivische Strahlbüschel auf demselben Wege durchzuführen; statt dessen können wir das Resultat dieser an sich nicht schwierigeren Untersuchung sofort aus dem vorhin erlangten ableiten und ziehen diesen kürzeren Weg vor. Schneiden wir nämlich die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine beliebige Transversale, welche wir uns doppelt denken als den Träger zweier Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, deren eine durch das eine, die andere durch das andere Strahlbüschel fixirt wird, so haben wir die beiden concentrischen Strahlbüschel in perspektivischer Lage mit zwei auf einander liegenden Punktreihen; durch die Doppelpunkte der letzteren gehen offenbar die Doppelstrahlen der ersteren; die Konstruktion jener liefert also auch diese; sind die beiden ausgeschnittenen Punktreihen gleichlaufend hinsichtlich ihres Richtungssinnes, so sind es auch die beiden Strahlbüschel hinsichtlich ihres Drehungssinnes; sind jene aber ungleichlaufend, so sind es auch die Strahlbüschel; wir haben daher aus dem Vorigen zunächst das Resultat: Bei zwei auf einander liegenden projektivischen Strahlbüscheln giebt es, wenn sie ungleichlaufend sind, immer zwei Mal zwei reelle zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen); sind dagegen die beiden Strahlbüschel gleichlaufend, so können wir das dem obigen analoge Kriterium, wann Doppelstrahlen vorhanden sind, dadurch ableiten, dass wir die beiden concentrischen Strahlbüschel durch eine besondere Transversale schneiden, welche parallel läuft einer der beiden Richtungen, die den Winkel $(s\,t_1)$, also auch $(t\,s_1)$ halbiren; diese Transversale besitzt nämlich die Eigenschaft, dass die beiden auf ihr ausgeschnittenen projektivischen Punktreihen ihre besonderen Punkte $\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}_1$ gerade in denjenigen Punkten haben, durch welche die besonderen Strahlen $g\,g_1\,h\,h_1$ der beiden concentrischen Strahlbüschel gehen, so dass dann also das obige von den Punkten $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{h}_1$ abhängige Kriterium sich direkt übertragen lässt. In der That, bei der angegebenen

Lage der Transversale werden die Strahlen $gh$, deren Winkel durch die Strahlen $st$ halbirt werden, und die Strahlen $h_1 g_1$, deren Winkel durch $t_1 s_1$ halbirt werden, mit der Transversale paarweise gleiche Winkel bilden und mit Rücksicht darauf, dass die Strahlbüschel $BB_1$ gleichlaufend sind, so liegen, wie sie Fig. 18 dar-

(Fig. 18.)



stellt. Für irgend zwei entsprechende Strahlen $xx_1$ gilt nun die Relation

$$\text{tg}\,(sx)\,.\,\text{tg}\,(x_1 t_1) = \text{tg}^2\,(sg),$$

und hieraus wird der Winkel $(x_1 t_1)$ leicht bestimmt durch $(sx)$, wenn man die (§ 8, 3) für harmonische Strahlen gefundene ganz gleich lautende Relation in Betracht zieht; bestimmt man nämlich zu $gh$ und $x$ den vierten harmonischen, dem $x$ zugeordneten Strahl $\xi$, so ist $(s\xi) = (x_1 t_1)$; was nun die Lage von $x_1$ anbetrifft, so erkennen wir mit Rücksicht auf die entsprechenden Quadranten zwischen den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel, dass $x_1$ und $\xi$ mit der Transversale ein gleichschenkliges Dreieck bilden müssen; wir können jetzt zu irgend einem Strahl $x$ den entsprechenden $x_1$ in der einfachen Weise ermitteln, dass wir zuerst $x$ in die symmetrische Lage zur Transversale uns gebracht denken nach $\xi_1$, d. h. so dass $x$ dieselben Winkel mit der Transversale bildet wie $\xi_1$, und dann zu $g_1 h_1 \xi_1$ den vierten harmonischen, dem $\xi_1$ zugeordneten Strahl bestimmen, welcher $x_1$ sein wird. Wenn nun die Strahlen $gh \ldots x$ und $g_1 h_1 \ldots x_1$ der beiden concentrischen Strahlbüschel $BB_1$ die Transversale in den Punkten $\mathfrak{g}\mathfrak{h} \ldots \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1 \ldots \mathfrak{x}_1$ zweier auf einander liegender Punktreihen begegnen, und die Mitte zwischen $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{r}$, die Mitte zwischen $\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ bezeichnet wird, so erhalten wir den entsprechenden Strahl zu $B\mathfrak{r}$, indem wir zu $g_1 h_1$ und $B\mathfrak{q}_1$ den vierten harmonischen suchen; dieser ist aber nach § 8 der Parallelstrahl, folglich ist $\mathfrak{r}$ in der That der dem unendlich entfern-

ten $\mathfrak{r}_1$ ($\infty$) entsprechende, ebenso $\mathfrak{q}_1$ der dem unendlich entfernten $\mathfrak{q}$ ($\infty$) der anderen Punktreihe entsprechende; aus der vorigen Konstruktion entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ und der bekannten Eigenschaft harmonischer Punkte (§ 8) ergiebt sich ferner

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{r}\mathfrak{g})^2 = (\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1)^2,$$

woraus dann folgt, dass in der That die mit $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1$ bezeichneten Punkte jene ausgezeichneten Punkte sind, welche diese Namen führen (§ 12).

Nunmehr sind wir berechtigt, das vorhin für zwei auf einander liegende projektivische Punktreihen ausgesprochene Resultat auf zwei concentrische projektivische Strahlbüschel folgendermassen zu übertragen:

Bei zwei auf einander liegenden (concentrischen) projektivischen Strahlbüscheln giebt es im Allgemeinen zwei Mal zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen); diese sind immer reell vorhanden, wenn die beiden Strahlbüschel ungleichlaufend sind; sind sie dagegen gleichlaufend, so werden die beiden Doppelstrahlen nur dann vorhanden sein, wenn die besonderen Strahlen $gh$ durch die Strahlen $h_1g_1$ nicht getrennt werden; werden dagegen $gh$ durch $h_1g_1$ getrennt (d. h. fällt $g_1$ in einen Winkelraum zwischen $(gh)$ und $h_1$ in den Nebenwinkelraum), so giebt es keine reellen Doppelstrahlen; den Uebergang bildet der Fall, wenn die Winkel $(gh)$ und $(h_1g_1)$ an einander stossen, so dass entweder $gg_1$ oder $hh_1$ zusammenfallen; in diesem Falle giebt es nur einen Doppelstrahl (d. h. die beiden Doppelstrahlen fallen selbst zusammen).

## § 15. Konstruktion der Doppelelemente mittels eines festen Kreises.

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Konstruktionen der Doppelpunkte und darnach auch der Doppelstrahlen setzen die Kenntniss der besonderen Elemente $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ voraus; es giebt aber eine andere viel einfachere Auflösung der Aufgabe:

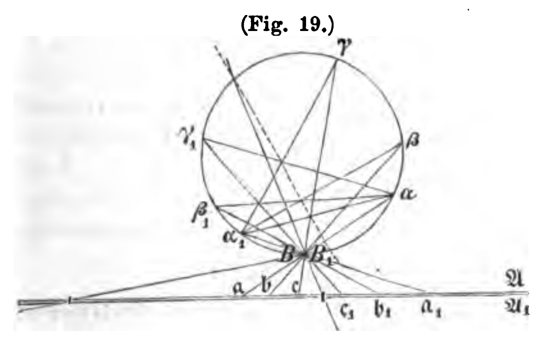
Wenn zwei auf einander liegende projektivische Punktreihen durch irgend drei Paar entsprechende

Elemente $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ gegeben sind, die Doppelpunkte zu finden, wobei nur das Lineal und ein fester in der Ebene als gezeichnet angenommener Kreis benutzt wird.

Diese von Steiner angegebene Konstruktion beruht auf der elementaren Eigenschaft des Kreises, dass Peripheriewinkel auf gleichem Bogen gleich sind. Verbinden wir irgend zwei Punkte $BB_1$ einer Kreisperipherie mit zwei andern Punkten derselben $\alpha\beta$ durch die Strahlen $ab$ und $a_1 b_1$, so ist entweder der Winkel $(ab)$ gleich dem Winkel $(a_1 b_1)$ oder gleich seinem Nebenwinkel; jedenfalls also $\sin(ab) = \sin(a_1 b_1)$; lassen wir jetzt einen veränderlichen Punkt $\xi$ die Kreisperipherie durchlaufen und verbinden ihn mit $B$ und $B_1$ durch die Strahlen $xx_1$, so beschreiben dieselben zwei projektivische Strahlbüschel, weil die Doppelverhältnisse zwischen irgend vier Strahlen des einen und den entsprechenden des andern Strahlbüschels offenbar gleich sind (da die Faktoren dieser Doppelverhältnisse einzeln einander gleich sind).

Haben wir nun auf den zusammen liegenden Trägern zweier Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ willkührlich angenommen und ist irgend ein Kreis in der Ebene gezeichnet, so verbinden wir einen beliebigen Peripheriepunkt desselben, den wir uns doppelt denken als den Mittelpunkt zweier Strahlbüschel $BB_1$, mit den Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ durch Strahlen $abc\ a_1 b_1 c_1$, welche die Peripherie des Kreises resp. in $\alpha\beta\gamma\ \alpha_1\beta_1\gamma_1$ treffen (Fig. 19). Bewegen wir nun zwei entsprechende Punkte

(Fig. 19.)




$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der durch die angenommenen drei Paar Elemente vollständig bestimmten projektivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, so beschreiben $xx_1$, ihre Verbindungsstrahlen mit $BB_1$, zwei koncentrische projektivische Strahlbüschel und $\xi\xi_1$, die Schnittpunkte mit der Kreisperi-

pherie zwei krumme projektivische Punktreihen; so oft nun zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ zusammenfallen, müssen auch zwei entsprechende Strahlen $xx_1$ zusammenfallen und folglich auch zwei entsprechende Punkte $\xi\xi_1$ und umgekehrt. Nehmen wir nun irgend ein Punktenpaar $\alpha\alpha_1$ auf dem Kreise und verbinden $\alpha$ mit $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots \xi_1$, anderseits $\alpha_1$ mit $\alpha\beta\gamma \ldots \xi$, so müssen die um $\alpha$ und $\alpha_1$ als Mittelpunkte erhaltenen Strahlbüschel auch projektivisch sein, denn das Strahlbüschel $(\alpha)$ ist mit dem Strahlbüschel $(B_1)$ projektivisch wegen der oben angegebenen Eigenschaft des Kreises, ebenso $(\alpha_1)$ mit $(B)$; da nun $(B)$ und $(B_1)$ projektivisch sind, so sind es auch (§ 10) $(\alpha)$ und $(\alpha_1)$; diese beiden Strahlbüschel haben aber in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallend: folglich liegen sie perspektivisch (§ 11), also die Schnittpunkte sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen auf einer Geraden (ihrem perspektivischen Durchschnitt); dieser Ort des Schnittpunktes $(\alpha\xi_1, \alpha_1\xi)$ ist schon bestimmt durch die beiden Schnittpunkte

$$(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta) \text{ und } (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma);$$

jeder Punkt dieser Geraden mit $\alpha$ und $\alpha_1$ verbunden liefert zwei Strahlen, welche den Kreis in zwei entsprechenden Punkten $\xi\xi_1$ treffen; diese Gerade wird daher selbst den Kreis in solchen zwei Punkten treffen, in deren jeden zwei entsprechende Punkte $\xi\xi_1$ zusammenfallen; diese Punkte mit $B$ $(B_1)$ verbunden bestimmen auf $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ die gesuchten Doppelpunkte, deren Konstruktion sich also in folgender einfachen Weise gestaltet:

Man verbinde die gegebenen Punktenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ mit irgend einem Peripheriepunkte $B(B_1)$ eines festen Kreises durch Strahlen, welche die Peripherie zum zweiten Male in $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ $\gamma\gamma_1$ treffen, bestimme die Schnittpunkte:

$$(\alpha\beta_1, \alpha_1\beta) \quad (\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$$

und ihre Verbindungslinie $\mathfrak{L}$; die Schnittpunkte der letzteren mit dem Kreise verbinde man mit $B$ durch Strahlen, welche die Träger der gegebenen auf einander liegenden Punktreihen in den gesuchten Doppelpunkten treffen.

Da die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten

trifft, so giebt es im Allgemeinen zwei Doppelpunkte; geht die Gerade $\mathfrak{L}$ aber vorbei, ohne den Kreis zu treffen, so giebt es keine Doppelpunkte; berührt sie den Kreis, so giebt es nur einen Doppelpunkt (zwei zusammenfallende). Das Resultat des § 14 findet sich also durch diese Konstruktion bestätigt und es würde nicht schwer sein, die dort gefundenen Kriterien aus ihr von Neuem herzuleiten. Wir unterlassen dies, ebenso wie die Auflösung der analogen Aufgabe, die Doppelstrahlen zweier concentrischer projektivischer Strahlbüschel zu finden, da diese auf die vorige zurückgeführt werden kann.

Anmerkung. Die Gerade $\mathfrak{L}$ muss auch durch den Punkt $(\beta\gamma_1, \gamma\beta_1)$ gehen, was wir daraus erkennen, dass nothwendig dieselben Doppelpunkte, also auch dieselbe Gerade $\mathfrak{L}$ hervorgehen würde, wenn wir bei der Konstruktion anstatt des Paares $\alpha\alpha_1$ das Paar $\beta\beta_1$ gesetzt hätten. Wir gelangen daher beiläufig zu einem interessanten Satz vom Kreise:

Hat man irgend sechs Punkte eines Kreises $\alpha\beta\gamma$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, so liegen die drei Schnittpunkte

$$(\alpha\beta_1, \beta\alpha_1) \quad (\beta\gamma_1, \gamma\beta_1) \quad (\gamma\alpha_1, \alpha\gamma_1)$$

auf einer Geraden.

Dieser Satz, dessen allgemeine Gültigkeit für jeden Kegelschnitt wir später darthun werden, lässt sich auch so aussprechen, wie ihn Pascal gefunden hat:

Verbindet man irgend sechs Punkte eines Kreises zu einem einfachen Sechseck in der Reihenfolge: $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$, so treffen sich die gegenüberliegenden Seiten desselben (die erste und vierte, zweite und fünfte, dritte und sechste) in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen. —

Wenn bei zwei auf einander liegenden projektivischen Punktreihen ein Doppelpunkt bekannt ist, so bedarf es nicht mehr der vorigen Konstruktion mit Hülfe des festen Kreises, um den andern Doppelpunkt zu finden, der dann nothwendig immer reell vorhanden ist, sondern dieser lässt sich mittels des Lineals allein konstruiren auf folgende Art:

Sei $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der bekannte Doppelpunkt der beiden projektivischen auf einander liegenden Punktreihen und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte, wodurch die ganze projektivische

Beziehung bestinmt ist, so ziehe man durch $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ einen beliebigen Strahl und nehme in demselben irgend zwei Punkte $BB_1$ willkührlich an; die Schnittpunkte $(B\mathfrak{a}, B_1\mathfrak{a}_1)$ und $(B\mathfrak{b}, B_1\mathfrak{b}_1)$ verbunden, bestimmen eine Gerade, welche den Träger der beiden zusammenliegenden Punktreihen in dem gesuchten zweiten Doppelpunkte trifft. Die Richtigkeit dieser Konstruktion erhellt aus § 10, a).

## § 16. Punktsystem (Involution von Punktenpaaren).

Es giebt einen ausgezeichneten speciellen Fall zweier auf einander liegender projektivischer Punktreihen, welcher in der Folge eine besondere Wichtigkeit erlangt; dieser besteht darin, dass der Abstand der beiden Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ Null wird, oder dass die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zusammenfallen. Wenn zwei projektivische Punktreihen so auf einander liegen, dass, die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ über einander fallen, so fallen sämmtliche entsprechende gleiche Strecken des einen oder des andern Systems (§ 12) verkehrt auf einander, so dass wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ zwei entsprechende gleiche Strecken sind, $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{y}_1$ und zugleich $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}_1$ fällt, und zwar wird das eine oder das andere System entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen, je nachdem die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sind, d. h. je nachdem entsprechende Hälften über einander liegen: $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}_1$ (dann sind die Punktreihen ungleichlaufend Fig. 16), oder nicht entsprechende Hälften: $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}_1$ (dann sind die Punktreihen gleichlaufend); in dem ersten Falle existiren zwei Doppelpunkte; es fallen nämlich die Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ über einander und die Punkte $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$; im zweiten Falle existiren keine Doppelpunkte nach dem obigen Kriterium (§ 14); es fällt insbesondere $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{g}_1$.

Es findet aber auch das Umgekehrte statt: W e n n b e i z w e i a u f e i n a n d e r l i e g e n d e n p r o j e k t i v i s c h e n P u n k t r e i h e n i r g e n d e i n P a a r e n t s p r e c h e n d e r g l e i c h e r S t r e c k e n v e r k e h r t a u f e i n a n d e r f a l l e n: $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ a u f $\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1$, s o f a l l e n s ä m m t l i c h e e n t s p r e c h e n d e g l e i c h e S t r e c k e n d e s j e n i g e n S y s t e m s, w e l c h e m j e n e s P a a r a n g e h ö r t, v e r k e h r t a u f e i n a n d e r, i n s b e s o n d e r e a u c h $\mathfrak{r}$ a u f $\mathfrak{q}_1$.

In der That, denken wir uns (Fig. 20) in den beiden auf einander liegenden Trägern der Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ so liegend, dass $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}_1$ liegt, und nehmen

wir ein beliebiges drittes Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ (wodurch die projektivische Beziehung vollständig bestimmt wird)

(Fig. 20.)

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{z}$ $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ $\mathfrak{t}$
$\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{y}_1$ $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{z}_1$

an, so wird der Punkt $\mathfrak{z}$ der ersten Punktreihe auf einem gewissen Punkte $\mathfrak{t}_1$ der zweiten liegen und der ihm entsprechende Punkt $\mathfrak{t}$ der ersten Punktreihe wird bestimmt durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1).$$

Nun ist aber identisch, § 6, 1)

$$(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1) = (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1)$$

also

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1)$$

und, wenn wir für $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{t}_1$ die darüber stehenden Namen derselben Punkte setzen, $= (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1)$; da also

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1)$$

wird, so muss $\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{z}_1$ zusammenfallen, d. h. die Strecke $\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ fällt verkehrt auf die ihr gleiche entsprechende Strecke $\mathfrak{t}_1\mathfrak{z}_1$; dies gilt hiernach von sämmtlichen Paaren entsprechender gleicher Strecken; weil insbesondere die beiden unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{q}$ der beiden Punktreihen über einander fallen, so müssen auch die ihnen entsprechenden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ über einander fallen.

Ein solches Doppelgebilde zweier in der eigenthümlichen Weise auf einander liegenden projektivischen Punktreihen, dass die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf einander fallen nnd zugleich das eine ganze System entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander liegt, heisst ein **Punktsystem** (oder nach der von **Désargues** eingeführten Bezeichnung eine **Involution** von Punktenpaaren) und die Endpunkte eines solchen Paares auf einander fallender gleicher Strecken **ein Paar konjugirter Punkte** des Punktsystems, der dem unendlich entfernten Punkte konjugirte Punkt, in welchem $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ über einander liegen, der **Mittelpunkt** des Punktsystems; wenn die das Punktsystem erzeugenden Punktreihen gleichlaufend sind, so heisst das Punktsystem ein **elliptisches**; es liegt dann ein Paar konjugirter Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkte, und bezeichnen wir mit $o$ den Mittelpunkt, mit $x\xi$ irgend ein Paar konjugirter

Punkte, so werden sämmtliche Paare konjugirter Punkte durch die Relation zusammengehalten

$$ox \,.\, o\xi = \text{const.}$$

denn $x$ und $\xi$ treten an die Stelle zweier entsprechender Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ der beiden projektivischen Punktreihen und in $o$ liegen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ vereinigt, also gilt die bekannte Relation $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \text{const}$ (§ 12); Doppelpunkte können in diesem Fall nicht vorkommen, wohl aber zeichnet sich ein Paar konjugirter Punkte vor den andern aus, dasjenige nämlich, welches gleich weit vom Mittelpunkte nach entgegengesetzten Richtungen hin absteht, für welches also das konstante Rechteck ein Quadrat wird; es sind dies offenbar die Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}$, indem $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{g}_1$ auf $\mathfrak{h}$ fällt; dieses besondere Paar könnte man die „gleich weit abstehenden“ konjugirten Punkte des elliptischen Punktsystems nennen.

Wenn dagegen die das Punktsystem erzeugenden Punktreihen ungleichlaufend sind, also das andere System entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fällt, so heisst das Punktsystem ein hyperbolisches; es liegt ein Paar konjugirter Punkte immer auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus und sämmtliche Paare konjugirter Punkte werden wiederum durch die Relation zusammengehalten

$$ox \,.\, o\xi = \text{const.};$$

es fallen insbesondere zwei Mal zwei konjugirte Punkte zusammen (wenn nämlich das konstante Rechteck, welches die Potenz des Punktsystems genannt wird, ein Quadrat wird); dies geschieht für die Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ auf der einen Seite von $o$ und für $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ auf der andern Seite; diese besonderen zusammenfallenden Punktenpaare des Punktsystems heissen die Doppelpunkte oder Asymptotenpunkte des Punktsystems, welche nur beim hyperbolischen Punktsystem auftreten; sie liegen nach entgegengesetzten Seiten in gleichem Abstande von $o$. Bezeichnen wir sie mit $g$ und $h$, so drückt die Relation

$$ox \,.\, o\xi = (og)^2 = (oh)^2$$

zugleich ein merkwürdiges Verhalten sämmtlicher Paare konjugirter Punkte zu den Asymptotenpunkten des Punktsystems aus, indem $x\xi$ ein Paar zugeordnete harmonische Punkte zu $g$ und $h$ sind (§ 8, III), also:

Sämmtliche Paare konjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems sind zugeordnete harmoni-

sche Punkte zu den beiden Asymptotenpunkten desselben, und auch umgekehrt: Sämmtliche Paare zugeordneter harmonischer Punkte zu zwei festen Punkten einer Geraden bilden ein hyperbolisches Punktsystem, dessen beide Asymptotenpunkte die beiden festen Punkte sind. Beim elliptischen Punktsystem findet dieses Verhalten nicht statt trotz der Eigenschaft des konstanten Rechtecks, weil dort zwei konjugirte Punkte $x\xi$ immer auf entgegengesetzten Seiten von $o$ liegen und die angezogene Eigenschaft harmonischer Punkte die Bedingung involvirt, dass zwei zugeordnete Punkte auf derselben Seite von dem Mittelpunkt zwischen den beiden andern zugeordneten Punkten gelegen sind. Es mag hier noch ein besonderer Fall des Punktsystems erwähnt werden, welcher den Uebergang zwischen dem elliptischen und hyperbolischen Punktsystem bildet und daher das parabolische Punktsystem heisst; dieser tritt dann auf, wenn die beiden Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems zusammenfallen; alsdann fallen die allen Punkten des Trägers konjugirten Punkte im Punktsystem in denselben einzigen Punkt hinein, in welchem die beiden Asymptotenpunkte vereinigt sind, weil (§ 8), wenn von vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete zusammenfallen, auch einer des andern Paares zugeordneter Punkte in diesen hineinfallen muss. Wir haben also das einseitige Verhalten beim parabolischen Punktsystem, dass die allen Punkten konjugirten Punkte in einem einzigen vereinigt sind und zu diesem wiederum jeder beliebige Punkt des Trägers als konjugirt angesehen werden muss.

Rücksichtlich der Potenz des Punktsystems ist noch zu bemerken, dass für das elliptische Punktsystem die Potenz eine negative, für das hyperbolische eine positive Grösse ist, weil im ersten Fall je zwei konjugirte Punkte auf entgegengesetzter, im letzteren auf derselben Seite vom Mittelpunkt liegen; für das parabolische Punktsystem ist die Potenz Null.

Wegen des häufigen Auftretens von Punktsystemen bei geometrischen Untersuchungen heben wir die Grundeigenschaft eines solchen Doppelgebildes, dass es nämlich in sich projektivisch ist, noch besonders hervor:

Wenn wir bei einem Punktsystem von Punktenpaaren, aus jedem Paare einen nehmen und diese als eine Reihe auffassen $abc\ldots$, so bilden die konjugirten

Punkte $\alpha\beta\gamma$... eine mit der ersten Reihe projektivische Punktreihe und die beiden Punktreihen liegen in der oben angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander. Es ist einleuchtend, dass wir dabei die konjugirten Punkte eines Paares mit einander vertauschen können, ohne die projektivische Beziehung zu alteriren, denn da die Endpunkte eines solchen Paares $\mathfrak{x}$ ($\mathfrak{y}_1$) und $\mathfrak{x}_1$ ($\mathfrak{y}$) sind, so können wir es sowohl als $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auffassen, wie auch als $\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}$. Es folgt ferner, dass Punktsysteme dieselbe allgemeine Eigenschaft der Projektivität besitzen, wie einfache Punktreihen selbst, d. h. wenn wir ein Punktsystem $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ ... mit irgend einem Punkte $B$ durch Strahlenpaare verbinden, welche eine beliebige andere Transversale in den neuen Punktenpaaren $a^1\alpha^1$, $b^1\beta^1$, $c^1\gamma^1$ ... treffen, so bilden diese ebenfalls ein Punktsystem; denn es bilden $a^1b^1c^1$ ... und $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ ... zwei projektivische Punktreihen, welche sich in der eigenthümlichen Lage befinden, dass dem Punkt $a^1$ der ersten Punktreihe der Punkt $\alpha^1$ der zweiten entspricht, aber auch gleichzeitig dem Punkt $\alpha^1$ als der ersten Punktreihe angehörig betrachtet der Punkt $a^1$ der zweiten Punktreihe entspricht; da also ein Paar entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen, so bilden auch $a^1\alpha^1$, $b^1\beta^1$, $c^1\gamma^1$ ... ein Punktsystem.

Aus der Eigenschaft des konstanten Rechtecks

$$ox \,.\, o\xi = \text{const.}$$

können wir uns ein leichtes Verfahren ableiten, Punktsysteme in ihrem ganzen Verlaufe herzustellen. Legen wir nämlich durch zwei konjugirte Punkte $a\alpha$ einen beliebigen Kreis und durch ein zweites Paar konjugirter Punkte $b\beta$ irgend einen zweiten Kreis, welcher den ersten in den Punkten $P$ und $Q$ treffe, so wird ein dritter Kreis, welcher durch $PQ$ und $x$ geht, nothwendig durch $\xi$ gehen müssen, weil, wenn $PQ$ den Träger des Punktsystems in $o$ trifft, $oP \,.\, oQ = oa \,.\, o\alpha = ob \,.\, o\beta = ox \,.\, o\xi$ sein muss. Sämmtliche durch die Punkte $PQ$ gelegten Kreise (die Kreisschaar) bestimmen also sämmtliche Punktenpaare $x\xi$ eines Punktsystems, das mit dem angenommenen identisch ist, dessen Mittelpunkt durch die gemeinschaftliche Sekante $PQ$ der Kreisschaar (oder denjenigen Kreis der Schaar, dessen Radius unendlich gross ist) bestimmt wird. Liegt der Punkt $o$ ausserhalb der Strecke $PQ$, so liegt er auch ausserhalb jeder Strecke $x\xi$, ausserhalb aller

Kreise der Schaar, das Punktsystem ist hyperbolisch; liegt $o$ zwischen $PQ$, so liegt es auch innerhalb jeder Strecke $x\xi$, innerhalb sämmtlicher Kreise der Schaar, das Punktsystem ist elliptisch. Wir schliessen zugleich umgekehrt: Eine Kreisschaar mit zwei (reellen) gemeinschaftlichen Punkten $PQ$ wird von einer beliebigen Transversale immer in einem Punktsysteme geschnitten, dessen Paare konjugirter Punkte die Schnittpunkte mit je einem Kreise der Schaar sind; das Punktsystem ist elliptisch, wenn die Transversale die Punkte $P$ und $Q$ trennt, d. h. auf entgegengesetzten Seiten von sich hat, hyperbolisch, wenn $P$ und $Q$ auf derselben Seite von der Transversale liegen. Im letzteren Fall giebt es zwei besondere Kreise der Schaar, welche die Transversale berühren; die Berührungspunkte sind die Asymptotenpunkte des Punktsystems.

Aus dieser Konstruktion eines Punktsystems vermittelst der Kreisschaar geht schon hervor, dass ein Punktsystem vollständig bestimmt ist durch zwei Paar (willkührlich anzunehmender) konjugirter Punkte; dies folgt aber auch aus der ursprünglichen Entstehung des Punktsystems, denn nehmen wir $a\alpha$, $b\beta$ als zwei Paar konjugirte Punkte willkührlich an, so vertritt $a\alpha$ die Stelle von zwei Paaren $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}$, $b\beta$ die Stelle von zwei andern Paaren $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}$ entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$; es scheint also, als ob durch diese vier Paar entsprechender Punkte die projektivische Beziehung überbestimmt sei, da doch drei Paar entsprechende Elemente zur Bestimmung der projektivischen Beziehung nothwendig und ausreichend sind; dieser Skrupel verschwindet aber, da die vier Paar so eigenthümlich liegen, dass das vierte nur eine Folge der drei andern ist, dass also kein Widerspruch stattfindet und in der That die projektivische Beziehung durch sie gerade bestimmt wird. Es liegen nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ zusammen in $a$, ebenso $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ zusammen in $\alpha$, ferner $\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1$ in $b$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$ in $\beta$; folglich ist identisch

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1),$$

und da nach § 6 1. allgemein

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1),$$

so folgt

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1).$$

Diese vier Paar entsprechende Elemente vertreten also nur drei Paar und bestimmen vollständig die projektivische Beziehung, also auch das ganze Punktsystem. Zwischen drei Paaren konjugirter Punkte eines Punktsystems muss folglich eine Bedingung bestehen, welche unmittelbar hervorgeht aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse; fügen wir nämlich noch ein drittes Paar konjugirter Punkte $c\gamma$ den vorigen hinzu und denken uns dieses als $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}$ (Fig. 21), so ist

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{e}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1)$$

(Fig. 21.)

oder durch die Bezeichnung der conjugirten Punkte des Punktsystems ausgedrückt

$$(a\alpha bc) = (\alpha a\beta\gamma),$$

das heisst

$$\frac{ab}{\alpha b} : \frac{ac}{\alpha c} = \frac{\alpha\beta}{a\beta} : \frac{\alpha\gamma}{a\gamma}.$$

Dies lässt sich in mehr symmetrischer Gestalt so schreiben:

$$\text{(I.)} \begin{cases} \dfrac{ab \,.\, a\beta}{\alpha b \,.\, \alpha\beta} = \dfrac{ac \,.\, a\gamma}{\alpha c \,.\, \alpha\gamma} & \text{und in gleicher Weise} \\[2ex] \dfrac{bc \,.\, b\gamma}{\beta c \,.\, \beta\gamma} = \dfrac{ba \,.\, b\alpha}{\beta a \,.\, \beta\alpha} & \\[2ex] \dfrac{ca \,.\, c\alpha}{\gamma a \,.\, \gamma\alpha} = \dfrac{cb \,.\, c\beta}{\gamma b \,.\, \gamma\beta}. & \end{cases}$$

Ferner können wir auch folgende Gleichheit der Doppelverhältnisse ansetzen:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{f}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{f}_1)$$

oder in der andern Bezeichnung

$$(ab\alpha\gamma) = (\alpha\beta ac),$$

das heisst

$$\frac{a\alpha}{b\alpha} : \frac{a\gamma}{b\gamma} = \frac{\alpha a}{\beta a} : \frac{\alpha c}{\beta c};$$

da nun $(\alpha a) = -(a\alpha)$, so hebt sich ein Faktor fort und es bleibt die Relation:

$$\text{(II.)} \begin{cases} a\beta \,.\, b\gamma \,.\, c\alpha = a\gamma \,.\, b\alpha \,.\, c\beta \\ a\beta \,.\, bc \,.\, \gamma\alpha = ac \,.\, b\alpha \,.\, \gamma\beta \\ b\gamma \,.\, ca \,.\, \alpha\beta = ba \,.\, c\beta \,.\, \alpha\gamma \\ c\alpha \,.\, ab \,.\, \beta\gamma = cb \,.\, a\gamma \,.\, \beta\alpha. \end{cases}$$

und durch Vertauschung je eines der drei Paar konjugirter Punkte

Diese 7 Relationen zwischen drei Paar konjugirten Punkten eines Punktsystems hängen natürlich alle von einer unter ihnen ab; sie sind von Désargues aufgestellt, der solche sechs Punkte, welche diesen Bedingungen genügen, „sechs Punkte in Involution" nannte.

Es ist noch für die Folge wichtig, ein Kriterium zu besitzen, welches sofort entscheidet, ob ein durch zwei Paar konjugirter Punkte gegebenes Punktsystem elliptisch oder hyperbolisch ist; dies erkennen wir unmittelbar aus der oben gefundenen Eigenschaft, dass beim hyperbolischen Punktsystem jedes Paar konjugirter Punkte auf derselben Seite vom Mittelpunkt liegt, also wenn $a\alpha$ und $b\beta$ irgend zwei Paar sind, entweder die Strecke $a\alpha$ ganz ausserhalb der Strecke $b\beta$ oder ganz innerhalb derselben oder endlich die Strecke $b\beta$ ganz innerhalb $a\alpha$ liegt, d. h. die Punkte $a\alpha$ werden durch die Punkte $b\beta$ nicht getrennt (liegt $b$ innerhalb $a\alpha$, so liegt auch $\beta$ innerhalb $a\alpha$, liegt $b$ ausserhalb $a\alpha$, so liegt auch $\beta$ ausserhalb $a\alpha$); weil dagegen beim elliptischen Punktsystem ein Paar konjugirter Punkte immer auf entgegengesetzten Seiten vom Mittelpunkte liegen, muss $a\alpha$ durch $b\beta$ und umgekehrt getrennt werden; das gesuchte Kriterium ist also folgendes:

Wenn ein Punktsystem durch irgend zwei Paar konjugirter Punkte $a\alpha$ und $b\beta$ gegeben ist, so wird es ein elliptisches oder hyperbolisches sein, je nachdem die Punkte $a\alpha$ durch $b\beta$ und zugleich $b\beta$ durch $a\alpha$ getrennt werden oder nicht. Hieraus entspringt folgende Betrachtung: Nehmen wir auf einer Geraden vier beliebige Punkte $abcd$ an, so lassen sich dieselben auf dreifache Weise zu Paaren ordnen, nämlich:

$$ab,\ cd\ |\ ac,\ bd\ |\ ad,\ bc.$$

Bei jeder dieser Zuordnungen wird durch die zwei Punktenpaare, als konjugirte aufgefasst, ein Punktsystem bestimmt und von diesen drei Punktsystemen ist immer eines elliptisch, die beiden andern hyperbolisch, nämlich nach dem vorigen Kriterium z. B.

a c b d

| $ab,\ cd$ | $ac,\ bd$ | $ad,\ bc$ |
|---|---|---|
| elliptisch ($e$) | hyperbolisch ($h$) | hyperbolisch ($h_1$). |

Nehmen wir von einem beliebigen Punkte $p$ des Trägers den

konjugirten Punkt rücksichtlich dieser drei Punktsysteme und bezeichnen wir ihn beziehlich durch

$$\pi_e \qquad \pi_h \qquad \pi_{h_1},$$

so bieten diese Punkte eine leicht erkennbare Eigenschaft dar; es findet nämlich wegen der Grundeigenschaft der Punktsysteme die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse statt:

$$\begin{cases} (abcp) = (bad\pi_e) \\ (acdp) = (cab\pi_h) \\ (adcp) = (dab\pi_{h_1}). \end{cases}$$

Die letzte Gleichheit lässt sich auch so schreiben:

$$(acdp) = (dba\pi_{h_1})$$

und zeigt, mit der vorletzten verglichen, dass

$$(cab\pi_h) = (dba\pi_{h_1})$$

oder

$$(abc\pi_h) = (bad\pi_{h_1}),$$

folglich sind $\pi_h$ und $\pi_{h_1}$ ein Paar konjugirte Punkte des Punktsystems $(e)$ gleicherweise $\pi_e$ und $\pi_h$ ein Paar konjugirte Punkte des Punktsystems $(h_1)$ endlich $\pi_e$ und $\pi_{h_1}$ ein Paar konjugirte Punkte des Punktsystems $(h)$. Hiernach gilt folgender Satz:

Vier beliebige Punkte in einer Geraden als zwei Paar konjugirte Punkte aufgefasst bestimmen drei verschiedene Punktsysteme, von denen immer eines elliptisch $(e)$ und die beiden andern hyperbolisch sind $(h)$ und $(h_1)$. Nimmt man von irgend einem Punkte $p$ in der Geraden den konjugirten Punkt in Bezug auf jedes dieser drei Punktsysteme und heissen dieselben beziehlich $\pi_e \pi_h \pi_{h_1}$, so sind $\pi_h$ und $\pi_{h_1}$ ein Paar konjugirte Punkte in dem Systeme $(e)$, $\pi_e$ und $\pi_{h_1}$ ein Paar konjugirte Punkte in dem Systeme $(h)$ und $\pi_e$ und $\pi_h$ ein Paar konjugirte Punkte in dem Systeme $(h_1)$.

Auch zeigt sich das eigenthümlich reciproke Verhalten, dass die vier Punkte $p\pi_e\pi_h\pi_{h_1}$ zu den vier angenommenen Punkten $abcd$ genau dieselbe Beziehung haben, wie diese zu jenen, d. h. wenn man von $p\pi_e\pi_h\pi_{h_1}$ ausgeht und zu $a$ die drei konjugirten sucht, erhält man $bcd$, was aus der Projektivität der Punktreihen hervorgeht:

$$\left.\begin{matrix} a & b & c & d & p & \pi_e & \pi_h & \pi_{h_1} \\ b & a & d & c & \pi_e & p & \pi_{h_1} & \pi_h \end{matrix}\right\} (e)$$

$$\left.\begin{matrix} a & b & c & d & p & \pi_e & \pi_h & \pi_{h_1} \\ c & d & a & b & \pi_h & \pi_{h_1} & p & \pi_e \end{matrix}\right\} (h)$$

$$\left.\begin{matrix} a & b & c & d & p & \pi_e & \pi_h & \pi_{h_1} \\ d & c & b & a & \pi_{h_1} & \pi_h & \pi_e & p \end{matrix}\right\} (h_1).$$

Wir müssen noch eines besonderen Falles Erwähnung thun, in welchem das Punktsystem einen sehr einfachen Charakter annimmt; dieser tritt beim hyperbolischen Punktsystem auf, welches nach dem Obigen aus sämmtlichen Paaren zugeordnet-harmonischer Punkte zu zwei festen Punkten (den Asymptotenpunkten des Punktsystems) besteht. Wählen wir nämlich insbesondere die Asymptotenpunkte, welche zwei Paare konjugirter Punkte vertreten, also das ganze Punktsystem bestimmen, so, dass einer von ihnen $h$ im Unendlichen liegt und nur der andere $g$ im Endlichen bleibt, so wird, weil jedes Paar $x\xi$ zu $g$ und $h(\infty)$ harmonisch liegt, $g$ die Mitte jedes Paares $x\xi$ sein müssen (§ 8); wir erhalten also ein sehr einfaches Gebilde: alle Paare von Punkten $x\xi$ einer Geraden, die zu einem festen $g$ symmetrisch liegen; derselbe ist ein Asymptotenpunkt dieses besonderen Punktsystems, welches ein *hyperbolisch-gleichseitiges Punktsystem* genannt wird, während der andere Asymptotenpunkt und mit ihm zugleich der Mittelpunkt des Punktsystems im Unendlichen liegt. Es ergiebt sich auch umgekehrt: Wenn der Mittelpunkt eines Punktsystems im Unendlichen liegt, so muss er zugleich ein Asymptotenpunkt sein; denn da der unendlich entfernte Punkt und der Mittelpunkt immer ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems sind, so wird, wenn sie zusammenfallen, aus ihnen ein Asymptotenpunkt; also das Punktsystem ist dann immer ein hyperbolisch-gleichseitiges. —

Schliesslich möge noch eine Frage erörtert werden, welche sich bei geometrischen Untersuchungen öfters darbietet: *Ereignet es sich bei zwei beliebig auf einander gelegten Punktsystemen, dass ein Paar konjugirter Punkte des einen auf ein Paar des andern Punktsystems zu liegen kommt?* Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir die drei möglichen Fälle von einander trennen: ob 1) beide Punktsysteme elliptisch sind oder 2) eines elliptisch und das andere hyperbolisch oder 3) beide

hyperbolisch sind. Denken wir uns bei einem Punktsystem jedes Paar konjugirter Punkte als Durchmesser eines Kreises, so erhalten wir nach dem Obigen eine Kreisschaar und zwar mit zwei reellen Schnittpunkten, wenn das Punktsystem ein elliptisches ist, dagegen mit einer ideellen gemeinschaftlichen Sekante (Linie der gleichen Potenzen), wenn das Punktsystem ein hyperbolisches ist. Sind nun ad 1) die beiden auf einander liegenden beiden Punktsysteme elliptisch, so haben die beiden zugehörigen Kreisschaaren reelle Schnittpunkte $PQ$ und $P_1Q_1$, welche gleich weit abstehen und symmetrisch liegen von der gemeinschaftlichen Centrale. Es giebt offenbar einen Kreis durch die vier Punkte $PQP_1Q_1$, welcher beiden Kreisschaaren angehört, also die Centrale in einem Punktenpaar trifft, welches beiden Punktsystemen gemeinschaftlich ist; dies ist das einzige und immer vorhandene. Ist ferner ad 2) das eine Punktsystem elliptisch, das andere aber hyperbolisch, so hat die eine Kreisschaar zwei reelle Punkte $PQ$, die andere keine. Es giebt aber immer einen einzigen leicht zu ermittelnden Kreis der letzteren, welcher durch $P$ und $Q$ geht und dadurch gefunden werden kann, dass man durch $P$ und die beiden Asymptotenpunkte $gh$ des hyperbolischen Punktsystems (Grenzpunkte der Kreisschaar) einen Kreis legt und einen andern Kreis konstruirt, der diesen in $P$ rechtwinkelig schneidet und durch $Q$ geht; letzterer gehört beiden Kreisschaaren an und bestimmt also auf der Centrale das einzige und immer vorhandene Paar konjugirter Punkte, welches beiden Punktsystemen gemeinschaftlich ist. Sind endlich ad 3) beide auf einander liegenden Punktsysteme hyperbolisch, so haben beide Kreisschaaren ideelle gemeinschaftliche Sekanten; seien $gh$ und $g_1h_1$ die Asymptotenpunkte des einen und andern Punktsystems und beschreibt man über ihnen als Durchmesser zwei Kreise, so kommt es darauf an zu entscheiden, ob ein Kreis existirt, welcher seinen Mittelpunkt in der Centrale hat und beide zuletzt konstruirten Kreise rechtwinkelig schneidet. Dieser ist nie vorhanden, wenn das eine Paar Asymptotenpunkte durch das andere getrennt wird, also $gh$ einen und nur einen der Punkte $g_1h_1$ zwischen sich hat. Wenn dagegen das eine Paar durch das andere nicht getrennt wird, also entweder $gh$ ganz ausserhalb $g_1h_1$ oder ganz zwischen $g_1h_1$ liegt oder umgekehrt, so giebt es einen einzigen bestimmten Kreis von der verlangten Beschaffenheit, welcher leicht zu ermitteln ist. Dieser bestimmt

auf der Centrale das einzige beiden Punktsystemen gemeinschaftliche Paar konjugirter Punkte. Das Resultat dieser mit Hülfe von Kreisschaaren durchgeführten Untersuchung lässt sich also unabhängig hiervon so aussprechen:

Zwei auf einander liegende Punktsysteme haben immer ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte, sobald sie beide elliptisch sind oder eines elliptisch und das andere hyperbolisch ist. Wenn aber beide hyperbolisch sind, so haben sie nur dann ein Paar konjugirter Punkte gemeinschaftlich, wenn die Asymptotenpunkte des einen Punktsystems durch die des andern nicht getrennt werden; werden sie getrennt (d. h. liegt von den beiden Asymptotenpunkten des einen Punktsystems der eine zwischen, der andere ausserhalb der beiden Asymptotenpunkte des andern Punktsystems), so existirt kein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte. Dass im Allgemeinen nicht zwei Paar konjugirter Punkte den beiden Punktsystemen gemeinschaftlich sein können, ist an sich klar, weil sonst die Punktsysteme identisch sein müssten. (Vergl. § 31.)

Hieraus ergiebt sich insbesondere eine Eigenschaft des elliptischen Punktsystems: In einem elliptischen Punktsystem giebt es allemal zu einem beliebigen Paar konjugirter Punkte $a\alpha$ ein einziges und bestimmtes anderes Paar $a^1\alpha^1$, welches durch das erstere harmonisch getrennt wird, d. h. so liegt, dass $a\alpha a^1\alpha^1$ vier harmonische Punkte sind, und zwar $a\alpha$ zugeordnet, ebenso $a^1\alpha^1$. Beim hyperbolischen Punktsystem ist dies nicht möglich.

Hat man ein elliptisches Punktsystem, bei dem $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ zwei solche Paare konjugirter Punkte sind, die harmonisch durch einander getrennt werden, so steht der Mittelpunkt $o$ des Punktsystems in eigenthümlicher Beziehung zu den Mittelpunkten der Strecken $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$, welche $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^1$ heissen mögen; es sind nämlich $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}^1$ ein Paar konjugirte Punkte des gegebenen Punktsystems selbst und der vierte harmonische Punkt zu $a\alpha o$ ist $\mathfrak{m}^1$, der vierte harmonische zu $a^1\alpha^1 o$ ist $\mathfrak{m}$, also $(a\alpha o\mathfrak{m}^1) = -1$ und $(a^1\alpha^1 o\mathfrak{m}) = -1$. Dies folgt leicht aus elementaren Sätzen, wenn man über $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ als Durchmesser zwei Kreise beschreibt, die sich rechtwinkelig schneiden u. s. w.

## § 17. Strahlsystem (Involution von Strahlenpaaren).

Der im vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtung steht eine gleichlaufende zur Seite für zwei in der Weise auf einander liegende (concentrische) projektivische Strahlbüschel, dass das eine oder das andere System entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fällt. Da diese Betrachtung der vorigen ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann, so genüge es, nur die Resultate hier anzuführen, welche auch unmittelbar durch perspektivische Projektion aus den vorigen abgeleitet werden können.

Liegen zwei projektivische concentrische Strahlbüschel in der Weise auf einander, dass die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $st$, $s_1t_1$ verkehrt auf einander fallen, $s$ auf $t_1$ und $t$ auf $s_1$, so fallen die Schenkel sämmtlicher Paare des einen oder andern Systems entsprechender gleicher Winkel $(xy) = (x_1y_1)$ oder $(xy) = (y_1x_1)$ (§ 13) verkehrt auf einander, nämlich $x$ auf $y_1$ und $y$ auf $x_1$ und zwar findet dieses für das eine oder andere System statt, je nachdem die Strahlbüschel gleichlaufend oder ungleichlaufend sind.

Wenn bei zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln die Schenkel irgend eines Paars entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen $xy$ auf $y_1x_1$, so fallen sämmtliche Paare von Schenkeln entsprechender gleicher Winkel desjenigen Systems, welchem jenes Paar angehört, verkehrt auf einander.

Nur bei den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel $st$, $s_1t_1$, welche beiden Systemen gemeinschaftlich angehören, kann sowohl das eine, wie das andere System in der angegebenen Weise zur Deckung gebracht werden, indem man die Strahlbüschel einmal gleichlaufend, das andere Mal ungleichlaufend so auf einander legt, dass $s$ auf $t_1$ und $t$ auf $s_1$ fällt. Ein solches Doppelgebilde heisst ein Strahlsystem (oder eine Involution von Strahlenpaaren), die Schenkel irgend eines Paares verkehrt auf einander fallender entsprechender gleicher Winkel ein Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems, die Schenkel der auf einander fallenden entsprechenden rechten Winkel $s(t_1)$ und $t(s_1)$ die Axen

des Strahlsystems. Wenn die das Strahlsystem erzeugenden Strahlbüschel gleichlaufend sind, so heisst dasselbe ein elliptisches, wenn sie ungleichlaufend sind, ein hyperbolisches; im letzteren Fall liegen die besonderen Strahlen $gg_1$ auf einander und ebenfalls auch $hh_1$; diese beiden Doppelstrahlen heissen die Asymptoten des hyperbolischen Strahlsystems; ihre Winkel werden gehälftet durch die Axen; im ersten Fall giebt es keine Doppelstrahlen, es fallen indessen $g$ auf $h_1$ und $h$ auf $g_1$.

Sind $x\xi$ irgend ein Paar konjugirte Strahlen des Strahlsystems, $m$ und $\mu$ die Axen, so ist immer

$$\operatorname{tg}(mx) \,.\, \operatorname{tg}(m\xi) = \text{const.}$$

also auch

$$\operatorname{tg}(\mu x) \,.\, \operatorname{tg}(\mu\xi) = \text{const.}$$

doch liegt beim elliptischen Strahlsystem ein Paar konjugirter Strahlen $x\xi$ immer so, dass, wenn $x$ in einem Quadranten $(m\mu)$ liegt, $\xi$ in dem nebenliegenden Quadranten sich findet, während beim hyperbolischen Strahlsystem jedes Paar $x\xi$ in demselben Quadranten sich findet, also beim elliptischen Strahlsystem jedes Paar $x\xi$ durch die Axen $m\mu$ getrennt wird, beim hyperbolischen nicht; daraus folgt, dass sämmtliche Paare konjugirter Strahlen eines hyperbolischen Strahlsystems zugeordnete harmonische Strahlen sind zu den beiden Asymptoten, und auch umgekehrt: Alle Paare zugeordneter harmonischer Strahlen zu zwei festen Strahlen bilden ein hyperbolisches Strahlsystem, dessen beide Asymptoten die beiden festen Strahlen sind. Beim elliptischen Strahlsystem findet dieses Verhalten nicht statt.

Ein Strahlsystem ist ein in sich projektivisches Doppelgebilde in der Art, dass, wenn man aus jedem Paare konjugirter Strahlen einen herausnimmt und diese als ein Strahlbüschel $abc\ldots$ auffasst, die konjugirten Strahlen $\alpha\beta\gamma\ldots$ ein mit dem ersten projektivisches Strahlbüschel bilden und diese beiden Strahlbüschel in der angegebenen eigenthümlichen Weise auf einander liegen. Wir können dabei die konjugirten Strahlen eines Paares mit einander vertauschen, ohne jene projektivische Beziehung zu alteriren, denn da die Strahlen eines solchen Paares nach der ursprünglichen Entstehung des Strahlsystems als $x(y_1)$ und $x_1(y)$ aufgefasst werden müssen, so können sie sowohl als $xx_1$ gelten, wie auch als $y_1y$. Das Strahlsystem besitzt die allgemeine Eigen-

schaft der Projektivität, dass es auf jeder beliebigen Transversale ein Punktsystem ausschneidet, dessen Paare konjugirter Punkte durch die Paare konjugirter Strahlen fixirt werden, und umgekehrt, jedes Punktsystem mit irgend einem Punkte der Ebene durch Strahlen verbunden liefert ein Strahlsystem.

Ein Strahlsystem ist vollständig bestimmt durch zwei Paar (willkührlich anzunehmende) konjugirte Strahlen; zwischen drei Strahlenpaaren $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ finden die aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse entspringenden Relationen statt:

$$(\mathrm{I}^1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin(ab)\,.\,\sin(a\beta)}{\sin(\alpha b)\,.\,\sin(\alpha\beta)} = \dfrac{\sin(ac)\,.\,\sin(a\gamma)}{\sin(\alpha c)\,.\,\sin(\alpha\gamma)} \\[2ex] \dfrac{\sin(bc)\,.\,\sin(b\gamma)}{\sin(\beta c)\,.\,\sin(\beta\gamma)} = \dfrac{\sin(ba)\,.\,\sin(b\alpha)}{\sin(\beta a)\,.\,\sin(\beta\alpha)} \\[2ex] \dfrac{\sin(ca)\,.\,\sin(c\alpha)}{\sin(\gamma a)\,.\,\sin(\gamma\alpha)} = \dfrac{\sin(cb)\,.\,\sin(c\beta)}{\sin(\gamma b)\,.\,\sin(\gamma\beta)}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}^1.)\quad \begin{cases} \sin(a\beta)\,.\,\sin(b\gamma)\,.\,\sin(c\alpha) = \sin(a\gamma)\,.\,\sin(b\alpha)\,.\,\sin(c\beta) \\ \sin(a\beta)\,.\,\sin(bc)\,.\,\sin(\gamma\alpha) = \sin(ac)\,.\,\sin(b\alpha)\,.\,\sin(\gamma\beta) \\ \sin(b\gamma)\,.\,\sin(ca)\,.\,\sin(\alpha\beta) = \sin(ba)\,.\,\sin(c\beta)\,.\,\sin(\alpha\gamma) \\ \sin(c\alpha)\,.\,\sin(ab)\,.\,\sin(\beta\gamma) = \sin(cb)\,.\,\sin(a\gamma)\,.\,\sin(\beta\alpha). \end{cases}$$

Es gilt folgendes leicht anzuwendende Kriterium, um zu erkennen, ob ein Strahlsystem, welches durch zwei gegebene Paare konjugirter Strahlen $a\alpha$, $b\beta$ bestimmt wird, ein elliptisches oder hyperbolisches ist: Wird das eine Strahlenpaar $a\alpha$ durch das andere $b\beta$ getrennt, also auch umgekehrt (d. h. fällt $b$ in einen Winkelraum $a\alpha$ und $\beta$ in den Nebenwinkelraum), so ist das Strahlsystem elliptisch; wird dagegen das eine Strahlenpaar durch das andere nicht getrennt, so ist das Strahlsystem hyperbolisch.

Ein eigenthümliches Auftreten des Strahlsystems (oder Punktsystems) zeigt sich bei folgender Betrachtung: Sind drei beliebige durch einen Punkt gehende Strahlen $abc$ gegeben, so kann man zwei derselben in dreifacher Weise als zugeordnete Strahlen auffassen und zu dem jedesmaligen dritten den zugeordneten vierten harmonischen Strahl konstruiren; seien $b$ und $c$ zugeordnete und der vierte harmonische zu $a$ zugeordnete $\alpha$; anderseits $c$ und $a$ zugeordnete und der vierte harmonische zu $b$ zugeordnete $\beta$, endlich $a$ und $b$ zugeordnete und der vierte harmonische zu $c$ zugeordnete $\gamma$; dann ist

$$(cba\alpha) = -1 \qquad (acb\beta) = -1 \qquad (bac\gamma) = -1.$$

Aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(a c b \beta) = (a b c \gamma)$$

folgt, dass $b$ und $c$ als ein Paar, $\beta$ und $\gamma$ ein zweites Paar konjugirter Strahlen eines Strahlsystems genommen werden dürfen, welches $a$ zu einer Asymptote haben muss; die andere Asymptote ist aber $\alpha$, weil es zu $a$ der vierte harmonische Strahl ist, während $b$ und $c$ das andere Paar zugeordnete Strahlen sind; mithin müssen auch $a$ und $\alpha$ harmonisch liegen zu $\beta$ und $\gamma$, also

$$(\gamma \beta \alpha a) = -1, \text{ ebenso } (\alpha \gamma \beta b) = -1 \text{ und } (\beta \alpha \gamma c) = -1.$$

Es findet daher zwischen den 6 Strahlen $a b c \alpha \beta \gamma$ das eigenthümlich reciproke Verhalten statt, dass die drei ersten von den drei letzten ebenso abhängen, wie die drei letzten von den ersten.

Aus der Relation

$$(c b a \alpha) = (\gamma \beta \alpha a)$$

folgt sodann, dass $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ drei Paar konjugirte Strahlen eines Strahlsystems oder sechs Strahlen in Involution sind; ebenso bilden aber auch $a\alpha$, $b\gamma$, $c\beta$ eine Involution, $a\gamma$, $b\beta$, $c\alpha$ eine neue und endlich auch $a\beta$, $b\alpha$, $c\gamma$; von diesen vier Involutionen ist die erste elliptisch, die drei andern sind hyperbolisch; ihre Asymptoten bilden selbst eine neue Involution u. s. f. —

Endlich müssen wir noch zwei besondere Fälle eines Strahlsystems erwähnen, in welchen dieses einen sehr einfachen Charakter annimmt.

Im Allgemeinen giebt es in jedem Strahlsystem nur ein Paar zu einander rechtwinklige konjugirte Strahlen, die Axen des Strahlsystems, weil es im Allgemeinen bei zwei projektivischen Strahlbüscheln nur ein Paar entsprechende rechte Winkel giebt. Anderseits dürfen wir aber zur Bestimmung des Strahlsystems zwei Paar konjugirte Strahlen willkührlich annehmen und es steht uns frei, diese Paare $a\alpha$, $b\beta$ so anzunehmen, dass nicht allein $a$ und $\alpha$ zu einander rechtwinklig sind, sondern auch $b$ und $\beta$, also ein Strahlsystem zu bilden, welches zwei Paar rechtwinklige konjugirte Strahlen hat; ein solches Strahlsystem muss natürlich ein elliptisches sein, weil zwei rechte Winkel, die denselben Scheitel haben, einander nothwendig trennen; betrachten wir $a\alpha$ als die Axen dieses Strahlsystems, so muss

$$\operatorname{tg}(a x) \cdot \operatorname{tg}(a \xi) = \text{const} = \operatorname{tg}(a b) \cdot \operatorname{tg}(a \beta),$$

weil aber

$$(a\beta) = (ab) + 90^0 \quad \operatorname{tg}(a\beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}(ab)}, \text{ folgt}$$

$$\operatorname{tg}(ax) \,.\, \operatorname{tg}(a\xi) = -1$$

und hieraus ergiebt sich wieder, dass der Strahl $\xi$ auf dem konjugirten Strahl $x$ senkrecht stehen muss, also sämmtliche Paare konjugirter Strahlen bilden rechte Winkel. Ein solches besonderes Strahlsystem, welches nur aus rechten Winkeln besteht, die denselben Scheitel haben, welches also nicht nur ein Axenpaar, sondern unendlich viele Axenpaare hat, heisst ein Kreissystem*) und ist ein specieller Fall eines elliptischen Strahlsystems. Wir schliessen also: Wenn ein Strahlsystem zwei Paar rechtwinklige konjugirte Strahlen hat, so sind sämmtliche Paare konjugirter Strahlen rechtwinklig zu einander und das Strahlsystem ist ein Kreissystem.

Zweitens wissen wir, dass jedes Paar konjugirte Strahlen eines hyperbolischen Strahlsystems zugeordnet-harmonische Strahlen zu den Asymptoten sind; nehmen wir nun insbesondere die beiden Asymptoten, welche zwei (zusammenfallende) Strahlenpaare vertreten, also zur Bestimmung des Strahlsystems gerade ausreichen, auf einander rechtwinklig an, so muss jedes Paar $x\xi$ mit ihnen gleiche Winkel bilden (§ 8); hieraus geht ein Strahlsystem besonders einfacher Art hervor, welches ein hyperbolich-gleichseitiges Strahlsystem heisst und die charakteristische Eigenschaft besitzt, dass seine Asymptoten zu einander rechtwinklig sind, also mit den Axen Winkel von $45^0$ bilden; wir können auch sagen: Alle durch einen Punkt gehende Strahlenpaare, welche mit einem festen Strahl gleiche Winkel machen, bilden ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem.

## § 18. Vorkommen von Punktsystemen und Strahlsystemen beim vollständigen Viereck und Vierseit. Die Hauptsätze der Theorie der Transversalen.

Punktsysteme und Strahlsysteme treten bei sehr vielen geometrischen Untersuchungen auf; zuerst wurden sie bemerkt bei der Figur des vollständigen Vierecks und Vierseits. Sei *ABCD*

---

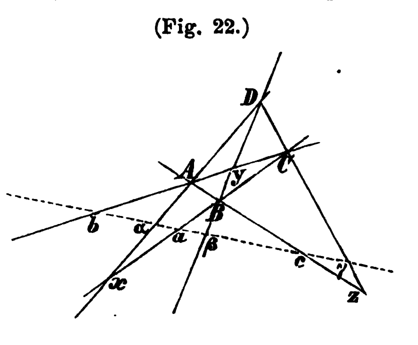
*) Es wäre vielleicht korrekter, ein solches Strahlsystem ein cirkulares zu nennen, weil unter Kreissystem leicht etwas Anderes vermuthet werden könnte; doch wollen wir die von Steiner einmal eingeführte Bezeichnung beibehalten.

ein vollständiges Viereck und mögen sich die drei Seitenpaare

$BC$, $DA$ in $x$
$CA$, $DB$ in $y$
$AB$, $DC$ in $z$

den drei Diagonalpunkten treffen; schneiden wir diese sechs Seiten des vollständigen Vierecks durch irgend eine Transversale (beliebige gerade Linie in der Ebene) und bezeichnen (Fig. 22) die Schnittpunkte

(Fig. 22.)




des Seitenpaars $BC$, $DA$ auf ihr mit $a$ und $\alpha$
- - $CA$, $DB$ - - - $b$ - $\beta$
- - $AB$, $DC$ - - - $c$ - $\gamma$,

so ist zunächst identisch das Doppelverhältniss

$$(axCB) = (xaBC) \qquad (\S\ 6.\ 1).$$

Die vier Punkte links $axCB$ von $A$ aus auf die Transversale projicirt und rechts $xaBC$ von $D$ aus projicirt liefern die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(a\alpha bc) = (\alpha a \beta\gamma),$$

auf der Transversale finden sich also vier Paar entsprechende Punkte zweier projektivischer Punktreihen dergestalt, dass die entsprechenden gleichen Strecken $a\alpha$ und $\alpha a$ verkehrt auf einander fallen; die Punktreihen bilden also (§ 16) ein Punktsystem, d. h. $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sind drei Paar konjugirte Punkte eines Punktsystems oder sechs Punkte in Involution; also gilt der Satz:

Werden die drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks durch eine beliebige Transversale geschnitten, so bilden die Schnittpunkte drei Paare konjugirter Punkte eines Punktsystems (oder sind sechs Punkte in Involution).

Dieser Satz enthält als speciellen Fall in sich die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierseits (§ 9), denn geht die beliebige Transversale insbesondere durch zwei Diagonalpunkte $xy$, so werden dies Asymptotenpunkte des Punktsystems (zusammenfallende konjugirte Punkte) und die Schnittpunkte des dritten Seitenpaares müssen zu den Asymptotenpunkten harmonisch liegen (§ 16.) Der Satz selbst ist aber wiederum nur ein specieller Fall eines all-

gemeineren, den wir später finden werden und bei welchem das ganze Punktsystem auf der Transversale zum Vorschein kommt. Aus dieser Eigenschaft des vollständigen Vierecks ergiebt sich eine lineare **Konstruktion** beliebig vieler Punktenpaare eines Punktsystems, von welchem zwei Paare konjugirter Punkte $a\alpha$ und $b\beta$ gegeben sind; um nämlich zu irgend einem Punkte $c$ des Trägers den konjugirten $\gamma$ zu finden, ziehe man durch $c$ eine beliebige Gerade und nehme auf ihr zwei beliebige Punkte $A$ und $B$ an; verbindet man $A$ und $B$ mit $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$ und sucht die Schnittpunkte $(Aa, Bb) = P$ und $(A\beta, B\alpha) = Q$ auf, dann geht $PQ$ durch den gesuchten Punkt $\gamma$, weil $ABPQ$ ein Viereck ist, dessen drei Seitenpaare in sechs Punkten der Involution getroffen werden; wegen der verschiedenartigen Zuordnung und weil es doch nur einen sechsten Punkt $\gamma$ giebt, folgen hieraus elementare Sätze, deren Ausführung wir dem Leser überlassen.

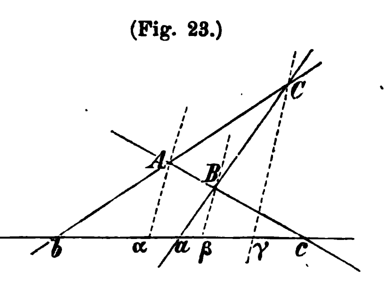
Es drängt sich hierbei die Frage auf, wann für verschiedene Lagen der Transversale das Punktsystem elliptisch und wann es hyperbolisch wird. Nach dem § 16 gefundenen Kriterium brauchen wir bei der Bewegung der Transversale nur zwei Paar konjugirte Punkte $a\alpha$, $b\beta$ zu verfolgen und nachzusehen, ob das eine Paar durch das andere getrennt wird, oder nicht; hierbei stellt sich nun das leicht erkennbare Verhalten heraus: Sobald von den vier Ecken des vollständigen Vierecks eine gerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale liegt (zwei oder vier auf der einen und zwei oder keine auf der andern), ist das Punktsystem hyperbolisch; liegt aber eine ungerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale (also eine oder drei Ecken auf einer Seite und drei oder eine auf der andern), so ist das Punktsystem elliptisch

Dieses Kriterium gilt indessen nur dann, wenn die vier Ecken des vollständigen Vierecks so liegen, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet (Fig. 22); liegen sie dagegen so, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, so tritt gerade das umgekehrte Verhalten ein: Liegt eine gerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten der Transversale, so ist das Punktsystem elliptisch, liegt eine ungerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten derselben, so ist das Punktsystem hyperbolisch. *)

*) Anmerkung. Ein Punktsystem tritt auch bei zwei allgemeinen auf einander liegenden Punktreihen auf, deren Doppelpunkte (§ 14) reell

Ein besonderer Fall der Eigenschaft des vollständigen Vierecks führt zu einem Hauptsatze der Theorie der Transversalen. Denken wir uns nämlich eine der vier Ecken des vollständigen Vierecks ins Unendliche gerückt, es sei $D$, so werden die drei Strahlen $DA$, $DB$, $DC$ parallel und es bleibt nur das Dreieck $ABC$ im Endlichen, dessen Seiten von einer Transversale in den Punkten $abc$ geschnitten werden, während drei durch die Ecken $ABC$ in beliebiger Richtung gezogene Parallelen die Transversale in $\alpha\beta\gamma$ treffen (Fig. 23).

(Fig. 23.)




Fassen wir nun die in § 16 gefundene Relation (II) für sechs Punkte einer Involution

$$a\beta \,.\, b\gamma \,.\, c\alpha = a\gamma \,.\, b\alpha \,.\, c\beta$$

ins Auge und ersetzen wegen der Parallelität

$$\frac{a\beta}{a\gamma} = \frac{aB}{aC};\ \frac{b\gamma}{b\alpha} = \frac{bC}{bA};\ \frac{c\alpha}{c\beta} = \frac{cA}{cB};$$

---

sind; seien nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Paar entsprechende Punkte zweier projektivischer Punktreihen, deren Träger zusammen liegen, und $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Doppelpunkte, so ist nothwendig die Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$$
$$= (\mathfrak{h}\mathfrak{g}\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1) \text{ nach § 6, 1,}$$

und da die Strecke $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ verkehrt auf die Strecke $\mathfrak{h}\mathfrak{g}$ fällt, so bilden (§ 16) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ ein Punktsystem oder sind 6 Punkte in Involution, also:

Sind bei zwei beliebig auf einander liegenden projektivischen Punktreihen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ zwei Paar entsprechende Punkte und $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Doppelpunkte, so sind immer die drei Punktenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{h}$ drei Paare konjugirter Punkte eines Punktsystems oder sechs Punkte in Involution.

Hieraus folgt insbesondere:

Sind $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paare konjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $g$ und $h$ sind, so bilden immer die drei Punktenpaare $a\beta$, $b\alpha$ und $gh$ eine neue Involution oder sind drei Punktenpaare eines neuen Punktsystems.

Hieraus folgen die von Hesse im 63. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals in dem Aufsatze „zur Involution" Seite 179 angegebenen Sätze.

die Buchstaben $\alpha\beta\gamma$ durch $ABC$, so finden wir

$$Ab \,.\, Bc \,.\, Ca = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb,$$

d. h.: **Werden die Seiten eines Dreiecks $ABC$ durch eine Gerade (Transversale) in den Punkten $abc$ getroffen, so bestimmt jeder Schnittpunkt auf der betreffenden Seite zwei Abschnitte: $aB$ und $aC$, $bC$ und $bA$, $cA$ und $cB$; das Produkt dreier nicht zusammenstossender Abschnitte ist gleich dem Produkt der drei übrigen.**

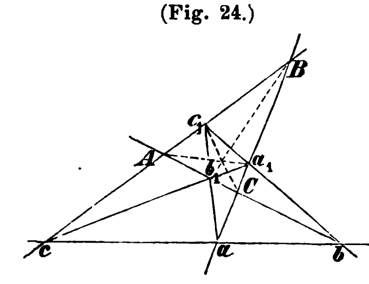
Fassen wir die vorige Relation in der Gestalt auf:

$$1) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1,$$

so drückt jeder Faktor das Verhältniss der beiden Abschnitte aus, welche der Schnittpunkt der Transversale und je einer Seite auf dieser bildet, und die Bedingung dafür, dass die drei Punkte $abc$ in gerader Linie liegen, ist die, dass das Produkt dieser drei Verhältnisse $= 1$ sei; es giebt aber auf jeder Seite des Dreiecks noch einen zweiten Theilpunkt, welcher absolut genommen dasselbe Verhältniss der Abschnitte darbietet, seiner Lage nach aber das entgegengesetzte (§ 7), nämlich den jedesmaligen vierten harmonischen Punkt, welcher dem Schnittpunkt mit der Transversale zugeordnet ist, während die beiden Ecken der Dreiecksseite das andere Paar zugeordneter Punkte sind; bezeichnen wir diese vierten harmonischen Punkte entsprechend mit $a_1\, b_1\, c_1$ (Fig. 24), so haben wir:

$$2) \qquad \frac{aB}{aC} + \frac{a_1B}{a_1C} = 0; \quad \frac{bC}{bA} + \frac{b_1C}{b_1A} = 0; \quad \frac{cA}{cB} + \frac{c_1A}{c_1B} = 0 \;(\S\, 8).$$

(Fig. 24.)




Was nun die Lage der Punkte $a_1 b_1 c_1$ betrifft, so sind sie leicht zu konstruiren nach § 8; man verbinde den Schnittpunkt $(Aa,\ Bb)$ mit $C$, so schneidet ihre Verbindungslinie die Gerade $AB$ in $c_1$ wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $AaBb$.

Es schneiden sich also $Aa$, $Bb$, $Cc_1$ in einem Punkte
ebenso $Bb$, $Cc$, $Aa_1$ - - -
- $Cc$, $Aa$, $Bb_1$ - - -

Nun liegen auch $cb_1a_1$ in einer geraden Linie, weil die vier von $c$ nach $bCb_1A$ gehenden Strahlen vier harmonische sind und daher auch die Gerade $CB$ in vier harmonischen Punkten treffen müssen; von diesen sind drei $aCB$, der vierte harmonische dem $a$ zugeordnete ist $a_1$, folglich muss der vierte Strahl $cb_1$ durch $a_1$ gehen, also liegen

$c\ b_1\ a_1$ in einer Geraden
ebenso $a\ c_1\ b_1$ - - -
- $b\ a_1\ c_1$ - - -

endlich schneiden sich auch

$$Aa_1 \quad Bb_1 \quad Cc_1$$

in einem Punkte wegen der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierecks $ABa_1b_1$.

Führen wir nun in die Relation (1) die Punkte $a_1b_1c_1$ ein vermittelst der Beziehungen (2), so ergiebt sich:

$$(\text{I.})\begin{cases} \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=1 & (a\ b\ c \text{ in gerader Linie})\\ \frac{aB}{aC}\cdot\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{c_1A}{c_1B}=1 & (a\,b_1\,c_1 \quad - \quad - \quad -)\\ \frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c_1A}{c_1B}=1 & (a_1\,b\,c_1 \quad - \quad - \quad -)\\ \frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{cA}{cB}=1 & (a_1\,b_1\,c \quad - \quad - \quad -)\end{cases}$$

$$(\text{II.})\begin{cases} \frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{c_1A}{c_1B}=-1 & (Aa_1,\ Bb_1,\ Cc_1 \text{ schneiden sich in 1 Punkte})\\ \frac{a_1B}{a_1C}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=-1 & (Aa_1,\ Bb,\ Cc \quad - \quad - \quad - \quad -)\\ \frac{aB}{aC}\cdot\frac{b_1C}{b_1A}\cdot\frac{cA}{cB}=-1 & (Aa,\ Bb_1,\ Cc \quad - \quad - \quad - \quad -)\\ \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c_1A}{c_1B}=-1 & (Aa,\ Bb,\ Cc_1 \quad - \quad - \quad - \quad -)\end{cases}$$

Da nun (§ 7) der Werth eines solchen Verhältnisses $\frac{xA}{xB}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Theilungspunkt $x$ ausserhalb der Strecke $AB$ oder zwischen $A$ und $B$ liegt, und das Produkt dreier solcher Faktoren nur positiv sein kann, wenn keiner oder zwei von ihnen negativ sind, dagegen negativ ist, wenn einer oder alle drei negativ sind, so folgt aus (I), dass, wenn eine gerade Linie die Seiten eines Dreiecks trifft, von den

Schnittpunkten entweder keiner oder zwei zwischen den Dreiecksecken liegen müssen, aus (II), dass, wenn drei durch einen Punkt und die Ecken eines Dreiecks gehende Strahlen die Seiten desselben in drei Punkten treffen, entweder nur einer oder alle drei zwischen den Dreiecksecken liegen müssen und dass in beiden Fällen von den sechs durch die Theilungspunkte auf den Seiten gebildeten Abschnitten das Produkt dreier nicht zusammenstossender gleich dem Produkt der drei andern ist.

Diese Erweiterung des vorigen Satzes gestattet jetzt die Umkehrung desselben, welche folgendermaassen lautet: Wenn in den Seiten eines Dreiecks (oder deren Verlängerungen) $ABC$ sich drei Punkte $abc$ finden, von solcher Beschaffenheit, dass von den sechs Abschnitten, welche auf den Dreiecksseiten durch die Punkte $abc$ gebildet werden: $aB$, $aC$, $bC$, $bA$, $cA$, $cB$, das (absolut genommene) Produkt dreier nicht zusammenstossender gleich dem Produkt der drei andern nicht zusammenstossenden Abschnitte ist, so liegen entweder die drei Punkte $abc$ in gerader Linie $\left(\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1\right)$, sobald von ihnen keiner oder zwei zwischen den Dreiecksecken liegen, oder die drei Verbindungslinien $Aa$, $Bb$, $Cc$ schneiden sich in einem Punkte $\left(\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = -1\right)$, sobald von den Punkten $abc$ einer oder alle drei zwischen den Dreiecksecken liegen. In dieser Gestalt liefert der Satz ein nützliches und oft angewendetes Kriterium, um zu erkennen, ob gewisse drei Punkte in gerader Linie liegen oder gewisse drei Linien sich in einem Punkte schneiden, und ist das Fundament einer umfangreichen und vorzüglich von französischen Geometern (Carnot, Brianchon, Poncelet u. A.) ausgebildeten Theorie (théorie des transversales). Die umgekehrten Sätze sind seit langer Zeit bekannt und stammen von Menelaos und de Céva her. Zugleich ergiebt sich beiläufig der Satz:

Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten und die zu den Schnittpunkten und je zwei Dreiecksecken zugeordneten vierten harmonischen Punkte auf den Dreiecksseiten mit den

*gegenüberliegenden Ecken verbunden, so laufen diese drei Linien durch einen Punkt,* und umgekehrt: *Verbindet man einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks mit den Ecken desselben und konstruirt zu diesen drei Strahlen den jedesmaligen vierten harmonischen zugeordneten Strahl, indem je zwei Dreiecksseiten das andere Paar zugeordneter Strahlen sind, so treffen die so konstruirten drei Strahlen die gegenüberliegenden Dreiecksseiten in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.*

Dieser Satz ist von besonderem Interesse darum, weil er ein eigenthümliches (reciprokes) Entsprechen von sämmtlichen Geraden einer Ebene zu den Punkten derselben darbietet, worauf hier näher einzugehen der Raum nicht gestattet. Es bleibt noch übrig, die analoge Betrachtung für das vollständige Vierseit, d. h. vier beliebige in der Ebene liegende gerade Linien anzustellen; da der Gang der Untersuchung aber genau derselbe ist, so genüge es, die Resultate anzugeben:

*Werden die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits* d. h. wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Seiten des vollständigen Vierseits, vier beliebige unendlich lange Gerade in der Ebene, bedeuten, die Schnittpunktenpaare

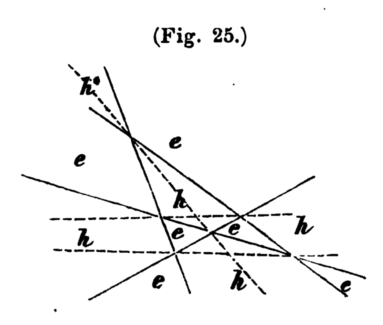
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \text{ und } (\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \quad - \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{D})$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) \quad - \quad (\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

*mit irgend einem Punkte der Ebene durch gerade Linien verbunden, so bilden dieselben drei Paare konjugirter Strahlen eines Strahlsystems, oder sind sechs Strahlen in Involution.*

Wenden wir das oben gegebene Kriterium (§ 17) an, um zu entscheiden, wann das Strahlsystem ein elliptisches und wann es ein hyperbolisches wird, so finden wir für die Lage des Punktes in dem einen oder andern Falle verschiedene Regionen der Ebene. Durch die vier geraden Linien $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ wird nämlich die ganze unendliche Ebene in elf Gebiete zerschnitten, von denen drei einen endlichen, die andern acht einen unendlich grossen Inhalt haben; von diesen elf Räumen sind fünf von solcher Beschaffenheit, dass, wenn in ihnen der Punkt liegt, sein Strahlsystem hyperbolisch wird (wir haben diese Räume in

Fig. 25 mit *h* bezeichnet), die andern sechs Räume aber liefern für jeden in ihnen enthaltenen Punkt ein elliptisches Strahlsystem.

(Fig. 25.)




Die fünf Räume *h* sind gerade diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, während die sechs Räume *e* von den Diagonalen nicht getroffen werden.

Lassen wir insbesondere eine von den vier Geraden (es sei $\mathfrak{D}$) in die Unendlichkeit rücken dadurch, dass wir zwei ihrer Schnittpunkte ins Unendliche versetzen, womit die ganze gerade Linie ins Unendliche geht, also auch ihr dritter Schnittpunkt, so bleibt nur ein Dreiseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ im Endlichen zurück; die drei Diagonalen werden die durch die Ecken des Dreiseits zu den Seiten gezogenen Parallelen; verbinden wir einen beliebigen Punkt $P$ der Ebene mit den Ecken des Dreiseits und ziehen durch ihn Parallele zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten, so erhalten wir in $P$ sechs Strahlen in Involution; bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ die ersteren drei Strahlen und mit $\alpha\beta\gamma$ die letzteren, so gilt nach § 17 ($\mathrm{II}^1$) die Relation

$$\sin(\mathfrak{a}\beta)\,\sin(\mathfrak{b}\gamma)\,\sin(\mathfrak{c}\alpha) = \sin(\mathfrak{a}\gamma)\,\sin(\mathfrak{b}\alpha)\,\sin(\mathfrak{c}\beta);$$

weil aber $\alpha\beta\gamma$ resp. parallel laufen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, so können wir auch schreiben:

$$\frac{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{B})}{\sin(\mathfrak{a}\mathfrak{C})}\cdot\frac{\sin(\mathfrak{b}\mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{b}\mathfrak{A})}\cdot\frac{\sin(\mathfrak{c}\mathfrak{A})}{\sin(\mathfrak{c}\mathfrak{B})} = 1$$

und erhalten den Satz:

Verbindet man bei einem Dreiseit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Ecken desselben $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ $(\mathfrak{C}, \mathfrak{A})$ mit einem beliebigen Punkte der Ebene durch Strahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so zerfällt jeder Winkel des Dreiseits durch je einen dieser Strahlen in zwei Theilwinkel: $(\mathfrak{c}\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{c}\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{b}\mathfrak{A})$; das Produkt der sinus dreier solcher Theilwinkel, deren Schenkel nicht zusammenfallen, ist gleich dem Produkt der sinus der drei übrigen.

Die Vervollständigung und Umkehrung dieses Satzes lautet, analog dem obigen, wie folgt:

Wenn durch die Ecken eines Dreiseits $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ drei

Strahlen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ von solcher Beschaffenheit gehen, dass von den sechs Theilwinkeln, in welche die Winkel des Dreiseits durch die Strahlen zerfallen: ($\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}$) ($\mathfrak{a}\,\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}$) ($\mathfrak{b}\,\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{c}\,\mathfrak{A}$) ($\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}$) das Produkt (absolut genommen) der sinus dreier, die keinen gemeinschaftlichen Schenkel haben, gleich dem Produkt der sinus der drei andern Theilwinkel ist, so schneiden sich 1) entweder die drei Strahlen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in einem Punkte, nämlich sobald von den Schnittpunkten ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$) ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$) ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}$) der Strahlen mit den gegenüber liegenden Seiten des Dreiseits einer oder alle drei zwischen den Ecken des Dreiseits liegen, oder 2) diese drei Schnittpunkte der Strahlen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ mit den gegenüber liegenden Seiten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ liegen in einer geraden Linie, sobald von ihnen keiner oder zwei zwischen die Ecken des Dreiseits fallen.

Es liegt nicht in unserer Absicht, auf die mannichfachen Anwendungen dieser Fundamentalsätze der Transversalentheorie einzugehen, vielmehr kam es nur darauf an, den Zusammenhang derselben mit der Involution anzudeuten und dadurch auch jene Theorie auf die gemeinsame Quelle projektivischer Beziehungen zurückzuführen.

## § 19. Besondere Fälle projektivischer Beziehung: Aehnlichkeit, Gleichheit.

Die perspektivische Lage zweier Gebilde gestattet einige besondere Annahmen, welche zu besonderen Fällen projektivischer Beziehung führen und hier noch erörtert werden müssen.

*a*) Es kann bei der perspektivischen Lage eines Strahlbüschels und einer Punktreihe der in § 2 ausgenommene besondere Fall eintreten, dass der Mittelpunkt $B$ des Strahlbüschels in dem Träger $\mathfrak{A}$ der Punktreihe selbst liegt; es treffen alsdann alle durch $B$ gehende Strahlen die Punktreihe $\mathfrak{A}$ in einem einzigen Punkte, dem Punkte $B$ selbst, mit Ausnahme eines einzigen durch $B$ gehenden Strahls, desjenigen nämlich, welcher mit dem Träger $\mathfrak{A}$ der Punktreihe zusammenfällt; jeder Punkt der Punktreihe darf als ein Schnittpunkt dieses besonderen Strahles mit dem Träger der Punktreihe angesehen werden und die projektivische Beziehung beider Gebilde gestaltet sich in der eigenthümlichen Weise, dass allen Strahlen des Strahlbüschels ein einziger Punkt der Punktreihe entsprechend ist mit Ausnahme eines Strahls,

welchem sämmtliche Punkte der Punktreihe entsprechen. Es ist wichtig, auch ein solches Verhalten, welches bei geometrischen Untersuchungen sich öfters darbietet, als projektivische Beziehung aufzufassen. Ebenso kann es bei der perspektivischen Lage zweier Punktreihen vorkommen, dass der Projektionspunkt (§ 10) in eine der beiden Geraden selbst zu liegen kommt; in diesem Fall werden die allen Punkten der andern Geraden entsprechenden Punkte in einem Punkte der ersteren (dem Projektionspunkte) vereinigt sein mit Ausnahme eines Punktes, des Schnittpunktes beider Träger, welchem wiederum alle Punkte der ersten Geraden als entsprechend angesehen werden müssen. Ebenso ist es bei der perspektivischen Lage zweier Strahlbüschel, wenn der perspektivische Durchschnitt (§ 10) durch einen der Mittelpunkte selbst hindurchgeht; in diesem Fall entspricht allen Strahlen des einen Strahlbüschels ein einziger Strahl des andern mit Ausnahme eines einzigen Strahls, dem wiederum sämmtliche Strahlen des andern Strahlbüschels entsprechen; diese beiden isolirt stehenden Strahlen sind der perspektivische Durchschnitt und die Verbindungslinie der Mittelpunkte. Wir werden später Gelegenheit haben, diesem sogenannten p a r a b o l i s c h e n Fall projektivischer Beziehung öfters zu begegnen.

*b*) Wenn der Mittelpunkt eines Strahlbüschels in die Unendlichkeit rückt, so geht das Strahlbüschel in eine Schaar von Parallellinien über, welche dieselbe Richtung haben; ein solches Gebilde ist ebenfalls als ein Strahlbüschel anzusehen. Das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen $a\,b\,c\,d$ eines solchen Strahlbüschels wird (obgleich die Winkel zwischen je zweien sämmtlich 0 sind) gleich dem von den vier Schnittpunkten irgend einer Transversale mit ihnen sein, und insbesondere, wenn man durch $(x\,y)$ den Abstand zwei Parallelen $x\,y$ bezeichnet,

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d},$$

wo also die Abstände an Stelle der sinus der Winkel treten.

Wenn zwei Punktreihen in perspectivischer Lage ihren Projektionspunkt im Unendlichen haben, also sämmtliche Projektionsstrahlen parallel sind, so gehen die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ selbst ins Unendliche, denn ein Projektionsstrahl, welcher durch den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{q}_\infty$ der ersten Punktreihe und durch den unendlich entfernten Projektionspunkt geht, fällt ganz

ins Unendliche, trifft also auch die andere Punktreihe in dem entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}_1$, der im Unendlichen liegen muss; es fallen also $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}$ zusammen, ebenso wie $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{q}_1$, oder die unendlich entfernten Punkte beider Punktreihen sind entsprechende; die Gleichheit der Doppelverhältnisse vereinfacht sich in diesem Fall, weil die entsprechenden Punkte $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$ beide unendlich entfernt sind; das Doppelverhältniss

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{q}) = (\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{q}_1)$$

geht über in

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1},$$

d. h. irgend zwei Abschnitte auf einer Punktreihe haben dasselbe Verhältniss zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte der andern, was denn auch bei der perspektivischen Lage aus bekannten Elementarsätzen der Aehnlichkeit folgt. Aus diesem Grunde heissen zwei solche projektivische Punktreihen, bei denen entsprechende Strecken in konstantem Verhältniss zu einander stehen, **projektivisch-ähnliche Punktreihen** und haben die charakteristische Eigenschaft, dass ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind; auch umgekehrt sind zwei projektivische Punktreihen immer projektivisch-ähnlich, sobald ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende sind. Die Beziehung zweier projektivisch-ähnlichen Punktreihen ist schon durch **zwei** willkührlich als entsprechend angenommene Punktenpaare vollständig bestimmt, weil die unendlich entfernten Punkte als das dritte Paar entsprechender Punkte eo ipso gegeben sind. Es ist ferner zu bemerken, dass, weil bei zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen die unendlich entfernten Punkte selbst entsprechende sind, jedem endlichen Punkte der einen Reihe immer ein endlicher der andern entsprechen muss. Entsprechende gleiche Strecken kann es bei zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen im Allgemeinen gar nicht geben, weil das Verhältniss irgend zweier entsprechender Strecken immer dasselbe konstante ist; es müsste denn dieses Verhältniss $= 1$ sein, dann würden aber alle entsprechenden Strecken einander gleich sein

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1;$$

in diesem Fall heissen die Punktreihen **projektivisch-gleich.** Zwei projektivisch-gleiche Punktreihen sind also solche, bei denen je zwei entsprechende Strecken einander gleich sind. Für die

perspektivische Lage und bei beliebiger Lage der Träger muss der Projektionspunkt nicht nur im Unendlichen liegen, sondern einer derjenigen beiden unendlich-entfernten Punkte sein, welche in den Richtungen der Halbirungslinien der Winkel zwischen den Trägern liegen, was aus bekannten Elementarsätzen der Kongruenz folgt. Die Beziehung zweier projektivisch-gleicher Punktreihen ist durch ein einziges willkührlich als entsprechend angenommenes Punktenpaar vollständig bestimmt, weil sie ausserdem die unendlich entfernten Punkte als zweites Paar entsprechender Punkte haben und jedes dritte Paar durch den Werth 1 des konstanten Verhältnisses entsprechender Strecken erhalten wird, $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}_1$, wobei es allerdings zweifelhaft bleibt, ob der dem $\mathfrak{x}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ nach der einen oder entgegengesetzten Seite von $\mathfrak{a}_1$ liegt, was durch die alleinige Annahme des Paares $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ noch nicht bestimmt wird.

Werden zwei projektivisch-ähnliche Punktreihen beliebig auf einander gelegt, so giebt es immer ausser dem schon vorhandenen unendlich-entfernten Doppelpunkte noch einen bestimmten zweiten Doppelpunkt, dessen Konstruktion sich aus § 15 ergiebt; die beiden Doppelpunkte sind also bei projektivisch-ähnlichen Punktreihen, welche auf einander liegen, immer reell, mögen die Punktreihen gleichlaufend oder ungleichlaufend sein.

Werden zwei projektivisch-gleiche Punktreihen beliebig auf einander gelegt und sind sie gleichlaufend, so fällt auch der zweite Doppelpunkt in die Unendlichkeit, was sich aus der Konstruktion desselben ergiebt, und keine zwei entsprechende Punkte fallen im Endlichen zusammen, aber es kann auch vorkommen, dass alle Paare entsprechender Punkte über einander fallen; dies tritt immer ein, sobald irgend ein Paar entsprechender Punkte, ausser den unendlich entfernten, zusammenfallen. Sind dagegen die projektivisch-gleichen Punktreihen, welche auf einander liegen, ungleichlaufend, so giebt es ausser dem unendlich entfernten Punkt noch einen Doppelpunkt im Endlichen, welcher in der Mitte liegt zwischen allen Paaren entsprechender Punkte. Zwei solche auf einander liegende projektivisch-gleiche Punktreihen, welche ungleichlaufend sind, konstituiren daher immer ein Doppel-Gebilde, wie es bereits oben (§ 16) als hyperbolisch-gleichseitiges Punktsystem bezeichnet worden ist.

Zwei projektivisch-ähnliche Punktreihen können nie so auf

einander gelegt werden, dass sie ein Punktsystem bilden, weil es bei ihnen gar keine entsprechende gleiche Strecken giebt.

Durch besondere Annahme für die Lage des Projektionspunktes bei beliebiger Lage der Träger zweier perspektivischer Punktreihen kamen wir zu den angegebenen besonderen Fällen ähnlicher und gleicher Punktreihen; lassen wir den Projektionspunkt beliebig und nehmen für die Träger besondere Lagen an, so erhalten wir dieselben speciellen Fälle; wenn nämlich die Träger der beiden Punktreihen einander parallel laufen, so werden die auf ihnen entstehenden Punktreihen bei beliebiger Annahme des Projektionspunktes projektivisch-ähnlich, weil die unendlich-entfernten Punkte entsprechende werden; liegt der Projektionspunkt zwischen den beiden Trägern, so werden die Punktreihen ungleichlaufend sein (ihr Richtungssinn entgegengesetzt); liegt er aber auf derselben Seite von beiden Trägern, so werden die Punktreihen gleichlaufend. Liegt endlich bei parallelen Trägern der Projektionspunkt im Unendlichen, so werden die Punktreihen projektivisch-gleich; es können aber auch projektivisch-gleiche Punktreihen bei parallelen Trägern dadurch hervorgerufen werden, dass der Projektionspunkt zwischen beiden Trägern gleich weit von ihnen abstehend angenommen wird.

*c*) Die perspektivische Lage zweier Strahlbüschel kann nur dadurch eine besondere Vereinfachung erfahren, dass der perspektivische Durchschnitt in die Unendlichkeit rückt, dadurch werden je zwei entsprechende Strahlen parallel; die Strahlbüschel heissen projektivisch-gleich, weil je zwei entsprechende Winkel gleich sind:

$$(ab) = (a_1 b_1).$$

Die Strahlbüschel haben gleichen Drehungssinn, sind gleichlaufend; aber auch bei endlicher Annahme des perspektivischen Durchschnitts können wir projektivisch-gleiche Strahlbüschel erhalten, wenn wir nämlich den perspektivischen Durchschnitt in der Mitte zwischen den Mittelpunkten $BB_1$ beider Strahlbüschel auf ihrer Verbindungslinie senkrecht annehmen; dann haben sie aber entgegengesetzten Drehungssinn, sind ungleichlaufend. Zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel sind durch ein einziges willkührlich angenommenes Paar entsprechender Strahlen vollständig bestimmt, sobald noch hinzugefügt wird, ob sie gleichlaufend oder ungleichlaufend sein sollen, was sonst unentschieden bleibt.

Haben zwei gleichlaufende projektivisch-gleiche Strahlbüschel irgend ein Paar entsprechender Strahlen parallel, so sind sämmtliche Paare entsprechender Strahlen parallel, ihre Schnittpunkte liegen also alle im Unendlichen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte enthält aber bei dieser Lage zwei entsprechende Strahlen, die zusammenfallen, folglich sind die beiden Strahlbüschel in perspektivischer Lage (§ 11). Da nun bei der perspektivischen Lage zweier Strahlbüschel im Allgemeinen immer die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden liegen, so halten wir dies consequenter Weise auch für diesen ausgezeichneten Fall fest. Wir sagen daher: „alle unendlich entfernten Punkte der Ebene liegen in einer Geraden", und nennen diese Gerade $G_\infty$ die unendlich entfernte Gerade; sie bedeutet uns nichts anderes, als den perspektivischen Durchschnitt zweier gleichlaufender projektivisch-gleicher Strahlbüschel in perspektivischer Lage. Werden zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel concentrisch gelegt, so fallen, wenn sie gleichlaufend sind, entweder gar keine entsprechenden Strahlen auf einander, oder es fallen sämmtliche Paare entsprechender Strahlen auf einander, so dass also die Strahlbüschel identisch liegen.

Stehen irgend zwei entsprechende Strahlen bei zwei concentrisch liegenden projektivisch-gleichen Strahlbüscheln, welche gleichlaufend sind, auf einander senkrecht, so stehen alle Paare entsprechender Strahlen auf einander senkrecht, und dies Doppelgebilde fällt zusammen mit dem oben (§ 17) angegebenen Kreissystem.

Wenn die beiden Strahlbüschel dagegen ungleichlaufend sind, so fallen zwei Paar entsprechende Strahlen auf einander; diese Doppelstrahlen stehen auf einander rechtwinklig und sind die Halbirungslinien der Winkel irgend eines Paares entsprechender Strahlen $(x\,x_1)$. Zwei solche concentrische projektivisch-gleiche Strahlbüschel konstituiren daher immer ein Doppel-Gebilde, wie es bereits oben (§ 17) als hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem bezeichnet worden ist.

# Zweiter Abschnitt.

## Der Kegelschnitt als Erzeugniss projektivischer Gebilde.

### § 20. Zwei projektivische Punktreihen in allgemeiner (nicht perspektivischer) Lage.

Nachdem wir in dem ersten Abschnitt aus der perspektivischen Lage zweier Gebilde nicht nur das Wesen ihrer projektivischen Beziehung abgeleitet, sondern auch besondere Elemente und eigenthümliche Verbindungen derselben genau untersucht haben, gehen wir nunmehr dazu über, zwei projektivische Gebilde in allgemeiner, d. h. nicht perspektivischer Lage zu betrachten und zwar zunächst zwei projektivische Punktreihen. Während bei der perspektivischen Lage zweier projektivischer Punktreihen sämmtliche Projektionsstrahlen durch einen festen Punkt, den Projektionspunkt, laufen, werden bei allgemeiner Lage die Projektionsstrahlen, d. h. die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte der beiden Punktreihen, nicht mehr durch ein und denselben Punkt laufen, vielmehr in gewisser Weise die Ebene erfüllen und das allgemeine Gesetz, welchem dieses Chaos von Strahlen unterworfen ist, werden wir nunmehr zu erforschen haben.*)

*) Auch an die perspektivische Lage zweier Gebilde lässt sich die Erzeugung des Kegelschnitts anknüpfen, was wir indessen hier nur beiläufig erwähnen wollen: Zwei projektivische Punktreihen liegen perspektivisch, wenn in dem Schnittpunkte ihrer Träger zwei entsprechende Punkte vereinigt sind (§ 11); die Projektionsstrahlen laufen dann sämmtlich durch einen Punkt, den Projektionspunkt. Denken wir uns die Träger der beiden Punktreihen auf zwei festen Geraden und bei festgehaltener projektivischer Beziehung so verschoben, dass successive andere und andere Paare entsprechender Punkte in den Schnittpunkt rücken, so werden immer neue perspektivische Lagen derselben beiden Punktreihen auftreten und bei kontinuirlicher Bewegung der Art wird der Ort des

Hierzu bedarf es eines expediten Mittels, um beliebig viele Projektionsstrahlen herzustellen, und wir haben bereits oben (§ 10 a)) eine Konstruktion angegeben, durch welche aus drei gegebenen Paaren entsprechender Punkte, die zur Bestimmung projektivischer Beziehung erforderlich sind, beliebig viele andere, also beliebig viele Projektionsstrahlen durch blosses Ziehen von geraden Linien ermittelt werden können; diese Konstruktion enthielt noch eine gewisse Willkührlichkeit, welche passend benutzt zu ihrer Vereinfachung führt. Seien $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ drei Paar entsprechende Punkte der gegebenen Punktreihen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ und bezeichnen wir die Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ resp. durch $abc$; sei ein beliebiger zu ermittelnder vierter Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ oder $x$ und bezeichnen wir die Schnittpunkte

$$(x, b) = B \qquad (x, c) = B_1,$$

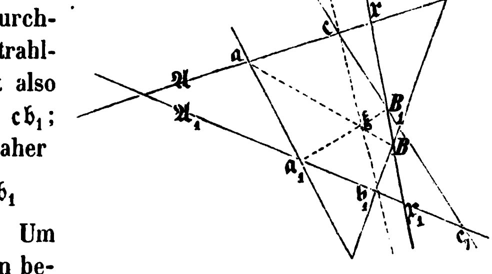
so werden die vier Strahlen $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$, $B\mathfrak{x}$ mit den vier Strahlen $B_1\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{c}_1$, $B_1\mathfrak{x}_1$ projektivisch sein müssen, und da diese beiden Strahlbüschel $(B)$ $(B_1)$ in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte $(B, B_1) = x$ zwei entsprechende Strahlen vereinigt haben, so liegen sie perspektivisch, also die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden (ihrem perspektivischen Durchschnitt), d. h. die Schnittpunkte

---

Projektionspunktes eine Hyperbel, welche die beiden Geraden, auf denen die Träger sich fortschieben, zu Asymptoten hat (§ 26). Anderseits liegen zwei projektivische Strahlbüschel perspektivisch, wenn auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen fallen. Denken wir uns die beiden Strahlbüschel um die festgehaltenen Mittelpunkte und bei festgehaltener projektivischer Beziehung so gedreht, dass successive andere und andere Paare entsprechender Strahlen in die Verbindungslinie der Mittelpunkte fallen, so verändert der perspektivische Durchschnitt jedesmal seine Lage; der gesammte Ort, welchen der perspektivische Durchschnitt umhüllt, ist ein Kegelschnitt, der die festen Mittelpunkte der Strahlbüschel zu Brennpunkten hat und Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem die beiden Strahlbüschel gleichlaufend oder ungleichlaufend sind. Der Beweis dieser Behauptung ergiebt sich bei unserem Gange der Betrachtung erst später (§ 36). Bemerkenswerth ist die eigenthümliche Analogie, welche hier zwischen Asymptoten und Brennpunkten des Kegelschnitts auftritt und dass man durch diese Betrachtung unmittelbar aus dem Grundprinzip der projektivischen Beziehung zu den Fokaleigenschaften der Kegelschnitte geführt wird.

$$(B\mathfrak{a},\ B_1\mathfrak{a}_1)\quad (B\mathfrak{b},\ B_1\mathfrak{b}_1)\quad (B\mathfrak{c},\ B_1\mathfrak{c}_1)$$

auf einer Geraden. Nun fällt aber $B\mathfrak{b}$ mit $B\mathfrak{b}_1$ zusammen (Fig. 26), also der Punkt $(B\mathfrak{b}, B_1\mathfrak{b}_1)$ ist der Punkt $\mathfrak{b}_1$ und $B_1\mathfrak{c}_1$ fällt mit $B_1\mathfrak{c}$ zusammen, also $(B\mathfrak{c}, B_1\mathfrak{c}_1)$ ist $\mathfrak{c}$; der perspektivische Durchschnitt jener beiden Strahlbüschel $(B)$ $(B_1)$ ist also die Verbindungslinie $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$; es schneiden sich daher



(Fig. 26.)

$$B\mathfrak{a}\qquad B_1\mathfrak{a}_1\qquad \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$$

in einem Punkte $\mathfrak{x}$. Um nun umgekehrt einen beliebigen Projektionsstrahl $x$ zu konstruiren, haben wir irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ der Verbindungslinie $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ zu verbinden; trifft $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ den Projektionsstrahl $b$ in $B$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}$ den Projektionsstrahl $c$ in $B_1$, so ist $BB_1$ ein vierter Projektionsstrahl $x$. Hierdurch wird es leicht, beliebig viele Projektionsstrahlen zu konstruiren; lassen wir den Punkt $\mathfrak{x}$ die ganze Linie $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ durchwandern, so erhalten wir sämmtliche Projektionsstrahlen; gelangt $\mathfrak{x}$ insbesondere nach $\mathfrak{c}$, so erhalten wir als Projektionsstrahl den Träger $\mathfrak{A}$ der einen gegebenen Punktreihe selbst; gelangt $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{b}_1$, so tritt der Träger $\mathfrak{A}_1$ der andern Punktreihe als Projektionsstrahl auf. Die Träger der beiden gegebenen Punktreihen sind also selbst Projektionsstrahlen. Zugleich erkennen wir, indem wir den Punkt $\mathfrak{x}$ die ganze Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ durchlaufen lassen, dass die Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}$ zwei perspektivische Strahlbüschel beschreiben, folglich die Punkte $B$ und $B_1$ auf den beiden Geraden $b$ und $c$ zwei projektivische Punktreiben erzeugen; die Projektionsstrahlen $b$ und $c$ werden also von sämmtlichen Projektionsstrahlen $x$ in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten, gerade so, wie die Träger der beiden ursprünglich gegebenen Punktreihen selbst; da aber an Stelle der Projektionsstrahlen $b$ und $c$ irgend zwei andere treten können, für die dasselbe gelten muss, so haben wir das wichtige Resultat gefunden: Die Gesammtheit der Projektionsstrahlen (Verbindungslinien entsprechender Punkte) zweier projektivischer Punktreihen trifft irgend zwei unter ihnen allemal in zwei projektivischen

Punktreihen. Hierdurch verlieren die Träger der ursprünglich gegebenen beiden Punktreihen, welche selbst Projektionsstrahlen sind, ihre hervorragende Stellung und treten in die Gesammtheit aller übrigen Projektionsstrahlen ein; denn es steht uns jetzt frei, irgend zwei andere Projektionsstrahlen als Träger zweier neuen erzeugenden Punktreihen aufzufassen, welche auf ihnen durch die Gesammtheit der Projektionsstrahlen fixirt werden. Es ergiebt sich ferner, dass die Gesammtheit der Projektionsstrahlen durch irgend fünf, die willkührlich angenommen werden dürfen, vollständig bestimmt ist; denn man kann von diesen fünf Geraden zwei als die Träger zweier erzeugenden Punktreihen und die drei andern als drei Projektionsstrahlen auffassen, welche drei Paar entsprechende Punkte auf jenen fixiren; hierdurch ist dann die ganze projektivische Beziehung der beiden Punktreihen bestimmt. Welche von den fünf Geraden wir als Träger auffassen wollen, bleibt ganz willkührlich. Die obige Konstruktion eines beliebigen Projektionsstrahls $x$ drückt anderseits eine Bedingung zwischen irgend sechs aus der Gesammtheit der Projektionsstrahlen aus. Die sechs Projektionsstrahlen bilden nämlich ein Sechsseit, von dem die Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,B_1\;B\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1$ als Ecken (d. h. Schnittpunkte zweier Seiten) aufgefasst werden können, und zwar ein sogenanntes einfaches Sechsseit (s. Steiner's syst. Entw. geom. Gest. S. 72), indem wir die Seiten der Reihe nach so durchlaufen, dass die Ecken $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,B_1\,B\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1$ einander folgen; die drei Verbindungslinien

$$B\,\mathfrak{a} \quad B_1\,\mathfrak{a}_1 \quad \mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1,$$

welche nach dem Obigen sich in einem Punkte schneiden müssen, erscheinen als Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken dieses Sechsseits (der ersten und vierten, zweiten und fünften, dritten und sechsten Ecke) und wir können demnach als Bedingung zwischen irgend sechs Projektionsstrahlen folgende aussprechen:

Werden irgend sechs Projektionsstrahlen als ein einfaches Sechsseit aufgefasst, so schneiden sich die drei Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken desselben (Hauptdiagonalen) in einem Punkte. (Brianchon'scher Satz.)

Aus den sechs Projektionsstrahlen lässt sich aber auf sechzig Arten ein einfaches Sechsseit herstellen; auf die eigenthümlichen

Beziehungen zwischen denselben gehen wir hier vorläufig nicht ein (§ 28). Die Gesammtheit der Projektionsstrahlen besitzt ausser den bereits gefundenen Eigenthümlichkeiten noch die charakteristische Eigenschaft, dass durch einen beliebigen Punkt der Ebene im Allgemeinen höchstens zwei Projektionsstrahlen gehen, denn verbinden wir einen beliebigen Punkt $P$ der Ebene mit den beiden erzeugenden Punktreihen durch Strahlen, so erhalten wir in $P$ zwei concentrische Strahlbüschel $P(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\ldots)$ und $P(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1\ldots)$, welche projektivisch sind; diese haben (§ 14) im Allgemeinen zwei Doppelstrahlen, welche offenbar Projektionsstrahlen sein müssen. Es kann aber auch vorkommen, dass nur einer, d. h. zwei zusammenfallende, oder auch keine Doppelstrahlen bei zwei concentrischen projektivischen Strahlbüscheln existiren. Es wird nun von der Lage des Punktes $P$ abhängen, ob durch ihn zwei oder nur einer oder keine Projektionsstrahlen hindurchgehen, und wir werden diejenigen Gebiete der Ebene aufzusuchen haben, in denen der Punkt $P$ liegen muss, damit der eine oder andere Fall eintritt. Verfolgen wir auf einem Träger $\mathfrak{A}$ der beiden erzeugenden Punktreihen einen Punkt $\mathfrak{x}$, so sehen wir, dass durch ihn im Allgemeinen immer zwei Projektionsstrahlen gehen, nämlich der Träger $\mathfrak{A}$, welcher selbst ein Projektionsstrahl ist, und der Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$; nur einmal kommt es vor, dass diese beiden Projektionsstrahlen zusammenfallen, nämlich dann, wenn der Punkt $\mathfrak{x}_1$ in den Schnittpunkt der beiden Träger rückt; nennen wir diesen Schnittpunkt $\mathfrak{f}_1$, als der zweiten Punktreihe angehörig, und seinen entsprechenden der ersten Punktreihe $\mathfrak{f}$, so werden, wenn $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{f}$ sich befindet, die beiden durch ihn gehenden Projektionsstrahlen in dem Träger $\mathfrak{A}$ selbst zusammenfallen; durch den Punkt $\mathfrak{f}$, welchen wir den Berührungspunkt des Projektionsstrahls nennen wollen (die Benennung wird durch das Folgende erklärt) und welcher entsprechend ist dem im Schnittpunkte beider Träger liegenden Punkte der andern Punktreihe, geht also nur ein Projektionsstrahl $\mathfrak{A}$. Ebenso verhält es sich mit dem Träger $\mathfrak{A}_1$ der zweiten Punktreihe; durch jeden Punkt dieses Trägers gehen allemal zwei Projektionsstrahlen mit Ausnahme eines einzigen $\mathfrak{e}_1$, welcher dem im Schnittpunkte beider Träger liegenden Punkt $\mathfrak{e}$ der ersten Punktreihe entsprechend ist. Durch den Berührungspunkt $\mathfrak{e}_1$ geht nur ein Projektionsstrahl, der Träger $\mathfrak{A}_1$. Da wir

nun nach dem Obigen an Stelle der beiden ursprünglichen Punktreihen zwei neue erzeugende Punktreihen setzen können, welche auf irgend zwei Projektionsstrahlen, als Träger aufgefasst, durch die Gesammtheit aller Projektionsstrahlen fixirt werden, so giebt es auf jedem Projektionsstrahle einen einzigen bestimmten Punkt, seinen Berührungspunkt, welcher die Eigenschaft hat, dass für ihn der Projektionsstrahl der einzige ist, welcher hindurchgeht, während durch jeden andern seiner Punkte noch ein zweiter Projektionsstrahl hindurchgeht. Der Berührungspunkt eines Projektionsstrahls ist daher auch als derjenige Punkt aufzufassen, in welchem jener von sich selbst geschnitten wird. Man könnte das Bedenken haben, ob auch bei einem Projektionsstrahl, welcher mit diesem oder jenem andern als Träger projektivischer Punktreihen zur Erzeugung der Gesammtheit der Projektionsstrahlen zusammengefasst wird, immer ein und derselbe Punkt als Berührungspunkt hervorgeht; dies Bedenken erledigt sich dadurch, dass immer dieselbe Gesammtheit der Projektionsstrahlen resultirt, welche Punktreihen man auch als erzeugende annehmen mag; wenn daher bei einer Erzeugungsweise auf einem Projektionsstrahl nur ein einziger Punkt sich vorfindet von der Beschaffenheit, dass für ihn der Projektionsstrahl der allein hindurchgehende ist, so kann bei einer andern Erzeugungsweise kein neuer Punkt derselben Beschaffenheit auftreten, weil dieselbe Gesammtheit von Projektionsstrahlen wieder auftritt. Es giebt also auf jedem Projektionsstrahl nur einen einzigen bestimmten Berührungspunkt. Fassen wir nun die Gesammtheit der Projektionsstrahlen in der Weise auf, dass wir zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ die beiden Träger kontinuirlich durchlaufen lassen und auf der Verbindungslinie $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$, d. h. dem Projektionsstrahl $x$, den jedesmaligen Berührungspunkt bestimmen, so wird bei dieser Bewegung der Projektionsstrahl $x$ ein gewisses (unendlich grosses) Gebiet der Ebene durchstreifen, welches alle solche Punkte $P$ enthält, durch die je zwei Projektionsstrahlen gehen; dieses Gebiet wird begrenzt von einer gewissen Kurve, dem Orte der Berührungspunkte auf sämmtlichen Projektionsstrahlen; durch jeden Punkt $P$ dieses Ortes geht nur je ein Projektionsstrahl und der übrige Theil der Ebene enthält daher das Gebiet derjenigen Punkte $P$ der Ebene, durch welche keine Projektionsstrahlen gehen, denn dieser Theil der Ebene wird von gar keinem Projektionsstrahl

getroffen. Es giebt also zwei Gebiete der Ebene, das eine enthält nur solche Punkte $P$, durch die je zwei Projektionsstrahlen gehen, das andere solche Punkte $P$, durch welche kein Projektionsstrahl geht, und beide Gebiete werden von einander getrennt durch den Ort derjenigen Punkte, für welche es immer nur einen hindurchgehenden Projektionsstrahl giebt; diese Grenzkurve ist der Ort sämmtlicher Berührungspunkte, sie heisst das Erzeugniss der beiden projektivischen Punktreihen und ist der eigentliche Gegenstand unserer Untersuchung. Wir können uns ihre Entstehung in der Weise anschaulich machen, dass wir uns die ganze unendliche Ebene schwarz denken und jeden Projektionsstrahl als unendlich lange gerade Linie von weisser Farbe; die Gesammtheit der Projektionsstrahlen wird dann einen gewissen (unendlich grossen) Theil der Ebene weiss machen und den übrigen Theil schwarz lassen; die Grenze zwischen dem schwarzen und weissen Theil der Ebene ist eben die zu untersuchende Kurve. Dass in der That die Ortskurve der Berührungspunkte die Grenze zwischen beiden Gebieten der Ebene bildet, machen wir uns noch in folgender Weise klar: Seien $a$ und $b$ irgend zwei Projektionsstrahlen, $\alpha$ und $\beta$ die respektiven Berührungspunkte auf ihnen und $s$ ihr Schnittpunkt. Halten wir den einen Projektionsstrahl $a$ mit seinem Berührungspunkt $\alpha$ fest, verändern aber auf ihm den Schnittpunkt $s$, so verändert sich der zweite Projektionsstrahl $b$ und der ihm zugehörige Berührungspunkt $\beta$; die Verbindungslinie $\alpha\beta$ ist eine veränderliche Sehne der Ortskurve, deren einer Endpunkt $\alpha$ fest bleibt, während der andere $\beta$ sich auf ihr bewegt. Rücken wir nun mit dem Punkte $s$ allmählich nach $\alpha$, bis $s$ in $\alpha$ hineinfällt, so wird auch der zweite Projektionsstrahl $b$ mit $a$ zusammenfallen müssen, denn durch $\alpha$ giebt es nur einen Projektionsstrahl; der Berührungspunkt $\beta$ muss aber auch in $\alpha$ hineinfallen, denn der Projektionsstrahl $a$ besitzt nur einen einzigen Berührungspunkt $\alpha$. Der Projektionsstrahl $a$ ist also die Grenzlage einer veränderlichen Sehne $\alpha\beta$, deren einer Endpunkt $\alpha$ fest bleibt, während der andere $\beta$ allmählich auf der Ortskurve nach $\alpha$ hinrückt. Eine solche Grenzlage einer veränderlichen Sehne nennt man bekanntlich Tangente der Kurve und den festen Punkt ihren Berührungspunkt; die sämmtlichen Projektionsstrahlen sind also Tangenten einer gewissen Ortskurve und die Punkte, in welchen sie die Ortskurve berühren, diejenigen Punkte,

welchen wir bereits oben den Namen Berührungspunkte beigelegt haben, wodurch die Benennung gerechtfertigt wird. Da nun jeder Projektionsstrahl Tangente an der Ortskurve ist und nur einen Punkt, den Berührungspunkt, mit ihr gemein hat, so bildet die Ortskurve der Berührungspunkte die Grenze zwischen denjenigen beiden Gebieten der Ebene, deren eines von sämmtlichen Projektionsstrahlen erfüllt wird, während das andere von keinem getroffen wird. Fassen wir das gewonnene Resultat noch einmal zusammen:

Die Gesammtheit der Projektionsstrahlen zweier projektivischer Punktreihen in allgemeiner Lage, deren Träger ebenfalls ein Paar Projektionsstrahlen sind, umhüllt eine gewisse krumme Linie, welche mit jedem Projektionsstrahl nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat und also der Ort dieser Berührungspunkte ist. Sie zertheilt die ganze Ebene in zwei Gebiete, deren eines von allen Projektionsstrahlen erfüllt wird, während das andere von keinem getroffen wird, oder deren eines alle solche Punkte enthält, durch welche je zwei reelle Projektionsstrahlen (Tangenten der Kurve) gehen, während das andere diejenigen Punkte enthält, durch welche keine Projektionsstrahlen gehen. Durch jeden Punkt der Kurve selbst geht nur ein Projektionsstrahl, die Tangente an ihr. Diese als das Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen definirte Kurve nennen wir „Kegelschnitt"; sie ist zweiter Klasse, weil von einem beliebigen Punkte der Ebene sich höchstens zwei Tangenten an sie ziehen lassen.

Die vorhin für die Gesammtheit der Projektionsstrahlen gefundenen Eigenschaften lassen sich nach dieser Definition als Sätze für die Tangenten eines Kegelschnitts aussprechen, z. B.: „Irgend zwei Tangenten eines Kegelschnitts werden von sämmtlichen in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten." Oder: „Werden irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts zu einem einfachen Sechsseit verbunden, so schneiden sich die drei Hauptdiagonalen desselben in einem Punkte" u. s. w.

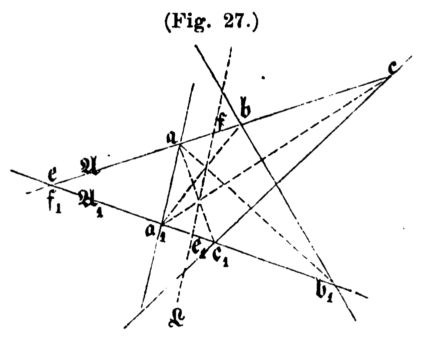
## § 21. Die Berührungspunkte auf den Projektionsstrahlen.

Es ist nun zunächst erforderlich, den Berührungspunkt auf jedem Projektionsstrahl zu konstruiren, um uns von der zu untersuchenden Kurve ein Bild machen zu können. Seien $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ drei Paar entsprechende Punkte zweier erzeugender projektivischer Punktreihen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ drei Projektionsstrahlen, so können wir die § 10, a) angegebene Konstruktion beliebig vieler anderer Projektionsstrahlen dadurch sehr vereinfachen, dass wir die Punkte $B$ und $B_1$ in ein Paar entsprechender Punkte, z. B. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ selbst hineinverlegen, also: wir ziehen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}$; die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{c})$$

bestimmen eine gerade Linie $\mathfrak{L}$, auf welcher sämmtliche Schnittpunkte $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{x})$ liegen müssen, nämlich den perspektivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel, welche in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ ihre Mittelpunkte haben und respektive mit den Punktreihen $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\ldots$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots$ perspektivisch liegen, also projektivisch mit einander sind und perspektivisch liegen, weil die Verbindungslinie der Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen enthält. Jeder Punkt $\mathfrak{z}$ dieser Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ verbunden liefert Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{z}$, welche resp. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ in zwei entsprechenden Punkten $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}$ treffen, also den Projektionsstrahl $x$ liefern. Die Gerade $\mathfrak{L}$ schneidet aber die Träger der beiden Punktreihen in zwei Punkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, deren entsprechende nach der eben angegebenen Konstruktion in dem Schnittpunkte der beiden Träger vereinigt liegen müssen: $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{e}$ (Fig. 27); da nun nach § 20 diese Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, welche den im Schnittpunkte der beiden Träger vereinigten Punkten entsprechen, die Berührungspunkte auf diesen Trägern als Projektionsstrahlen sind, so geht die gerade Linie $\mathfrak{L}$ durch die gesuchten Berührungspunkte und bestimmt dieselben; da es aber auf jedem Projektionsstrahl (wie $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$) nur einen Berührungs-

(Fig. 27.)



punkt giebt, so bleibt die Gerade $\mathfrak{L}$ unverändert, wenn wir zu ihrer Konstruktion statt der Paare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ irgend welche andere Paare entsprechender Punkte nehmen; also gilt der Satz: Wenn man aus zwei projektivischen Punktreihen irgend zwei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ heraus nimmt, so liegt der Schnittpunkt

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$$

immer auf ein und derselben festen Geraden $\mathfrak{L}$, welche durch die beiden Berührungspunkte der Träger beider Punktreihen hindurchgeht, die den im Schnittpunkte vereinigt liegenden entsprechen.

Dies lässt sich auch folgendermassen als Satz aussprechen:

Sind auf einer Geraden drei beliebige Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ und auf einer zweiten Geraden drei beliebige Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ gegeben, so liegen die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{b})\quad(\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{c})\quad(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{a})$$

auf einer Geraden.

Dieser Satz ist einer Erweiterung fähig, da die Zuordnung des einen Tripels von Punkten zu dem andern in sechsfacher Weise geschehen kann, weil drei Punkte sechs Vertauschungen zulassen; wir erhalten daher sechs solcher gerader Linien, die in eigenthümlichem Zusammenhange mit einander stehen; bezeichnen wir bei diesen sechs Zuordnungen die Schnittpunkte in folgender Weise:

| I. | II. | III. |
|---|---|---|
| $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ | $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ | $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ |
| $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ | $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1$ | $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ |
| $(\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1) = \alpha_3$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1) = \alpha_2$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1) = \alpha_1$ |
| $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1) = \beta_3$ | $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1) = \beta_2$ | $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1) = \beta_1$ |
| $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1) = \gamma_3$ | $(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1) = \gamma_2$ | $(\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1) = \gamma_1$ |
| $\alpha_3\beta_3\gamma_3 = \mathfrak{L}_1$ | $\alpha_2\beta_2\gamma_2 = \mathfrak{L}_2$ | $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \mathfrak{L}_3$ |

| IV. | V. | VI. |
|---|---|---|
| $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ | $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ | $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}$ |
| $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1$ | $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1$ | $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$ |
| $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1) = a_1$ | $(\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1) = b_1$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1) = c_1$ |
| $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1) = a_2$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1;\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1) = b_2$ | $(\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1) = c_2$ |
| $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1) = a_3$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1) = b_3$ | $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1) = c_3$ |
| $a_1a_2a_3 = \mathfrak{L}_4$ | $b_1b_2b_3 = \mathfrak{L}_5$ | $c_1c_2c_3 = \mathfrak{L}_6$ |

Aus dem Schema I, II, III lesen wir die Identität folgender neun Verbindungslinien ab:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 & \beta_1\beta_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 & \gamma_1\gamma_2 = \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \\ \alpha_2\alpha_3 = \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1 & \beta_2\beta_3 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1 & \gamma_2\gamma_3 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 \\ \alpha_3\alpha_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 & \beta_3\beta_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 & \gamma_3\gamma_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 \end{array}$$

und aus dem Schema IV, V, VI die Identität derselben neun Linien

$$\begin{array}{lll} a_1b_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 & a_2b_2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 & a_3b_3 = \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \\ b_1c_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{b}_1 & b_2c_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 & b_3c_3 = \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 \\ c_1a_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{c}_1 & c_2a_2 = \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 & c_3a_3 = \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \end{array}$$

folglich ist z. B. nach Schema IV.

$$\begin{array}{l} (\beta_2\beta_3,\ \gamma_2\gamma_3) = a_1 \\ (\beta_3\beta_1,\ \gamma_3\gamma_1) = a_2 \\ (\beta_1\beta_2,\ \gamma_1\gamma_2) = a_3, \end{array}$$

und da die drei Punkte $a_1\, a_2\, a_3$ in einer geraden Linie $\mathfrak{L}_4$ liegen, so folgt, dass die beiden Dreiecke $\beta_1\beta_2\beta_3$ und $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ perspektivisch liegen (nach dem im § 11 bewiesenen Satze), d. h. $\beta_1\gamma_1$, $\beta_2\gamma_2$, $\beta_3\gamma_3$ oder die drei Linien $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_3$ durch einen Punkt laufen; ebenso weil

$$\begin{array}{l} (a_1b_1,\ a_2b_2) = \gamma_3 \\ (b_1c_1,\ b_2c_2) = \alpha_3 \\ (c_1a_1,\ c_2a_2) = \beta_3 \end{array}$$

und $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ in gerader Linie $\mathfrak{L}_1$ liegen, laufen $\mathfrak{L}_4\mathfrak{L}_5\mathfrak{L}_6$ durch einen Punkt. Es laufen also von den sechs erhaltenen Linien drei durch einen Punkt und die drei andern ebenfalls durch einen Punkt und es ist unmittelbar zu erkennen, dass die fünfzehn Geraden: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4\mathfrak{L}_5\mathfrak{L}_6$, welche sich in den zwanzig Punkten: $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$ $a_1\,a_2\,a_3$ $b_1\,b_2\,b_3$ $c_1\,c_2\,c_3$ und den beiden Schnittpunkten von $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_3$ und $\mathfrak{L}_4\,\mathfrak{L}_5\,\mathfrak{L}_6$ treffen, genau eine solche Figur bilden, wie sie am Ende des § 11 beschrieben ist.

Der vorige Satz lässt sich auch in anderer Form aussprechen, wobei er als specieller Fall eines allgemeineren Satzes auftritt, von dem später die Rede sein wird. Die sechs Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$, von denen drei und drei auf zwei Geraden liegen, lassen sich als die Ecken eines einfachen Sechsecks auffassen, z. B. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$; in dieser Reihenfolge erscheinen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ als gegenüber liegende Seiten, ebenso $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$, endlich auch

$\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}$; der obige Satz würde also auch so lauten: **Bei einem einfachen Sechseck, dessen Ecken zu drei und drei auf zwei geraden Linien liegen, schneiden sich die gegenüber liegenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen**, und die sechs Sechsecke, welche sich aus denselben Eck-Punkten herstellen lassen, sind folgende:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 \end{cases}$$

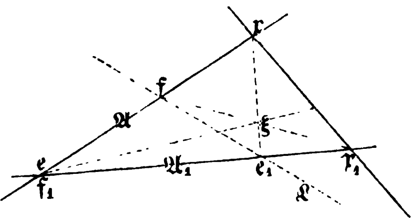
$$\begin{cases} \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1; \end{cases}$$

die für die ersten drei Sechsecke erhaltenen Geraden laufen durch einen Punkt und die für die andern drei Sechsecke resultirenden Geraden durch einen andern Punkt. —

Kehren wir nach dieser Abschweifung zu dem Gegenstande unserer Betrachtung zurück. Die Gerade $\mathfrak{L}$ als der Ort sämmtlicher Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$ geht durch die Berührungspunkte der beiden Träger; es bleibt noch übrig, auf jedem andern Projektionsstrahl den Berührungspunkt zu ermitteln; seien $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ die beiden Träger, welche von irgend drei Projektionsstrahlen $abc$ respektive in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ getroffen werden, so gab die in § 20 mitgetheilte Konstruktion einen beliebigen andern Projektionsstrahl dadurch, dass man $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ zog, irgend einen Punkt $\mathfrak{x}$ dieser Geraden mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ verband; $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ traf $b$ in $B$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}$ traf $c$ in $B_1$ und $BB_1$ war ein Projektionsstrahl. Fassen wir $b$ und $c$ als die Träger zweier neuen Punktreihen auf, welche dieselbe Gesammtheit der Projektionsstrahlen liefern, von denen $a$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ drei zur Bestimmung erforderliche sind, so erscheinen $BB_1$ als entsprechende Punkte dieser beiden neuen Punktreihen, und um den Berührungspunkt auf $b$ zu finden, müssen wir denjenigen Punkt auf $b$ finden, welcher entsprechend ist dem Schnittpunkte $(b, c)$ auf dem Träger $c$. Wir ziehen also von $\mathfrak{a}_1$ nach dem Schnittpunkte $(b, c)$, welche Linie in $\mathfrak{x}_0$ die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ trifft, so wird $\mathfrak{a}\mathfrak{x}_0$ den Strahl $b$ in dem gesuchten Berührungspunkte $\mathfrak{t}$ treffen. In gleicher Weise können wir den Berührungspunkt auf dem Projektionsstrahl $c$ ermitteln; wir ziehen von $\mathfrak{a}$ nach dem Schnittpunkte $(b, c)$, welche Linie in $\mathfrak{x}'_0$ die Gerade $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$ trifft, so wird $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}'_0$ den Strahl $c$ in dem gesuchten Berührungs-

punkte $t'$ treffen. Wir können aber auch die Berührungspunkte auf $b$ und $c$ gleichzeitig finden, indem wir $b$ und $c$ als Träger und $a\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ als drei Projektionsstrahlen auffassen und dann nach der vorhin angegebenen Konstruktion jene Gerade $\mathfrak{L}$ ermitteln, welche der Ort der Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$ ist und welche durch die beiden Berührungspunkte auf $b$ und $c$ gehen muss. Die vorige Konstruktion vereinfacht sich wesentlich, wenn wir statt der drei Punktenpaare $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$ folgende wählen: $\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$, welche so gewählt sind (Fig. 28), dass $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ im Schnittpunkte der beiden Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ vereinigt liegen, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte auf $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ sind und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ ein beliebiger Projektionsstrahl, dessen Berührungspunkt gesucht wird. Die Gerade $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1$ wird dann $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}_1$; der Schnittpunkt $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1)$ wird $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1)$, d. h. der Punkt $\mathfrak{x}$; $\mathfrak{a}_1$ ist der Berührungspunkt $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{a}$ ist der Schnittpunkt $\mathfrak{e}$; man ziehe also $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x}$, d. h. $\mathfrak{e}_1\mathfrak{x}$, welches $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}_1$ in $\xi$ treffe, so wird $\mathfrak{e}\,\xi$ den Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ in dem gesuchten Berührungspunkt treffen oder in Worten: Um auf irgend einem Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ den Berührungspunkt zu finden, verbinde man die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ mit den Berührungspunkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ der beiden Träger; der Schnittpunkt $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{e}_1\mathfrak{x})$ mit dem Schnittpunkt der Träger $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}_1$ verbunden liefert eine Gerade, welche den Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ in dem gesuchten Berührungspunkte trifft. Dies lässt sich auch als Satz folgendermassen aussprechen:

(Fig. 28.)



Die drei Verbindungslinien der Ecken eines von irgend drei Projektionsstrahlen gebildeten Dreiseits mit den Berührungspunkten in den gegenüber liegenden Seiten schneiden sich in einem Punkte.

Oder wenn man nach der obigen Definition § 20 den Kegelschnitt als Erzeugniss der beiden projektivischen Punktreihen und die Projektionsstrahlen als seine Tangenten einführt:

Die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte irgend dreier Tangenten eines Kegelschnitts mit den gegenüber liegenden Ecken des von denselben gebildeten Dreiseits schneiden sich in einem Punkte.

Nach der vorigen Konstruktion lässt sich sehr einfach auf einem beliebigen Projektionsstrahl der Berührungspunkt ermitteln, da die Berührungspunkte $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}$ der beiden Träger durch die oben konstruirte Gerade $\mathfrak{L}$ bereits gefunden sind. Es ist nicht unnütz, zu bemerken, dass der Berührungspunkt auf dem Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ nach der obigen Konstruktion und wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks (§ 9) $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{e}_1$ auch als der vierte harmonische dem Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ zugeordnete Punkt erscheint, während $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ das andere Paar zugeordneter Punkte sind; wir werden hierauf im Nachfolgenden genauer eingehen.

Fassen wir in den beiden projektivischen Punktreihen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ irgend zwei Projektionsstrahlen $a$, $b$ auf, welche in den entsprechenden Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ dieselben treffen, so liegt der Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1)$ auf derjenigen Geraden $\mathfrak{L}$, welche die Berührungspunkte der beiden Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ verbindet; drehen wir jetzt aber die Auffassung in der Weise um, dass wir $a$ und $b$ als Träger zweier erzeugenden Punktreihen und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ als Projektionsstrahlen ansehen, so sind nunmehr $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Paar entsprechender Punkte, ebenso $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ ein zweites Paar entsprechender Punkte; folglich wird der Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b})$, welches derselbe Punkt ist, auch auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Projektionsstrahlen $a$ und $b$ liegen müssen. Wir haben daher das bemerkenswerthe Resultat:

Sind $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ irgend zwei Projektionsstrahlen zweier projektivischer Punktreihen, so liegt der Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1)$ in gerader Linie mit den Berührungspunkten der beiden Projektionsstrahlen.

Hieraus folgt, wenn wir den einen Projektionsstrahl $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ mit seinem Berührungspunkt $\alpha$ festhalten, den andern Projektionsstrahl $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ und seinen Berührungspunkt $\beta$ aber der projektivischen Beziehung gemäss bewegen und den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1) = \gamma_1$ bezeichnen, dass der Strahl $\alpha\,\beta$, welcher in $\gamma_1$ die feste Gerade $\mathfrak{L}$ trifft, und der Strahl $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1$, welcher auch in $\gamma_1$ der Geraden $\mathfrak{L}$ begegnet, bei der Bewegung zwei perspektivische Strahlbüschel beschreiben; also wird die Punktreihe, welche der veränderliche Projektionsstrahl $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ auf dem Träger $\mathfrak{A}_1$ oder auf irgend einem andern Projektionsstrahl, z. B. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ fixirt, projektivisch sein müs-

sen mit dem Strahlbüschel, welches $\alpha\beta$ beschreibt. Dies giebt folgenden Satz:

**Die Punktreihe, in welcher ein beliebiger von der Gesammtheit der Projektionsstrahlen getroffen wird, ist projektivisch mit dem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt des ersteren und dessen Strahlen nach den Berührungspunkten sämmtlicher Projektionsstrahlen hingehen.**

Fügen wir noch einen dritten Projektionsstrahl $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$ hinzu und nennen die Berührungspunkte auf den Projektionsstrahlen

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

die Schnittpunkte

$$(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_1) = \alpha_1 \quad (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}_1) = \beta_1 \quad (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1) = \gamma_1,$$

so liegen nach dem Vorigen

$\alpha \quad \beta \quad \gamma_1$ in einer Geraden,
$\beta \quad \gamma \quad \alpha_1$ - - -
$\gamma \quad \alpha \quad \beta_1$ - - -
und auch $\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1$ - - -

nämlich in der Geraden $\mathfrak{L}$. Diese sechs Punkte sind also die Ecken eines vollständigen Vierseits und bilden eine Figur, wie wir sie in § 18 kennen gelernt haben.

Halten wir die beiden Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$ mit ihren Berührungspunkten $\alpha$ und $\beta$ fest, bewegen aber den dritten Projektionsstrahl $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$ der projektivischen Beziehung gemäss, so verändert sich auch sein Berührungspunkt $\gamma$; es bewegen sich nämlich die Punkte $\alpha_1$ und $\beta_1$ auf der festen Geraden $\mathfrak{L}$ und beschreiben zwei projektivische Punktreihen, weil sie mit den von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ beschriebenen Punktreihen perspektivisch liegen; folglich müssen auch die Strahlen $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$ projektivische Strahlbüschel um $\alpha$ und $\beta$ als Mittelpunkte beschreiben; nun schneiden sich aber $\alpha\beta_1$ und $\beta\alpha_1$ nach dem obigen Schema im Punkte $\gamma$, dem Berührungspunkt auf dem veränderlichen Projektionsstrahl $\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1$, folglich erhalten wir den wichtigen Satz:

**Verbindet man irgend zwei Berührungspunkte als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel mit sämmtlichen Berührungspunkten durch Strahlenpaare, so erhält man allemal zwei projektivische Strahlbüschel.**

Hiernach erscheint der Kegelschnitt, welchen wir als das Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen, d. h. die von der Gesammtheit der Projektionsstrahlen umhüllte Kurve definirt haben, zugleich als das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel, d. h. der Ort des Schnittpunktes sämmtlicher Paare entsprechender Strahlen. Dieselbe Kurve, der Kegelschnitt, je nachdem sie als eine kontinuirliche Reihe von Punkten oder als eine kontinuirliche Aufeinanderfolge von berührenden Strahlen (Tangenten) aufgefasst wird, ist das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel oder das Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen; beide Erzeugnisse, welche nach der in unseren Grundbegriffen liegenden Dualität neben einander stehen, sind also identisch.

## § 22. Zwei projektivische Strahlbüschel in allgemeiner Lage.

Den in den beiden vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtungen stehen ganz analoge zur Seite, welche ihren Ausgangspunkt von zwei projektivischen Strahlbüscheln in allgemeiner Lage nehmen; es würde ermüdend sein, diese analogen Betrachtungen in aller Ausführlichkeit zu wiederholen; vielmehr genüge es, die Resultate hervorzuheben, welche ohne jede Schwierigkeit aus dem Gange der gleichlaufenden Betrachtung sich ergeben und welche nur kleine Modifikationen dadurch erleiden, dass an Stelle von Strahl Punkt, an Stelle von Verbindungslinie (oder Projektionsstrahl) Schnittpunkt u. s. w. und umgekehrt tritt. Da wir aus dem Schluss der vorigen Betrachtung bereits wissen, dass das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel in allgemeiner Lage identisch ist mit dem Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen, welches wir Kegelschnitt genannt haben, so dürfen wir diese Benennung auch für das jetzt zu untersuchende Erzeugniss in Anspruch nehmen.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel in allgemeiner (nicht perspektivischer) Lage ist ein Kegelschnitt, welcher selbst durch die Mittelpunkte $B$, $B_1$ der beiden Strahlbüschel geht; denn dem Strahl $BB_1$, als dem Strahlbüschel $(B)$ angehörig, entspricht ein bestimmter durch $B_1$ gehender

Strahl, also ist $B_1$ ein Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen, ebenso $B$. Seien $x x_1$ zwei entsprechende Strahlen und $\mathfrak{x}$ ihr Schnittpunkt, also $(B\mathfrak{x}) = x$, $(B_1\mathfrak{x}) = x_1$ und bewegen wir den Strahl $x$ um $B$ herum, bis er zuletzt auf $BB_1$ fällt, so wird die Sehne $B_1\mathfrak{x}$ des Kegelschnitts, welche den entsprechenden Strahl bildet, sich um den festen Punkt $B_1$ drehen, bis sie zuletzt in die Grenzlage der Tangente des Kegelschnitts am Punkte $B_1$ übergeht; also *diejenigen Strahlen, welche den in der Verbindungslinie der Mittelpunkte vereinigt liegenden entsprechen, sind die Tangenten des Kegelschnitts in den Mittelpunkten der Strahlbüschel.*

Man kann irgend zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen als Mittelpunkte zweier neuer Strahlbüschel annehmen, deren Strahlenpaare nach sämmtlichen Schnittpunkten hingehen; solche zwei Strahlbüschel sind immer projektivisch und je zwei Strahlen entsprechend, die nach demselben Schnittpunkte gehen. Oder:

*Wenn man irgend zwei Punkte eines Kegelschnitts mit sämmtlichen durch Strahlenpaare verbindet, so erhält man allemal zwei projektivische Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen immer zwei solche sind, welche nach demselben Punkte des Kegelschnitts gehen.*

Hieraus folgt, dass *der Kegelschnitt durch fünf Punkte, welche willkührlich angenommen werden dürfen, vollkommen bestimmt ist*; um beliebig viele andere Punkte desselben allein mittels des Lineals zu konstruiren, wähle man irgend zwei von den gegebenen fünf Punkten zu Mittelpunkten zweier Strahlbüschel und ziehe nach den andern die drei Paare entsprechender Strahlen; dadurch ist die projektivische Beziehung der beiden Strahlbüschel vollständig bestimmt und beliebig viele andere Paare entsprechender Strahlen sind allein mittels des Lineals zu konstruiren (§ 10, b); die Schnittpunkte derselben werden Punkte des Kegelschnitts sein. Diese Konstruktion führt zu folgender Bedingung zwischen irgend sechs Punkten eines Kegelschnitts:

*Verbindet man irgend sechs Punkte eines Kegelschnitts in beliebiger Reihenfolge zu einem einfachen Sechseck, so schneiden sich die drei Paar gegenüber*

liegenden Seiten in drei Punkten, welche in gerader Linie liegen. (Pascal'scher Satz.)

Ferner besitzt der Kegelschnitt die charakteristische Eigenschaft, dass eine beliebige Gerade in der Ebene ihn im Allgemeinen höchstens in zwei Punkten trifft. Der Kegelschnitt ist daher gleichzeitig vom zweiten Grade und von der zweiten Klasse, da der Ort eines Punktes in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass auf einer beliebigen Geraden in der Ebene sich im Allgemeinen höchstens $n$ Punkte des Ortes finden, eine Kurve $n^{ten}$ Grades und der Ort einer einhüllenden Geraden von solcher Beschaffenheit, dass durch einen beliebigen Punkt in der Ebene im Allgemeinen höchstens $n$ Berührungsstrahlen des Ortes gehen, eine Kurve $n^{ter}$ Klasse genannt wird. Die beiden Schnittpunkte des Kegelschnitts mit einer beliebigen Geraden können aber auch in einen zusammen fallen oder zu existiren aufhören. Die sämmtlichen geraden Linien der unendlichen Ebene zerfallen dadurch in zwei Kategorien: solche, welche den Kegelschnitt nicht treffen, also keinen (reellen) Punkt mit ihm gemein haben, und solche, welche den Kegelschnitt in zwei (reellen) Punkten treffen; diese beiden Kategorien werden von einander getrennt durch eine einfache unendliche Reihe solcher Geraden, welche nur einen Punkt mit dem Kegelschnitt gemein haben, oder für welche die beiden Schnittpunkte zusammen fallen; dies sind die Tangenten des Kegelschnitts.

Die Konstruktion der Tangente in irgend einem Punkte des Kegelschnitts wird leicht ausgeführt mit Hülfe des folgenden Satzes:

Wenn $x x_1$ und $y y_1$ irgend zwei Paare entsprechender Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel $(B)$ $(B_1)$ sind, so läuft die Verbindungslinie der Schnittpunkte

$$(xy_1, yx_1)$$

immer durch ein und denselben festen Punkt $S$, welcher zugleich der Schnittpunkt der beiden Tangenten des Kegelschnitts in den Mittelpunkten $B$, $B_1$ der Strahlbüschel ist; oder specialisirt:

Wenn $a b c$ irgend drei durch einen Punkt gehende Strahlen und $a_1 b_1 c_1$ irgend drei durch einen zweiten Punkt gehende Strahlen sind, so laufen die drei Ver-

bindungslinien der Schnittpunkte

$$(a b_1, a_1 b) \quad (b c_1, b_1 c) \quad (c a_1, c_1 a)$$

durch ein und denselben Punkt.

Dieser Satz ist einer ganz analogen Erweiterung fähig, wie der gleichlautende in § 21; die Ausführung sei dem Leser überlassen.

Mit Hülfe dieses Satzes wird nun in jedem Punkte des Kegelschnitts die Tangente zu konstruiren sein, wenn irgend fünf zur Bestimmung desselben erforderliche Punkte gegeben sind; sei $B$ der Punkt, in welchem die Tangente gesucht wird, und $B_1$ a b c die vier andern, so ziehe man die Strahlen $B$a, $B$b, $B$c, d. h. $abc$ und $B_1$a, $B_1$b, $B_1$c, d. h. $a_1 b_1 c_1$, bestimme die beiden Linien $(a b_1, a_1 b)$ $(b c_1, b_1 c)$ und verbinde ihren Schnittpunkt mit $B$, alsdann ist diese Linie die gesuchte Tangente in $B$.

Haben wir in den Mittelpunkten $B B_1$ der den Kegelschnitt erzeugenden beiden Strahlbüschel die Tangenten $f$ und $e_1$, d. h. diejenigen Strahlen, welche den in der Verbindungslinie $B B_1$ vereinigten Strahlen $f_1$ und $e$ entsprechen, gefunden, indem wir den Punkt $S$ mit $B$ und $B_1$ verbinden, so lässt sich in irgend einem Schnittpunkte $\mathfrak{x}$ zweier entsprechender Strahlen $x x_1$ die Tangente des Kegelschnitts auch dadurch finden, dass wir den Punkt, in welchem die Verbindungslinie $(x e_1, x_1 f)$ die vereinigten Strahlen $e$ und $f_1$ trifft, mit $\mathfrak{x}$ verbinden, welche Linie die gesuchte Tangente ist. Dies führt zu folgendem Satz:

Die Seiten irgend eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks treffen die Tangenten an den gegenüber liegenden Ecken in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen.

Endlich folgt noch der Satz:

Sind $a a_1$ und $b b_1$ irgend zwei Paar entsprechende Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel und a, b ihre resp. Schnittpunkte, so geht die Verbindungslinie $(a b_1, a_1 b)$ durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten in a und b am Kegelschnitt, woraus dann der umgekehrte des analogen Satzes in § 21 folgt:

Das Strahlbüschel, welches von allen Strahlen gebildet wird, die einen beliebigen Punkt mit sämmtlichen Punkten des Kegelschnitts verbinden, ist projektivisch mit der Punktreihe, welche auf der an dem

ersten Punkte gezogenen Tangente durch die Tangenten an sämmtlichen Punkten des Kegelschnitts bestimmt wird.

Hieraus ergiebt sich schliesslich von entgegengesetzter Seite wiederum die Identität beider Erzeugnisse, indem wir finden, dass sämmtliche Tangenten des Kegelschnitts irgend zwei derselben in zwei projektivischen Punktreihen treffen, indem jede auf den beiden willkührlich herausgenommenen zwei entsprechende Punkte bestimmt.

## § 23. Identität der Erzeugnisse zweier projektivischer Punktreihen und zweier projektivischer Strahlbüschel.

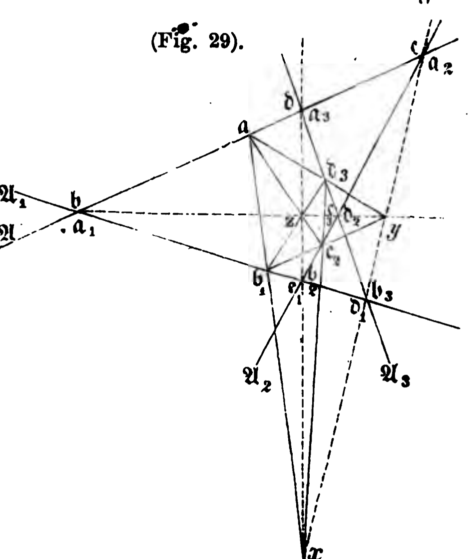
Obgleich wir bereits aus dem Vorigen die Identität beider neben einander stehenden Erzeugnisse erkannt haben, so wollen wir doch dies wichtige Resultat noch einmal auf etwas anderem Wege ableiten, indem wir dabei zugleich eine Figur vorführen, welche eine grosse Zahl von Eigenschaften des Kegelschnitts zur Anschauung bringt.

Wir gehen von zwei projektivischen Punktreihen aus, deren Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ seien, und nehmen in ihrem Schnittpunkte zwei nicht entsprechende Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1$ vereinigt liegend an; sei $\mathfrak{a}$ der dem $\mathfrak{a}_1$ entsprechende auf dem Träger $\mathfrak{A}$, so erscheint der Träger $\mathfrak{A}$ als Verbindungsstrahl $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1$, d. h. als Projektionsstrahl; durch jeden Punkt $\mathfrak{x}$ des Trägers $\mathfrak{A}$ gehen mithin zwei Projektionsstrahlen, nämlich $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ und der Träger $\mathfrak{A}$; die einzige Ausnahme macht der Punkt $\mathfrak{a}$; für ihn fallen beide Projektionsstrahlen zusammen; er heisst der Berührungspunkt des Projektionsstrahls $\mathfrak{A}$ und ist in der That die Grenzlage des Schnittpunktes zweier unmittelbar auf einander folgender (unendlich naher) Projektionsstrahlen; ebenso giebt es auf dem Träger $\mathfrak{A}_1$ einen einzigen bestimmten Punkt $\mathfrak{b}_1$, welcher dem im Schnittpunkte liegenden Punkt $\mathfrak{b}$ der ersten Punktreihe entspricht; durch $\mathfrak{b}_1$ geht nur ein einziger Projektionsstrahl, der Träger $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ heisst sein Berührungspunkt. Wir setzen ferner die in § 21 unabhängig bewiesene Eigenschaft der beiden projektivischen Punktreihen voraus, dass nämlich der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1,\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte bedeuten, immer auf derselben festen Geraden liegt, welche durch die beiden Berührungspunkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1$ der Träger geht.

Dies vorausgeschickt, denken wir uns (Fig. 29) auf den beiden Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ drei Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$, welche zur Bestimmung der Projektivität erforderlich sind und wobei $\mathfrak{a}_1$ als im Schnittpunkte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ liegend angenommen wird, also $\mathfrak{a}$ der Berührungspunkt des Trägers $\mathfrak{A}$ ist, willkührlich gewählt, dann wird der dem andern im Schnittpunkte liegenden Punkte $\mathfrak{b}$ entsprechende $\mathfrak{b}_1$, d. h. der Berührungspunkt von $\mathfrak{A}_1$ in der Weise konstruirt, dass wir den Schnittpunkt

$$(\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1, \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}) = x$$

mit $\mathfrak{a}$ verbinden und den Punkt $\mathfrak{b}_1$ aufsuchen, wo diese Verbindungslinie $\mathfrak{A}_1$ trifft. Wir haben nun auf den beiden Trägern


(Fig. 29).

$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ vier Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ und es gilt die Gleichheit des Doppelverhältnisses $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$; der Schnittpunkt der beiden Träger hat einen doppelten Namen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_1$. Wir denken uns nun den Projektionsstrahl $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ als Träger einer neuen Punktreihe und bezeichnen ihn in diesem Sinne mit $\mathfrak{A}_2$; wir machen nämlich $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ projektivisch rücksichtlich der Punktenpaare, welche die andern Projektionsstrahlen auf ihnen bestimmen; der Projektionsstrahl $\mathfrak{A}$ trifft $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ resp. in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}$; wir legen nun dem $\mathfrak{c}$ den zweiten Namen $\mathfrak{a}_2$ bei; der Projektionsstrahl $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ trifft $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ in demjenigen Punkte, welchen wir $\mathfrak{d}_2$ nennen; endlich liegt im Schnittpunkte $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ derjenige Punkt, welcher dem Berührungspunkt auf dem Träger $\mathfrak{A}_1$ entspricht; dies ist aber der Punkt $\mathfrak{b}_1$; der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$, welcher schon den Namen $\mathfrak{c}_1$ hatte, empfängt also jetzt in dem neuen Sinne den zweiten Namen $\mathfrak{b}_2$ und die drei Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ bestimmen die

ganze projektivische Beziehung der beiden neuen Träger $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ so, dass jetzt der dem Punkte $\mathfrak{c}_1$, welcher im Schnittpunkt liegt, entsprechende $\mathfrak{c}_2$, d. h. der Berührungspunkt bei der neuen Beziehung von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, auf die Weise gefunden wird, dass wir den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{d}_2, \mathfrak{d}_1 \mathfrak{a}_2) = y$ mit $\mathfrak{b}_1$ verbinden und den Punkt $\mathfrak{c}_2$ aufsuchen, wo diese Verbindungslinie $\mathfrak{A}_2$ trifft. Wir haben dann auf den beiden Trägern $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ vier Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2$ und es gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2)$; es ist also auch $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2)$, was auch nachträglich aus der Figur leicht verificirt werden kann; denn es ist identisch

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c})$$

(§ 6. 1), ferner $(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1)$, weil diese vier Punktenpaare in Bezug auf den Projektionspunkt $x$ perspektivisch liegen; ferner $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1)$ (§ 6, 1) und $(\mathfrak{d}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_1) = (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2)$, weil diese vier Punktenpaare in Bezug auf den Projektionspunkt $y$ perspektivisch liegen, folglich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2).$$

Wir denken uns endlich den vierten Projektionsstrahl $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ als Träger einer Punktreihe und nennen ihn in diesem Sinne $\mathfrak{A}_3$; wir machen jetzt $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ projektivisch rücksichtlich der Paare entsprechender Punkte, welche die andern Projektionsstrahlen auf ihnen bestimmen; $\mathfrak{A}$ trifft $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ in $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{d}$; wir legen daher dem Punkt $\mathfrak{d}$ den zweiten Namen $\mathfrak{a}_3$ bei; $\mathfrak{A}_1$ trifft $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ in den Punkten $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{d}_1$; wir benennen daher den Punkt $\mathfrak{d}_1$ jetzt $\mathfrak{b}_3$; endlich liegt in dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ oder $\mathfrak{d}_2$ derjenige Punkt, welcher dem Berührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ auf $\mathfrak{A}_2$ bei der vorigen Beziehung entspricht; wir nennen daher $\mathfrak{d}_2$ jetzt $\mathfrak{c}_3$ und haben drei Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_2 \mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_2 \mathfrak{c}_3$, welche die projektivische Beziehung bestimmen, so dass jetzt der dem Punkte $\mathfrak{d}_2$, welcher im Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ liegt, entsprechende Punkt $\mathfrak{d}_3$ auf $\mathfrak{A}_3$ in folgender Weise gefunden wird: Wir verbinden den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2) = x$ mit $\mathfrak{c}_2$ und bestimmen den Schnittpunkt $\mathfrak{d}_3$ dieser Verbindungslinie mit $\mathfrak{A}_3$; dann haben wir auf den beiden Trägern $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ vier Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_3 \mathfrak{d}_3$ und es gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2) = (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_3 \mathfrak{d}_3)$; wir haben also jetzt die vier Doppelverhältnisse einander gleich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \mathfrak{d}_2) = (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 \mathfrak{c}_3 \mathfrak{d}_3).$$

Hieraus folgt zuerst $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)$ und weil identisch $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a})$ (§ 6, 1), dass auch $(\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)$; $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_3$ fallen aber zusammen, folglich müssen sich $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_3$ in einem Punkte schneiden, oder weil $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}\mathfrak{c}_3) = y$ ist, liegen $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_3\, y$ in einer Geraden; zweitens $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2)$ und $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ (§ 6, 1), also $(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_2)$; weil nun $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_2$ zusammenfallen, so müssen sich $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_2$ in einem Punkte schneiden; bezeichnen wir den Schnittpunkt $(\mathfrak{d}\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}\mathfrak{d}_2) = z$, so liegen folglich $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_2\, z$ in einer Geraden; endlich ist $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)$ und $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$ (§ 6, 1), also $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1) = (\mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{d}_3)$; weil aber $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{b}_3$ zusammenfallen, so müssen sich $\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_3$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3$ in einem Punkte schneiden; nun ist der Schnittpunkt $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_3) = z$, also liegen $\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{d}_3\, z$ in einer Geraden. Wir sehen, dass $xyz$ nichts anderes sind, als die drei Diagonalpunkte des von den vier Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ gebildeten vollständigen Vierseits und erkennen zugleich, dass das Dreieck $xyz$ koincidirt mit dem Diagonaldreieck des von den vier Berührungspunkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_3$ gebildeten vollständigen Vierecks, oder dass die Berührungspunkte paarweise mit den Punkten $xyz$ in gerader Linie liegen.

Die auf die beschriebene Weise hergestellte Figur, bei der jede der vier Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ vier Punkte enthält, in welchen sie von den andern und sich selbst (Berührungspunkt) getroffen wird und irgend zwei von ihnen rücksichtlich dieser Punkte projektivisch gemacht sind, bietet noch eine zweite, nicht minder wichtige Eigenschaft dar. Fassen wir die vier Berührungspunkte auf $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_3$, so sehen wir, dass durch jeden derselben vier Strahlen gehen, nämlich einmal der Projektionsstrahl, dessen Berührungspunkt er ist, und dann die drei Strahlen nach den drei andern Berührungspunkten hin. Bezeichnen wir diese nun in etwas anderer Weise:

$$\mathfrak{A} = a, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = b, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c}_2 = c, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{d}_3 = d,$$

ferner

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{a} = a_1, \quad \mathfrak{A}_1 = b_1, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 = c_1, \quad \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_3 = d_1,$$

ebenso

$$\mathfrak{c}_2\mathfrak{a} = a_2, \quad \mathfrak{c}_2\mathfrak{b}_1 = b_2, \quad \mathfrak{A}_2 = c_2, \quad \mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_3 = d_2,$$

endlich

$$\mathfrak{d}_3\mathfrak{a} = a_3, \quad \mathfrak{d}_3\mathfrak{b}_1 = b_3, \quad \mathfrak{d}_3\mathfrak{c}_2 = c_3, \quad \mathfrak{A}_3 = d_3,$$

so dass also 6 Strahlen Doppelnamen haben:

$$b = a_1, \; c = a_2, \; d = a_3, \; c_1 = b_2, \; d_1 = b_3, \; d_2 = c_3$$

und

$$a = \mathfrak{A}, \; b_1 = \mathfrak{A}_1, \; c_2 = \mathfrak{A}_2, \; d_3 = \mathfrak{A}_3;$$

dann findet zwischen diesen Strahlen ein ganz analoges Verhältniss statt, wie vorhin zwischen den (mit deutschen Buchstaben) gleichbenannten Punkten; es ist nämlich identisch das Doppelverhältniss $(abcd) = (badc)$ und zugleich $(badc) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$, weil $b$ und $a_1$ zusammenfallen und die drei Schnittpunkte $(ab_1)$, $(dc_1) = y$, $(cd_1) = z$ in gerader Linie liegen, es ist also $(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1)$ und in gleicher Weise

$$(abcd) = (a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2) = (a_3 b_3 c_3 d_3),$$

von den vier Strahlbüscheln sind also je zwei mit einander projektivisch und zugleich ist

$$(abcd) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d});$$

denn die vier Punkte, in welchen das Strahlbüschel $abcd$ von der Geraden $yz$ getroffen wird, liegen perspektivisch mit den vier Punkten $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ und haben $x$ zum Projektionspunkte, folglich ist $(abcd) = (\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$. Diese eigenthümliche Figur bietet also nur einen einzigen Werth des Doppelverhältnisses dar, welcher sowohl für die Punkte der vier Punktreihen, als auch für die Strahlen der vier Strahlbüschel derselbe ist.

Lassen wir nun eine Bewegung in der Figur eintreten, indem wir den Projektionsstrahl $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ oder $\mathfrak{A}_3$ gemäss der projektivischen Beziehung der beiden ursprünglich angenommenen Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die ganze Schaar von Projektionsstrahlen durchlaufen lassen, so durchlaufen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ die beiden ursprünglichen projektivischen Punktreihen; es verändern sich der Schnittpunkt $\mathfrak{d}_2$, der Berührungspunkt $\mathfrak{d}_3$ und die drei Punkte $xyz$; dagegen bleiben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, die den im Schnittpunkte liegenden $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}$ entsprechen, fest; der Punkt $x$ durchläuft also die feste Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$; es bleiben $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ fest; ich behaupte, dass auch der auf die oben angegebene Weise konstruirte Berührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ fest bleibt; denn wegen der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierecks (§ 9) $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2\mathfrak{d}_3$ sind die vier Strahlen $x\mathfrak{b}_1$, $x\mathfrak{c}_2$, $xy$ und $xz$ vier harmonische Strahlen, also die vier Punkte, in welchen $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ von ihnen geschnitten wird, vier harmonische Punkte, d. h. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, der Schnittpunkt von $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ mit der festen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und der Be-

rührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ sind vier harmonische Punkte, und zwar $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ zugeordnete; es giebt aber nur einen einzigen vierten harmonischen Punkt zu dreien, von denen zwei als zugeordnete festgesetzt sind (§ 8); folglich bleibt der in obiger Weise konstruirte Berührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ immer derselbe, wie auch der vierte Projektionsstrahl $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, welcher zu seiner Konstruktion diente, der projektivischen Beziehung gemäss sich verändern mag. Hieraus folgt, dass der Punkt $y$ bei der Bewegung die feste Gerade $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2$ und der Punkt $z$ die feste Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_2$ durchläuft; da $z$ sich auf einer Geraden bewegt, so sind die beiden von $\mathfrak{c}_1 z$ und $\mathfrak{b} z$ beschriebenen Strahlbüschel perspektivisch, also die beiden Punktreihen, in welchen sie die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_2$ treffen, projektivisch; mithin durchlaufen die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_2$ zwei projektivische Punktreihen, oder die beiden Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_2$ werden von der Gesammtheit der Projektionsstrahlen in zwei projektivischen Punktreihen getroffen; hätten wir anderseits $\mathfrak{A}_3$ festgehalten und $\mathfrak{A}_2$ die Gesammtheit der Projektionsstrahlen durchlaufen lassen, so würden wir in gleicher Weise gefunden haben, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_3$ von sämmtlichen Projektionsstrahlen in zwei projektivischen Punktreihen getroffen werden; folglich werden auch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ von sämmtlichen Projektionsstrahlen in zwei projektivischen Punktreihen getroffen und wir können jetzt den allgemeinen Satz aussprechen:

Irgend zwei Projektionsstrahlen zweier projektivischer Punktreihen werden von der Gesammtheit der Projektionsstrahlen immer wieder in zwei projektivischen Punktreihen getroffen (§ 20). Hierdurch verlieren die Träger der beiden ursprünglichen Punktreihen ihre Bevorzugung und treten in die Reihe aller übrigen Projektionsstrahlen. Es giebt auf jedem Projektionsstrahl einen einzigen bestimmten Punkt (Berührungspunkt), in welchem er von sich selbst getroffen wird; fasst man irgend zwei Projektionsstrahlen als Träger zweier erzeugenden Punktreihen auf, so sind ihre Berührungspunkte diejenigen, welche den in ihrem Schnittpunkte vereinigten Punkten entsprechen. Es resultirt immer derselbe Berührungspunkt auf einem Projektionsstrahl, mit welchem andern als Träger zweier erzeugenden Punktreihen man ihn auch zusammenfassen mag. Dies Alles folgt unmittelbar aus der vorigen Betrachtung, aber noch mehr: Weil $y$ und $z$ auf den beiden

festen Geraden $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_2$ sich bewegen und beständig in gerader Linie liegen mit $\mathfrak{b}$ (oder $\mathfrak{a}_1$), so beschreiben sie zwei perspektivisch liegende Punktreihen, folglich $\mathfrak{a}y$ und $\mathfrak{b}_1 z$ zwei projektivische Strahlbüschel; es schneiden sich aber $\mathfrak{a}y$ und $\mathfrak{b}_1 z$ in $\mathfrak{d}_3$, dem Berührungspunkte auf dem veränderlichen vierten Projektionsstrahl; folglich:

*Die Gesammtheit der Berührungspunkte auf den Projektionsstrahlen ist von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man irgend zwei von ihnen als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel mit sämmtlichen durch Strahlenpaare verbindet, man allemal zwei projektivische Strahlbüschel erhält* (§ 21). Demjenigen Strahl des einen Strahlbüschels, welcher auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte fällt, entspricht im andern Strahlbüschel der Projektionsstrahl, welcher durch diesen Punkt geht. Hieraus ergiebt sich, wenn wir den Ort des Schnittpunkts entsprechender Strahlen der beiden projektivischen Strahlbüschel verfolgen und die kontinuirliche Reihe der Schnittpunkte als Kurve auffassen, dass der Strahl, welcher der Verbindungslinie der Mittelpunkte in dem einen Strahlbüschel entspricht, nach der bekannten Definition der Tangente (§ 20) in die Tangente dieser Kurve an dem Punkte, welcher Mittelpunkt des andern Strahlbüschels ist, übergeht. Die Projektionsstrahlen sind daher die sämmtlichen Tangenten derjenigen Kurve, welche von ihren (sogenannten) Berührungspunkten gebildet wird; wir erkennen hieraus die nachzuweisende Identität beider Erzeugnisse, welchen wir den gemeinsamen Namen *Kegelschnitt* beigelegt haben: 1) der Ort des Schnittpunkts entsprechender Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel ist der Kegelschnitt als kontinuirliche Reihe von Punkten aufgefasst; 2) die von den sämmtlichen Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen (Projektionsstrahlen) umhüllte Kurve ist der Kegelschnitt als kontinuirliche Reihe von Berührungsstrahlen (Tangenten) aufgefasst.

Aus der obigen Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(abcd) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

ergiebt sich bei der Bewegung von $d$ und $\mathfrak{d}$ schliesslich noch das Resultat:

*Die Punktreihe, in welcher eine beliebige Tangente des Kegelschnitts von der Gesammtheit der-*

selben getroffen wird, ist projektivisch mit dem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt der ersteren und dessen Strahlen nach sämmtlichen Berührungspunkten hingehen, indem immer eine Tangente und der zugehörige Berührungspunkt entsprechende Elemente bestimmen (§§ 21 und 22).

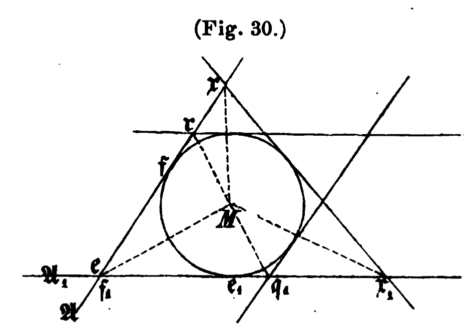
## § 24. Der Kreis als Erzeugniss projektivischer Gebilde.

Die durch die vorige Betrachtung allgemein nachgewiesene doppelte Entstehungsweise des Kegelschnitts findet ihre Bestätigung zunächst bei dem aus der Elementargeometrie bekannten Kegelschnitt, dem Kreise, und die doppelte Erzeugung des Kreises durch projektivische Gebilde lässt sich aus elementaren Eigenschaften desselben unmittelbar ableiten; zugleich wollen wir auch umgekehrt die Bedingungen hieraus ermitteln, unter welchen zwei projektivische Strahlbüschel oder zwei projektivische Punktreihen einen Kreis erzeugen. Wir haben bereits in § 15 diejenige elementare Eigenschaft des Kreises benutzt, welche ihn als Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel erscheinen lässt. Werden irgend zwei Punkte $BB_1$ einer Kreisperipherie mit allen übrigen Punkten derselben $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}\ldots$ durch Strahlenpaare $aa_1$, $bb_1$, $cc_1 \ldots xx_1$ verbunden, so bilden diese unter sich gleiche Winkel (oder was gleichbedeutend ist, Nebenwinkel), d. h. $(ab) = (a_1 b_1)$, $(bc) = (b_1 c_1)$, weil sie über demselben Bogen stehen; es ist also das Doppelverhältniss $(abcx) = (a_1 b_1 c_1 x_1)$ oder die beiden Strahlbüschel $(B)(B_1)$ sind rücksichtlich ihrer Strahlenpaare $xx_1$ projektivisch und zwar projektivisch-gleich (§ 19, c). Sei $e$ der Strahl des Strahlbüschels $(B)$, welcher auf $BB_1$ fällt, so muss nothwendig auch $(xe) = (x_1 e_1)$ sein, d. h. nach bekannter Eigenschaft des Kreises ist $e_1$ die Tangente am Punkte $B_1$; sie bildet mit irgend einer durch $B_1$ gehenden Sehne $x_1$ einen Winkel, der gleich dem Peripheriewinkel über dieser Sehne ist; also die dem vereinigten Strahle $BB_1$ entsprechenden Strahlen beider Strahlbüschel sind die Tangenten in $B$ und $B_1$. Es ist noch wesentlich für die Umkehrung zu bemerken, dass die den Kreis erzeugenden beiden Strahlbüschel nothwendig gleichlaufend sind, d. h. denselben Drehungssinn (§ 4) haben, wie sich aus der Anschauung ergiebt, wo wir auch die Peripheriepunkte $BB_1$ annehmen mögen. Nunmehr können wir auch umgekehrt schliessen:

**Zwei projektivisch-gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel erzeugen immer einen Kreis,** sobald sie sich nicht in perspektivischer Lage befinden; denn sie sind vollständig bestimmt durch ein Paar entsprechender Strahlen $a a_1$, da hinzugefügt ist, dass sie gleichlaufend sein sollen (§ 19, c); legt man also durch die Mittelpunkte $B B_1$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{a} = (a_1 a)$ einen Kreis, so liefert jeder Peripheriepunkt $\mathfrak{x}$ zwei entsprechende Strahlen $x x_1$ zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel, welche mit den angenommenen identisch zusammenfallen.

Anderseits kann der Kreis, als die Gesammtheit seiner Tangenten aufgefasst, auch durch zwei projektivische Punktreihen erzeugt werden; werden irgend zwei Tangenten des Kreises $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ als Träger zweier Punktreihen genommen (Fig. 30) und habe ihr Schnittpunkt den doppelten Namen $\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1$, sind also $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte und $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ die Schnittpunkte einer beliebigen dritten Tangente mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, so ist die projektivische Eigenschaft der von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ durchlaufenen Punktreihen leicht zu erkennen, indem wir die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, welche den unendlich entfernten entsprechen (§ 12), aufsuchen; dies geschieht dadurch, dass wir zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die parallelen Tangenten ziehen, welche in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die ersteren schneiden; aus bekannten Eigenschaften des Kreises folgt dann, dass das von diesen vier Tangenten gebildete Parallelogramm ein Rhombus ist, dessen Diagonalen sich im Mittelpunkte $M$ des Kreises schneiden und senkrecht auf einander stehen; folglich ist $\angle\, \mathfrak{e}\mathfrak{r}M = \angle\, \mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1 M$; also auch die Nebenwinkel gleich $\angle\, \mathfrak{x}\mathfrak{r}M = \angle\, M\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$; da ferner die Winkel bei $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{e}$ durch die Strahlen $M\mathfrak{x}$, $M\mathfrak{x}_1$, $M\mathfrak{e}$ halbirt werden und die Summe der Winkel des Dreiecks $= 180^0$, also die Summe der halben Winkel $= 90^0$ ist, so ist der Winkel $\angle\, \mathfrak{e}\mathfrak{r}M$ gleich der Summe der halben Winkel bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, folglich $\angle\, \mathfrak{x}\mathfrak{r}M = \angle\, \mathfrak{x}M\mathfrak{x}_1 = \angle\, M\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$; folglich sind die drei Dreiecke ähnlich:

(Fig. 30.)



$$\triangle\, \mathfrak{x}\mathfrak{r}M \sim \triangle\, \mathfrak{x}M\mathfrak{x}_1 \sim \triangle\, M\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$$

wegen der Gleichheit der Winkel; die Proportionalität der Seiten liefert daher die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}M} = \frac{M\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1} \text{ oder } \mathfrak{r}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = M\mathfrak{r}\,.\,M\mathfrak{q}_1.$$

Aus der Eigenschaft des konstanten Rechtecks $\mathfrak{r}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ erkennen wir nun (§ 12), dass die von $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ durchlaufenen Punktreihen projektivisch sind; da ferner aus bekannten Eigenschaften $\triangle\, \mathfrak{r}M\mathfrak{f} \sim \triangle\, \mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1M$, also $\frac{\mathfrak{r}M}{\mathfrak{r}\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{q}_1M}$ oder $\mathfrak{r}\mathfrak{f}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1 = M\mathfrak{r}\,.\,M\mathfrak{q}_1$; folglich sind auch der Berührungspunkt $\mathfrak{f}$ und der Schnittpunkt der beiden Träger $\mathfrak{f}_1$ zwei entsprechende Punkte und ebenso $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$.

Suchen wir nun umgekehrt die Bedingungen auf, welche erforderlich und ausreichend sind, damit zwei projektivische Punktreihen einen Kreis erzeugen, so sehen wir zunächst, dass beim Kreise

$$\mathfrak{e}\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$$

sein muss, dass also in dem Schnittpunkte der beiden erzeugenden Punktreihen zwei solche Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ vereinigt liegen müssen, welche die Endpunkte entsprechender gleicher Strecken sind. Es giebt nun nach § 12 ein doppeltes System von unendlich vielen Paaren entsprechender gleicher Strecken bei zwei beliebigen projektivischen Punktreihen; die einen schliessen die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ ein, die andern aus; zur Erzeugung des Kreises wird nur ein Paar der zweiten Art, übrigens aber beliebig gewählt werden dürfen; ferner ist auch der Winkel zwischen den beiden Trägern der erzeugenden Punktreihen bestimmt; denn bezeichnen wir denselben mit $\varphi$, so ist

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r}\,.\,\sin\frac{\varphi}{2} = \mathfrak{r}M$$

$$\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1\,.\,\sin\frac{\varphi}{2} = \mathfrak{q}_1M$$

$$\mathfrak{e}\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1\,.\,\sin^2\frac{\varphi}{2} = \mathfrak{r}M\,.\,\mathfrak{q}_1M = \mathfrak{r}\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$$

$= \mathfrak{r}\mathfrak{e}\,.\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1$, und da $\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{f}$, so folgt

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{f}}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1};$$

dadurch ist der Winkel zwischen den beiden erzeugenden Punktreihen abhängig gemacht von den Daten der projektivischen Be-

ziehung, und da diese Relation zwei Werthe für den Winkel $\varphi$ liefert, so wird es, wenn wir den Schnittpunkt festhalten und die Richtung der Träger verändern, zwei Mal vorkommen, dass die Punktreihen einen Kreis erzeugen; also zusammen gefasst:

Zwei beliebige projektivische Punktreihen können immer so gelegt werden, dass sie einen Kreis erzeugen; hierzu ist es nothwendig, irgend ein Paar entsprechender gleicher Strecken der beiden Punktreihen desjenigen Systems, welche $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ ausschliessen (§ 12) auszuwählen und zwei nicht entsprechende Endpunkte derselben in dem Schnittpunkte der beiden Träger zu vereinigen, endlich noch die Neigung der beiden Träger so zu bestimmen, dass das Quadrat des halben Abstandes der Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ von einander gleich der Potenz der projektivischen Beziehung $(\mathfrak{r}\mathfrak{x} \, . \, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1)$ wird (was auf doppelte Weise geschehen kann).

## § 25. Eintheilung der Kegelschnitte.

Um uns nunmehr von der Gestalt des Kegelschnitts, trete er als Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel oder zweier projektivischer Punktreihen auf, ein anschauliches Bild machen zu können, müssen wir einige besondere Umstände näher ins Auge fassen, welche bei den erzeugenden Gebilden vorkommen können. Gehen wir von zwei projektivischen Strahlbüscheln $BB_1$ in allgemeiner Lage aus und denken uns, indem wir das eine Strahlbüschel $B$ festhalten, das andere $B_1$, ohne es um seinen Mittelpunkt zu drehen, parallel mit sich fortgeschoben, bis $B_1$ mit $B$ zusammenfällt (oder was dasselbe ist, ziehen wir durch $B$ zu sämmtlichen Strahlen des Strahlbüschels $B_1$ Parallele), so erhalten wir in $B$ zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, wie sie in § 14 genauer untersucht worden sind; dort sahen wir, dass drei Fälle eintreten können: entweder 1) haben die beiden concentrischen projektivischen Strahlbüschel keine zusammenfallende entsprechende Strahlen (Doppelstrahlen), oder 2) nur ein Paar zusammenfallende entsprechende Strahlen, was dann das besondere Paar $g$ und $g_1$ oder $h$ und $h_1$ sein muss, oder 3) sie haben zwei Paar zusammenfallende entsprechende Strahlen. Schieben wir nun das Strahlbüschel $B_1$ wieder parallel

mit sich in seine ursprüngliche Lage zurück, so werden die vorhin zusammenfallenden Strahlen parallel laufen, ihr Schnittpunkt also im Unendlichen liegen. Nach den vorigen drei Kategorien zerfallen daher die Kegelschnitte in drei Gattungen:

1) Ein Kegelschnitt, welcher keinen unendlich-entfernten Punkt hat, dessen Punkte also sämmtlich in einem endlichen Stück der Ebene liegen, heisst eine Ellipse; sie kann nur durch zwei gleichlaufende projektivische Strahlbüschel erzeugt werden (siehe das Kriterium § 14).

2) Ein Kegelschnitt, welcher nur einen einzigen unendlich-entfernten Punkt hat, heisst eine Parabel; sie kann nur durch zwei gleichlaufende projektivische Strahlbüschel erzeugt werden, welche so liegen, dass entweder die besonderen Strahlen $g$ und $g_1$ oder $h$ und $h_1$ parallel laufen; da sämmtliche unendlich entfernte Punkte der Ebene auf einer Geraden $G_\infty$ liegen (§ 19) und die Parabel nur einen Punkt auf $G_\infty$ hat, so muss $G_\infty$ die Tangente (Projektionsstrahl) der Parabel sein und dieser Punkt der Berührungspunkt. Die Parabel hat also nur einen unendlich-entfernten Punkt und eine unendlich-entfernte Tangente.

3) Ein Kegelschnitt, welcher zwei unendlich-entfernte Punkte hat, heisst eine Hyperbel; sie kann sowohl durch gleichlaufende, als auch durch ungleichlaufende Strahlbüschel erzeugt werden (je nachdem ihre Mittelpunkte sich auf demselben oder auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel befinden, siehe Ende des § 26); zwei ungleichlaufende Strahlbüschel erzeugen immer eine Hyperbel.

Aus der vorigen Betrachtung geht hervor, dass durch parallele Verschiebung der Strahlbüschel $BB_1$ ohne Drehung um ihre Mittelpunkte die Gattung des Kegelschnitts, ihres Erzeugnisses, nicht verändert wird; fallen sie zusammen, so erscheint also ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt als specieller Fall einer Ellipse (als imaginäres Linienpaar), eine einzige gerade Linie (aufzufassen als zwei zusammenfallende Gerade) als specieller Fall einer Parabel, und zwei Gerade (ein Linienpaar) als specieller Fall einer Hyperbel. Halten wir dagegen die Mittelpunkte beider Strahlbüschel $BB_1$ fest und drehen die Strahlbüschel selbst um ihre Mittelpunkte, ohne die projektivische Beziehung zu verändern, so wird, falls die Strahlbüschel ungleichlaufend sind, ihr Erzeugniss auch seine Gattung nicht ändern, sondern beständig Hyperbel sein; es können aber dabei zwei besondere Fälle von

Interesse eintreten; einmal nämlich werden bei der Drehung zwei entsprechende Strahlen auf die Verbindungslinie der Mittelpunkte zu liegen kommen; dann werden die Strahlbüschel perspektivisch; der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen eine gerade Linie (der perspektivische Durchschnitt); die Punkte der Verbindungslinie der Mittelpunkte müssen aber auch als Punkte, welche zwei entsprechenden Strahlen gemeinschaftlich sind, angesehen werden; mithin degenerirt die Hyperbel in zwei Gerade, ein Linienpaar, von dem eine die Verbindungslinie der Mittelpunkte, die andere der perspektivische Durchschnitt ist. Ein zweiter besonderer Fall tritt ein, wenn bei der Drehung die Strahlen $s$ und $s_1$, folglich auch $t$ und $t_1$ in parallele Lage gelangen, d. h. die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel parallel werden; eine solche Hyperbel, bei welcher die unendlich entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, heisst eine gleichseitige Hyperbel; sie bietet in vielen Beziehungen eine Analogie mit dem Kreise dar; denn so wie der Kreis (§ 24) als das Erzeugniss zweier gleicher und gleichlaufender projektivischer Strahlbüschel erscheint, kann die gleichseitige Hyperbel auch als das Erzeugniss zweier gleicher und ungleichlaufender projektivischer Strahlbüschel aufgefasst werden; wenn nämlich zwei projektivisch gleiche aber ungleichlaufende Strahlbüschel ein Paar entsprechende Strahlen parallel haben, so haben sie nothwendig nur noch ein zweites Paar entsprechender Strahlen parallel, nämlich die mit jenen einen Winkel von $90^0$ bilden; da aber zwei ungleichlaufende Strahlbüschel immer zwei Paar entsprechende Strahlen parallel haben, so stehen deren Richtungen auf einander senkrecht; die unendlich entfernten Punkte des Erzeugnisses zweier projektivisch-gleicher ungleichlaufender Strahlbüschel liegen also in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen, mithin ist dies Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel. Die gleichseitige Hyperbel kann aber, wie wir gesehen haben, auch durch zwei beliebige projektivische Strahlbüschel erzeugt werden, nicht so der Kreis.

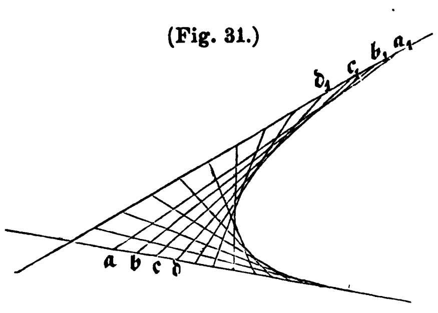
Sind dagegen zweitens die beiden Strahlbüschel $BB_1$ gleichlaufend und drehen wir dieselben um ihre festgedachten Mittelpunkte, ohne die projektivische Beziehung zu verändern, so verändert sich der Kegelschnitt und kann Ellipse, Parabel und Hyperbel werden. Der Spielraum, innerhalb dessen diese verschiedenen Fälle eintreten, ist leicht zu übersehen, wenn wir

nur das eine Strahlbüschel $B_1$ drehen, das andere $B$ dagegen unverändert lassen. Bei dieser Drehung kommen einmal $g$ und $g_1$ in parallele Lage; $h$ und $h_1$ laufen dann aber nicht parallel, weil bei zwei gleichlaufenden projektivischen Strahlbüscheln unmöglich gleichzeitig $g$ mit $g_1$ und $h$ mit $h_1$ parallel laufen kann (§ 14); drehen wir nun, mit der parallelen Lage von $g$ und $g_1$ beginnend, für welche das Erzeugniss eine Parabel wird, in einem oder dem andern Drehungssinne das Strahlbüschel $B_1$ herum, so wird das Erzeugniss Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Richtungen von $g$ und $h$ durch die Richtungen von $h_1$ und $g_1$ getrennt werden oder nicht; gelangen wir endlich bei fortgesetzter Drehung in die Lage, dass $h$ und $h_1$ parallel werden, so entsteht wieder eine Parabel, und weiter gedreht, geht das Erzeugniss, wenn es früher Ellipse war, in die Hyperbel über, oder umgekehrt; es giebt also zwei Gruppen von Kegelschnitten, welche bei dieser Bewegung auftreten; die eine enthält lauter Ellipsen, die andere lauter Hyperbeln; beide Gruppen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt. Unter der Gruppe von Hyperbeln tritt einmal das Linienpaar auf, wenn die Strahlbüschel perspektivisch werden, und einmal die gleichseitige Hyperbel, wenn $s$ und $s_1$, also auch $t$ und $t_1$ parallel werden.

## § 26. Bedingungen für die Erzeugung der verschiedenen Kegelschnitte durch zwei projektivische Punktreihen.

Betrachten wir anderseits das Erzeugniss zweier beliebiger projektivischer Punktreihen, so erkennen wir, dass dasselbe im Allgemeinen nur Ellipse oder Hyperbel sein kann, aber nicht Parabel; denn da die Parabel derjenige Kegelschnitt ist, welcher nur einen einzigen unendlich-entfernten Punkt besitzt, so muss die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$, da sie nur einen Punkt mit diesem Kegelschnitt gemein hat, ein Projektionsstrahl oder eine Tangente desselben sein; irgend zwei andere Tangenten, als Träger zweier erzeugenden Punktreihen aufgefasst, werden von der $G_\infty$ in den unendlich-entfernten Punkten getroffen, welches mithin entsprechende Punkte sein müssen. Zwei Punktreihen, deren unendlich-entfernte Punkte entsprechende sind, sind aber nothwendig projektivisch-ähnlich (§ 19); also sehen wir, dass eine Parabel nur von zwei projektivisch-ähnlichen Punkt-

*reihen erzeugt werden kann* und immer erzeugt wird, sobald sich dieselben nicht in perspektivischer Lage befinden; also auch umgekehrt: *Irgend zwei Tangenten einer Parabel werden von allen übrigen in zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen getroffen.* (Hieraus können wir uns leicht ein anschauliches Bild der Parabel durch Zeichnung herstellen, indem wir (Fig. 31) auf einer Geraden eine Anzahl von aequidistanten Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} \ldots$ und auf einer zweiten Geraden auch eine gleiche Anzahl von aequidistanten Punkten $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{d}_1 \ldots$ annehmen und dann die Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \ldots$ ziehen.) Es ist selbstverständlich, dass a fortiori auch zwei *projektivisch-gleiche* Punktreihen immer eine Parabel erzeugen, sobald sie nicht perspektivisch liegen. Bemerken wir hierzu noch, dass die Parabel keine zwei im Endlichen gelegene parallele Tangenten haben kann; denn hätte sie zwei parallele Tangenten und wir fassten sie als Träger zweier erzeugenden Punktreihen auf, so müsste ihr Schnittpunkt, da er die beiden unendlich-entfernten Punkte dieser Träger enthält und dieselben bei der Parabel entsprechende Punkte sein müssen, zwei entsprechende Punkte vereinigt haben; die Punktreihen wären also perspektivisch und die Projektionsstrahlen liefen alle durch einen Punkt, was gegen die Voraussetzung ist, dass sie eine Parabel umhüllen. *Die Parabel hat also keine zwei* (im Endlichen liegenden) *parallelen Tangenten*; anderseits kann freilich jede Tangente mit der unendlich entfernten Tangente $G_\infty$ als parallel angesehen werden, weil ihr Schnittpunkt im Unendlichen liegt.

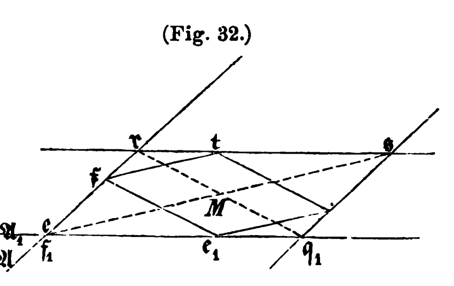


(Fig. 31.)

Um das Erzeugniss zweier beliebiger projektivischer Punktreihen, welche nicht ähnlich sind, genauer zu erkennen und insbesondere um zu erfahren, unter welchen Bedingungen dasselbe Ellipse oder Hyperbel wird, da es Parabel nicht sein kann, suchen wir auf den erzeugenden Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden (d. h. die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen § 12) $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf, und da diese selbst nicht

in die Unendlichkeit fallen können (denn sonst wären die Punktreihen ähnlich), so werden die durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$ gezogenen Parallelen Projektionsstrahlen, d. h. Tangenten des Kegelschnitts sein. Da man jede beliebige Tangente als Träger einer erzeugenden Punktreihe auffassen darf, so folgern wir: Bei Ellipse und Hyperbel treten die Tangenten paarweise parallel auf, d. h. es giebt zu jeder Tangente eine bestimmte parallele Tangente. Seien (Fig. 32) $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ die in dem Schnittpunkte der Träger vereinigten Punkte, also $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte, so muss, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die den unendlich entfernten Punkten ($\mathfrak{r}_1$ u. $\mathfrak{q}$) entsprechenden sind, weil der Schnittpunkt ($\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}\mathfrak{r}_1$) mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ in gerader Linie liegen muss (§ 21) und dies der unendlich entfernte Punkt der Verbindungslinie $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ ist, die Linie $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ parallel laufen; die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und die durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ gezogenen Parallelstrahlen bilden also ein dem Kegelschnitt umschriebenes Parallelogramm, dessen Diagonale $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ der Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ parallel läuft; sei $\mathfrak{s}$ die vierte Ecke dieses Parallelogramms, so lassen sich jetzt auch auf den Parallelstrahlen die Berührungspunkte leicht ermitteln. Betrachten wir nämlich zwei parallele Tangenten $\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1$ als Träger erzeugender Punktreihen und die beiden andern als Projektionsstrahlen, so würden für diese Beziehung $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}_1$, ebenso $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{q}_1$ entsprechende Punktenpaare sein, also der Schnittpunkt ($\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{s}\mathfrak{f}_1$), d. h. der Mittelpunkt $M$ des Parallelogramms müsste auf der Berührungssehne der beiden parallelen Tangenten liegen; $\mathfrak{e}_1 M$ trifft mithin den Parallelstrahl durch $\mathfrak{r}$ in dem gesuchten Berührungspunkt $t$ und ebenso $\mathfrak{f}M$ den Parallelstrahl durch $\mathfrak{q}_1$ in seinem Berührungspunkte und es folgt:

(Fig. 32.)

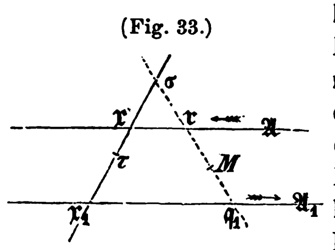



Die vier Berührungspunkte auf den Seiten eines dem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramms bilden selbst ein Parallelogramm, dessen Seiten den Diagonalen des ersteren parallel laufen und dessen Mittelpunkt mit dem des ersteren zusammenfällt.

Dieser Mittelpunkt des umschriebenen Parallelogramms ist zugleich Mittelpunkt des Kegelschnitts (§ 32).

Um nun zu erkennen, ob der erzeugte Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist, fassen wir zunächst zwei parallele Tangenten als Träger erzeugender Punktreihen auf. Die unendlich-entfernten Punkte dieser beiden Träger liegen in ihrem Schnittpunkt vereinigt, ihre entsprechenden $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ sind also die Berührungspunkte (Fig. 33); irgend ein Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ hinzugefügt bestimmt die ganze Beziehung; den Berührungspunkt auf ihm erhalte ich nach der Bemerkung in § 21 dadurch, dass ich zu dem Schnittpunkt $\sigma$ des Projektionsstrahls $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ mit der Berührungssehne $\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}_1$ den vierten harmonischen dem $\sigma$ zugeordneten Punkt $\tau$ konstruire, während $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist; es wird nun nachzusehen sein, ob $\tau$ in die Unendlichkeit gelangt oder nicht; im ersten Falle würde der Kegelschnitt Hyperbel, im andern Ellipse sein. Nun kann (§ 8) $\tau$ nur dann in die Unendlichkeit fallen, wenn $\sigma$ in die Mitte zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ zu liegen kommt; $\sigma$ kann aber überhaupt nie zwischen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, also auch nicht in die Mitte dieser variablen Strecke zu liegen kommen, sobald die beiden Punktreihen ungleichlaufend sind; denn alsdann liegen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ immer auf gleich gerichteten Hälften von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, nämlich entweder auf den beiden Hälften nach links oder den beiden Hälften nach rechts (§ 14); also der Schnittpunkt $\sigma$ durchläuft von der Verbindungslinie $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ diejenigen beiden unendlichen Stücke, welche ausserhalb der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ liegen, er kommt also nie zwischen die beiden Parallelen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und auch nie zwischen die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ auf ihnen; der Berührungspunkt $\tau$ kann daher nie in die Unendlichkeit gelangen, also der Kegelschnitt ist nothwendig Ellipse. Wenn dagegen die beiden projektivischen Punktreihen auf den parallelen Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ gleichlaufend sind, so verhält sich die Sache gerade umgekehrt; die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ liegen auf entgegengesetzt gerichteten Hälften von $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$; der Punkt $\sigma$ durchläuft also nur die endliche Strecke zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ und liegt daher immer zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$; er muss zwei Mal in die Mitte von $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gelangen, also auch von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$; denn verbinden wir die Mitte $M$ von

(Fig. 33.)



$\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ mit den beiden projektivischen Punktreihen, welche $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ durchlaufen, so erhalten wir in *M* zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, welche ungleichlaufend sind, folglich (§ 14) immer zwei reelle Doppelstrahlen haben; dieses sind aber zwei Projektionsstrahlen, die sich in *M* halbiren; ihre Berührungspunkte liegen im Unendlichen, der Kegelschnitt ist also Hyperbel.

Wir haben daher gefunden, dass zwei projektivische Punktreihen, deren Träger in paralleler Lage sich befinden, eine Ellipse erzeugen, wenn sie ungleichlaufend sind, dagegen eine Hyperbel, wenn sie gleichlaufend sind. (Aus der Eigenschaft des konstanten Rechtecks $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ ergiebt sich folgender Satz in Bezug auf den Kegelschnitt: „Wenn zwei feste parallele Tangenten desselben von einer veränderlichen dritten getroffen werden, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken, welche auf den festen Tangenten durch die Berührungspunkte und die Schnittpunkte der veränderlichen Tangenten begrenzt werden, konstant.") Aus dem gefundenen Kriterium leitet sich nun unmittelbar ein neues für den allgemeinen Fall ab, wenn nämlich die beiden Träger der erzeugenden Punktreihen sich nicht mehr in paralleler Lage befinden. Stellen wir nunmehr, wenn $\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1$ in dem Schnittpunkte der Träger vereinigt liegen, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ die Berührungspunkte und $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ die Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen sind, also $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ parallel $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ (siehe oben Fig. 32) das Parallelogramm her, welches von den Trägern der erzeugenden Punktreihen und den Parallelstrahlen gebildet wird, so werden nach dem Vorigen die Berührungspunkte auf den Parallelstrahlen bestimmt, indem man $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ mit dem Mittelpunkte *M* des Parallelogramms verbindet und die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit den Parallelstrahlen aufsucht. Sei $\mathfrak{t}$ der Berührungspunkt auf dem durch $\mathfrak{r}$ gehenden Parallelstrahl, so können wir die parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{t}$ sind, als Träger der erzeugenden Punktreihen auffassen und wissen aus dem vorigen Kriterium, dass der Kegelschnitt Ellipse ist, sobald $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}_1$ auf gleich gerichteten Hälften von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{e}_1$ liegen; da nun $\mathfrak{t}\mathfrak{f}$ parallel der zweiten festen Diagonale des Parallelogramms läuft, so mnss in diesem Fall $\mathfrak{f}$ zwischen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}$ liegen und wir schliessen somit:

Zwei projektivische Punktreihen in allgemeiner Lage erzeugen eine Ellipse, wenn die Berührungs-

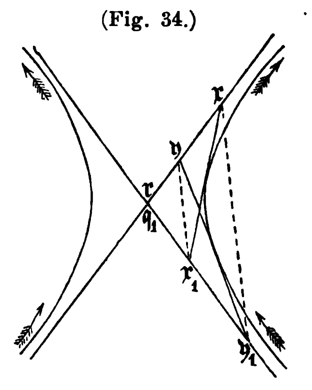
punkte ihrer Träger $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, welche den in ihrem Schnittpunkte vereinigten Punkten $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ entsprechen, zu den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ so liegen, dass $\mathfrak{f}$ zwischen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}$, also auch $\mathfrak{e}_1$ zwischen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ liegt, dagegen eine Hyperbel, wenn $\mathfrak{f}$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{e}\mathfrak{r}$, also auch $\mathfrak{e}_1$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1$ liegt, oder in Worten: elliptische Lage findet statt, wenn der Berührungspunkt zwischen dem Schnittpunkt der beiden Träger und dem Punkte $\mathfrak{r}$ (oder $\mathfrak{q}_1$) liegt, dagegen hyperbolische Lage, wenn der Berührungspunkt ausserhalb der Strecke jener beiden Punkte liegt.

Hieraus folgt, dass, wenn wir den Schnittpunkt der Träger zweier projektivischer Punktreihen festhalten und die projektivische Beziehung ungeändert lassen, die Träger selbst aber um ihren Schnittpunkt drehen, der erzeugte Kegelschnitt seine Gattung nicht verändert, d. h. Ellipse bleibt, wofern er es einmal war, und ebenso Hyperbel, wohl aber seine Form. Dagegen kann der Kegelschnitt seine Gattung verändern, wenn wir die Träger in ihrer Lage festhalten, die Punktreihen aber mit ihren Trägern auf sich selbst verschieben, ohne die projektivische Beziehung zu verändern. Verschieben wir nur die Punktreihe $\mathfrak{A}$ auf ihrem in seiner Lage festgehaltenen Träger, so bleibt der Kegelschnitt Ellipse, solange $\mathfrak{f}$ zwischen $\mathfrak{f}_1\mathfrak{r}$ liegt; gelangt $\mathfrak{f}$ nach $\mathfrak{f}_1$, so werden die Punktreihen perspektivisch, die Projektionsstrahlen laufen also durch einen Punkt, den Projektionspunkt, und da in dem Schnittpunkt der Träger jetzt zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so muss auch jede durch ihn gehende Gerade als Projektionsstrahl angesehen werden; in diesem Uebergangsfalle degenerirt der Kegelschnitt in ein Punktenpaar und ist sowohl als Ellipse, wie auch als Hyperbel anzusehen (das endliche Stück zwischen den beiden Punkten, doppelt gedacht als unendlich dünne Ellipse, die beiden unendlichen Stücke auf der Verbindungslinie der beiden Punkte, welche zu beiden Seiten von ihnen liegen, doppelt gedacht als unendlich dünne Hyperbel). So wie bei der Erzeugung des Kegelschnitts durch projektivische Strahlbüschel als Uebergang von Ellipse zu Hyperbel die Parabel auftrat, zeigt sich hier, bei der Erzeugung des Kegelschnitts durch projektivische Punktreihen, ein neuer Uebergang von Ellipse zu Hyperbel durch das Punktenpaar, ein Uebergang, welcher bei geometrischen Unter-

suchungen häufiger aufzutreten pflegt, als jener. Schieben wir nun die Punktreihe $\mathfrak{A}$ auf ihrem Träger weiter fort, so kommt $\mathfrak{f}$ ausserhalb $\mathfrak{f}_1\mathfrak{r}$ zu liegen, der Kegelschnitt ist also nach dem obigen Kriterium Hyperbel geworden; kommt dann $\mathfrak{r}$ nach $\mathfrak{f}_1$, so wird $\mathfrak{r}_1$ ($\infty$), d. h. der unendlich-entfernte Punkt des Trägers $\mathfrak{A}_1$ der Berührungspunkt, also $\mathfrak{A}_1$ die Tangente der Hyperbel in einem ihrer unendlich-entfernten Punkte. Eine solche Tangente in einem der beiden unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel heisst Asymptote der Hyperbel. Wir können es leicht einrichten, dass die Träger der beiden erzeugenden Punktreihen die Asymptoten der Hyperbel werden, indem wir beide Punktreihen so auf ihren Trägern verschieben, dass die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ in ihrem Durchschnittspunkte vereinigt werden; dann sind die ihnen entsprechenden, d. h. die unendlich-entfernten Punkte die Berührungspunkte, also die Träger der erzeugenden Punktreihen die Tangenten in den unendlich-entfernten Punkten oder die Asymptoten der Hyperbel.

Mit Hülfe der Asymptoten können wir uns leicht ein Bild der Hyperbel machen; da nämlich in ihrem Schnittpunkt die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ vereinigt und für irgend ein Paar entsprechender Punkte das Rechteck $\mathfrak{r}\mathfrak{x} . \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ konstant ist (§ 12), so bleibt auch der Inhalt des Dreiecks konstant, welches von den Asymptoten und einer beliebigen dritten Tangente der Hyperbel gebildet wird, oder jede Tangente der Hyperbel schliesst mit den beiden Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalte ein. Das konstante Rechteck aus den auf den Asymptoten der Hyperbel durch eine veränderliche Tangente abgeschnittenen Strecken heisst die Potenz der Hyperbel. Denken wir uns daher die beiden Asymptoten und eine beliebige dritte Tangente $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gegeben (Fig. 34), wodurch die projektivische Beziehung vollständig bestimmt ist, so erhalten wir leicht andere Tangenten, indem wir von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ in irgend einer Richtung ein Paar Parallele ziehen, welche in $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$ den Asymptoten begegnen; dann ist $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ eine neue Tangente, weil das Dreieck, welches sie mit den Asymptoten bildet, denselben Inhalt hat, oder auch weil $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$ sich auf

(Fig. 34.)



der Berührungssehne, d. h. hier $G_\infty$ befindet (§ 21). Auf jeder Tangente ist ferner der Berührungspunkt der Mittelpunkt zwischen den beiden Schnittpunkten mit den Asymptoten, weil er der vierte harmonische dem Schnittpunkt mit $G_\infty$ zugeordnete ist. Verändern wir die Richtung der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ gezogenen Parallelen, so können wir leicht so viele Tangenten und auch Punkte der Hyperbel (die Berührungspunkte) herstellen, als erforderlich sind, um uns ein Bild von ihrem Verlaufe machen zu können. Wir sehen hieraus, dass die Hyperbel in zwei in Bezug auf den Schnittpunkt der Asymptoten ($\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$) symmetrische unendliche Zweige zerfällt, welche ganz in zwei Scheitelräume der von den Asymptoten gebildeten Winkel hinein fallen, während die andern beiden Scheitelräume leer ausgehen; die Zweige der Hyperbel liegen nämlich in denjenigen Winkelräumen der Asymptoten, welche von entsprechenden Hälften (§ 12, Fig. 13) der Träger der erzeugenden Punktreihen eingeschlossen werden. Die Richtungen sämmtlicher Tangenten der Hyperbel fallen in die beiden andern Scheitelräume und je zwei parallele Tangenten berühren die Hyperbel an verschiedenen Zweigen; die Asymptoten erscheinen als je ein Paar zusammenfallende parallele Tangenten und trennen diejenigen Winkelräume von einander, welche solche Richtungen enthalten, in denen es Tangenten an die Hyperbel giebt, und solche, in denen es keine Tangenten giebt. Verfolgen wir den Verlauf einer Tangente an der Hyperbel, so erkennen wir, dass sie sich von der Lage einer Asymptote kontinuirlich bis in die Lage der andern bewegt, dann aber gewissermassen ihren Drehungssinn ändernd wieder in die Lage der ersten Asymptote zurückkehrt; der Berührungspunkt durchläuft dabei die beiden Zweige der Hyperbel in kontinuirlicher Folge, indem er zuerst auf dem einen Zweige bis zu dem einen unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel geht, dann aber zu dem unendlich-entfernten Punkte des andern Zweiges, welcher der unendlich-entfernte Punkt derselben Asymptote ist, übergeht (§ 3), sodann den andern Zweig durchläuft und durch den unendlich-entfernten Punkt der zweiten Asymptote zum ersten Zweige wieder zurückkehrt. In diesem Sinne haben wir uns die Hyperbel als zusammenhängende Kurve zu denken (durch die unendlich entfernten Punkte) und nicht als zwei getrennte Kurven, und nur derartig haben wir

sie zu durchlaufen, wie die Pfeile in Fig. 34 es andeuten. Wir erkennen zugleich bei diesem Verlaufe, dass, wenn wir uns die Hyperbel als Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel denken, die Strahlbüschel gleichlaufend sind, sobald ihre Mittelpunkte sich auf demselben Zweige der Hyperbel befinden, dagegen ungleichlaufend, wenn ihre Mittelpunkte sich auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel befinden. Denken wir uns die vorhin begonnene Verschiebung der Punktreihe $\mathfrak{A}$ auf ihrem in seiner Lage festgehaltenen Träger fortgesetzt, so bleibt das Erzeugniss immer Hyperbel; gelangt $\mathfrak{r}$ in die Unendlichkeit, so rücken auch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}$, wie überhaupt alle in endlichem Abstande von $\mathfrak{r}$ liegenden Punkte in die Unendlichkeit und es tritt der eigenthümliche in § 19 erwähnte Fall der parabolischen Lage beider Punktreihen ein, bei welcher das Erzeugniss in ein Punktenpaar zerfällt, hier den unendlich-entfernten Punkt auf $\mathfrak{A}$ und den Punkt $\mathfrak{q}_1$ auf der Geraden $\mathfrak{A}_1$. Es bleibt noch übrig, die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen zwei projektivische Punktreihen eine **gleichseitige Hyperbel** zu ihrem Erzeugniss haben. Hierzu haben wir nur nöthig, die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ in dem Schnittpunkte der beiden erzeugenden Träger zu vereinigen und die Träger selbst zu einander rechtwinkelig zu legen; da sie nämlich, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ in ihrem Schnittpunkt vereinigt sind, die Asymptoten der Hyperbel werden, so hat diese ihre unendlich-entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkeligen Richtungen und ist daher eine gleichseitige Hyperbel (§ 25). Wir kommen aber auch auf andere Weise zur gleichseitigen Hyperbel: Legen wir die Träger der beiden erzeugenden Punktreihen parallel und gleichlaufend, bestimmen die Punkte $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ und bringen die parallelen Träger in solchen Abstand von einander, dass die Entfernung $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{g}_1$ wird, so ist das Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel; denn sei $M$ die Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$, so liegen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ und ebenso $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ mit $M$ in gerader Linie, weil $\mathfrak{g}\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1\mathfrak{q}_1$; folglich sind $\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ nach dem Vorigen die Asymptoten des Erzeugnisses, weil ihr Berührungspunkt im Unendlichen liegt, und sie stehen auf einander senkrecht, wenn $\mathfrak{g}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{r}M$ ist; also ist das Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel. Legen wir endlich zwei beliebige projektivische Punktreihen so, dass in ihrem Schnittpunkte irgend zwei nicht entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ vereinigt werden, deren entsprechende $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ aber so beschaffen sind,

dass $\mathfrak{f}$ ausserhalb $\mathfrak{e}\mathfrak{r}$ und daher auch $\mathfrak{e}_1$ ausserhalb $\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1$ liegt, so lässt sich der Winkel $\varphi$ zwischen den beiden Trägern so bestimmen, dass sie eine gleichseitige Hyperbel erzeugen; mit Hülfe des vorigen Kriteriums für zwei erzeugende Punktreihen in paralleler Lage und durch eine elementare Rechnung finden wir nämlich, dass, wenn $M$ die Mitte zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ bedeutet, für die gleichseitige Hyperbel

$$\mathfrak{r}\mathfrak{f} \, . \, \mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1 \, . \cos\varphi = \mathfrak{r}M^2$$

sein muss, also:

Zwei beliebige projektivische Punktreihen können immer so gelegt werden, dass sie eine gleichseitige Hyperbel erzeugen; hierzu vereinige man ein Paar nicht entsprechende Punkte $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}_1$ in ihrem Schnittpunkt, deren entsprechende $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ so liegen, dass $\mathfrak{f}$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{e}\mathfrak{r}$ und also auch $\mathfrak{e}_1$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{q}_1$ liegt, und bestimme den Winkel beider Träger so, dass das Quadrat des halben Abstandes der Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ von einander gleich wird dem konstanten Rechteck der projektivischen Beziehung $(\mathfrak{r}\mathfrak{x} \, . \, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1)$, multiplicirt mit dem cos des Winkels zwischen den Trägern.

In den besonderen Fällen $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$ gehen hieraus die beiden vorigen Entstehungsarten der gleichseitigen Hyperbel hervor.

Aus der Eigenschaft der Asymptoten einer Hyperbel geht auch die Bestätigung einer in § 20 (Anmerkung) aufgestellten Behauptung hervor; seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ die Träger zweier projektivischen Punktreihen in perspektivischer Lage und werden die in sich festgehaltenen Punktreihen so auf ihren resp. Trägern verschoben, dass immer zwei neue entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ in dem Schnittpunkte der Träger vereinigt werden, so wird jedesmal eine neue perspektivische Lage derselben beiden Punktreihen hervorgerufen und es kann nach dem Ort des Projektionspunktes für alle diese perspektivischen Lagen gefragt werden. Um ihn zu bestimmen, verfolgen wir die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, ziehen Parallele durch sie zu den festen Trägern und erhalten in deren Schnittpunkte $B$ jedesmal den gesuchten Projektionspunkt. Weil nun der projektivischen Beziehung gemäss $\mathfrak{r}\mathfrak{x} \, . \, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ konstant ist, so behält das gezeichnete Parallelogramm konstanten Inhalt also

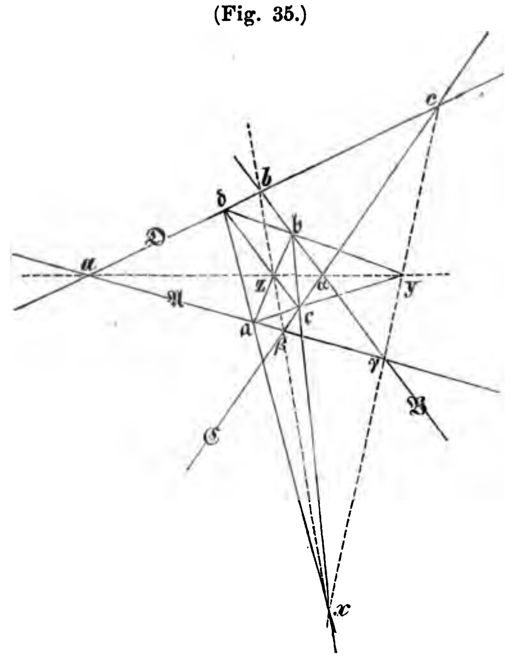
auch die durch die gegenüberliegende Ecke $B$ zur Diagonale $\mathfrak{x}\mathfrak{q}_1$ gezogene Parallele bestimmt mit den Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ ein Dreieck von konstantem (vierfachem) Inhalt, umhüllt also eine Hyperbel, deren Asymptoten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ sind; da aber $B$ in der Mitte zwischen den Schnittpunkten mit den beiden Trägern liegt, so ist $B$ der Berührungspunkt, also wird der gesuchte Ort eine Hyperbel, welche die beiden festen Träger zu ihren Asymptoten hat.

## § 27. Das einem Kegelschnitte umbeschriebene Vierseit und einbeschriebene Viereck.

Die in § 23 durchgeführte Untersuchung und die dort in Betracht gezogene Figur (Fig. 29) zeigt eine Menge von Eigenschaften des Kegelschnitts, von denen einige hier hervorgehoben werden mögen. Das dort gewonnene Resultat lässt sich mit etwas veränderter Bezeichnung so aussprechen:

Werden (Fig. 35) irgend vier Tangenten eines Ke-

(Fig. 35.)




gelschnitts $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ als vollständiges Vierseit aufgefasst, dessen sechs Ecken seien

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = a \qquad (\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) = b \qquad (\mathfrak{C}, \mathfrak{D}) = c$$
$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \alpha \qquad (\mathfrak{C}, \mathfrak{A}) = \beta \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \gamma$$

und dessen drei Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sich in den Punkten

$$(b\beta, c\gamma) = x \qquad (c\gamma, a\alpha) = y \qquad (a\alpha, b\beta) = z$$

treffen, und werden die vier Berührungspunkte der vier Tangenten, resp. mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ bezeichnet, als vollständiges Viereck aufgefasst, so fallen die drei Diagonalpunkte des letzteren mit den Punkten $xyz$ zusammen, d. h. es schneiden sich

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{d}, \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = x \qquad (\mathfrak{b}\mathfrak{d}, \mathfrak{c}\mathfrak{a}) = y \qquad (\mathfrak{c}\mathfrak{d}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = z.$$

Hieraus geht hervor, dass der Kegelschnitt vollständig bestimmt ist, sobald von ihm vier Tangenten und der Berührungspunkt auf einer, oder vier Punkte und die Tangente in einem derselben gegeben sind, was auch daraus hervorgeht, dass mit diesen Bestimmungsstücken drei Paar entsprechende Elemente zweier projektivischer Punktreihen oder Strahlbüschel gegeben werden, also die ganze projektivische Beziehung bestimmt ist. Wir finden die Berührungspunkte auf den andern Tangenten, wenn $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{A}$ bekannt sei, indem wir $\mathfrak{a}x$, $\mathfrak{a}y$, $\mathfrak{a}z$ ziehen und ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ aufsuchen, oder wir finden die Tangenten in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, wenn $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{a}$ bekannt ist, indem wir die Schnittpunkte $\gamma\beta a$, in welchen $\mathfrak{A}$ den Verbindungslinien $xy$, $xz$, $yz$ begegnet, resp. mit den andern drei Ecken $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ verbinden.

Wir haben ferner in § 23 gesehen, dass irgend zwei Tangenten eines Kegelschnitts von sämmtlichen in zwei projektivischen Punktreihen getroffen werden, bei denen also vier Paar entsprechende Punkte denselben Werth des Doppelverhältnisses liefern. In unserer Figur muss also eine beliebige fünfte Tangente des Kegelschnitts von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in vier solchen Punkten getroffen werden, welche denselben Werth des Doppelverhältnisses liefern, wie die vier Schnittpunkte $\mathfrak{a}\gamma\beta a$ oder $\gamma\mathfrak{b}\alpha b$ u. s. f., also schliessen wir umgekehrt:

Sämmtliche Gerade, welche vier feste Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in vier solchen Punkten treffen, dass der Werth des Doppelverhältnisses derselben (bei beliebiger, aber festgehaltener Zuordnung, § 5) konstant bleibt, umhüllen einen bestimmten Kegelschnitt, welcher auch

die vier festen Geraden berührt, oder anderseits: Sämmtliche Punkte, welche, mit vier festen Punkten abcd verbunden, vier Strahlen liefern, deren Doppelverhältniss (bei beliebiger, aber festgehaltener Zuordnung) konstant bleibt, liegen auf einem bestimmten Kegelschnitt, welcher auch durch die vier gegebenen Punkte geht.

Ist der Werth des Doppelverhältnisses bei bestimmter Zuordnung gegeben, so ist der Kegelschnitt nach dem Vorigen eindeutig bestimmt und leicht zu ermitteln. Ein besonderer Fall ist hierbei von Interesse, nämlich wenn der Werth des Doppelverhältnisses = — 1 ist, also harmonische Beziehung auftritt (§ 8); wir erhalten aus dem Vorigen folgende Sätze:

Sind vier beliebige Gerade ABCD in der Ebene gegeben und wird eine Gerade gesucht, welche von ihnen in vier harmonischen Punkten getroffen werde, so besteht der Ort derselben aus den sämmtlichen Tangenten von drei bestimmten Kegelschnitten, welche selbst die vier gegebenen Geraden berühren; es lassen sich nämlich die vier Geraden auf drei Arten in zwei Paare theilen, welche die gesuchte Gerade immer in zugeordneten Punkten treffen, AB und CD, AC und BD, BC und AD; für jede dieser drei Zuordnungen besteht der Ort der gesuchten Geraden aus den sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts, welcher dem Vierseit ABCD einbeschrieben ist und dessen Berührungspunkt auf je einer dieser vier Tangenten gefunden wird, indem man zu den drei Schnittpunkten mit den andern den vierten harmonischen Punkt aufsucht. Oder anderseits:

Soll ein Punkt gefunden werden, dessen Verbindungsstrahlen mit vier festen Punkten abcd vier harmonische Strahlen sind, so besteht der Ort desselben aus drei bestimmten Kegelschnitten, welche dem Viereck abcd umbeschrieben sind, je nachdem man die nach ab und cd, oder nach bc und ad, oder nach ac und bd hingehenden Strahlenpaare als zugeordnet annimmt. Für jeden dieser drei Kegelschnitte werden die Tangenten in den Punkten abcd gefunden, indem man je

*einen derselben mit den drei andern verbindet und den vierten harmonischen Strahl aufsucht.* (Es ist leicht ersichtlich, dass von solchen drei Kegelschnitten entweder a) alle drei Hyperbeln sind, wenn nämlich die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, oder b) zwei Hyperbeln und der dritte Ellipse ist, wenn nämlich die vier Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ so liegen, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet.)

Solche drei dem Vierseit einbeschriebene oder dem Viereck umbeschriebene Kegelschnitte heissen *harmonische Kegelschnitte* und umgekehrt heissen *vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts* vier solche, welche alle übrigen in vier harmonischen Punkten treffen, und *vier harmonische Punkte eines Kegelschnitts* vier solche, welche mit einem beliebigen andern Punkt des Kegelschnitts verbunden vier harmonische Strahlen liefern. Es ist leicht, auf einem gegebenen Kegelschnitt vier harmonische Punkte oder vier harmonische Tangenten an demselben auf unzählig viele Arten zu ermitteln, und aus § 23 geht zugleich hervor, *dass vier harmonische Tangenten eines Kegelschnitts in vier harmonischen Punkten desselben berühren* und umgekehrt. Vier harmonische Punkte auf einem Kegelschnitt müssen nämlich immer so liegen, dass die Verbindungslinie zweier zugeordneten durch den Schnittpunkt der Tangenten in den beiden andern zugeordneten Punkten hindurchgeht, und hieraus folgt, dass es zu zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnitts, welche als zugeordnete gewählt werden, unendlich viele andere Paare zugeordneter Punkte giebt, die mit jenen beiden immer vier harmonische Punkte des Kegelschnitts bilden, und dass die Verbindungslinien (Sehnen) aller dieser Paare durch einen festen Punkt laufen.

Kehren wir zu der allgemeineren Figur von vier beliebigen Tangenten eines Kegelschnitts und den vier Berührungspunkten zurück, so können wir das Vierseit festhalten und das Viereck verändern, oder auch das Viereck festhalten und das Vierseit verändern. Ersteres geschieht, indem wir einen Berührungspunkt $\mathfrak{a}$ die feste Tangente $\mathfrak{A}$ durchlaufen lassen, letzteres, indem wir um eine Ecke $\mathfrak{a}$ die Tangente $\mathfrak{A}$ drehen. Wir erhalten dadurch eine Schaar von unendlich vielen Kegelschnitten, welche dieselben vier

Tangenten haben, und ein Büschel von unendlich vielen Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen, auf deren Untersuchung wir aber erst im dritten Abschnitt näher eingehen wollen. Für jetzt genüge es, indem wir die vier Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ festhalten, zwei Kegelschnitte ins Auge zu fassen, welche in den Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}^1\mathfrak{d}^1$ dieselben vier Tangenten berühren; für das zweite Viereck $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}^1\mathfrak{d}^1$ gilt natürlich ganz dasselbe, wie für das erste; seine Diagonalpunkte sind also auch $xyz$; insbesondere schneiden sich $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$ in $z$. Weil nun $a\alpha yz$ vier harmonische Punkte sind, also $\gamma a$, $\gamma\alpha$, $\gamma y$, $\gamma z$ vier harmonische Strahlen und $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1, \mathfrak{b}\mathfrak{b}^1) = \gamma$ ist, so muss $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^1, \mathfrak{b}\mathfrak{a}^1)$ auf dem vierten harmonischen Strahle, d. h. $\gamma y$ oder $xy$ liegen (§ 9). Die vier von $\mathfrak{a}$ ausgehenden Strahlen $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}^1\mathfrak{a}^1\mathfrak{d}\mathfrak{c})$ treffen also die vier von $\mathfrak{b}$ ausgehenden $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ in vier Punkten derselben Geraden $xy\gamma$; wir erhalten daher zwei perspektivische Strahlbüschel und nach § 6. 1 sind mithin die beiden Strahlbüschel $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ und $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ projektivisch, folglich liegen die sechs Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}^1\,\mathfrak{b}^1$ auf einem Kegelschnitt; in gleicher Weise zeigen wir, dass auch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}^1\,\mathfrak{c}^1$ auf einem Kegelschnitt liegen müssen und, da dieser durch fünf Punkte schon bestimmt ist (§ 22), auf demselben Kegelschnitt; folglich liegen alle acht Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}^1\mathfrak{d}^1$ auf ein und demselben Kegelschnitt, oder:

*Die acht Berührungspunkte von irgend zwei demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitten liegen allemal auf einem neuen Kegelschnitte.*

In gleicher Weise wird der analoge Satz bewiesen:

*Die acht Tangenten in vier gemeinschaftlichen Punkten zweier Kegelschnitte berühren allemal einen neuen Kegelschnitt.*

Diese beiden demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte bieten noch andere Eigenthümlichkeiten rücksichtlich der Lage ihrer Berührungspunkte zu den Gegenecken des Vierseits und den gegenseitigen Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte dar, deren nähere Untersuchung uns hier zu weit führen würde. (Vergl. Steiner: Lehrsätze, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 44 Seite 275 u. Bd. 45 Seite 219.)

Auch wollen wir hier nicht auf eine allgemeine Eigenschaft desjenigen Kegelschnitts, welcher die acht Berührungspunkte zweier demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte enthält,

eingehen, weil dieselbe aus späteren Betrachtungen unmittelbarer hervortritt (§ 31 und § 55). Wir könnten aus der in diesem Paragraphen untersuchten Figur leicht zu den sogenannten Polar-Eigenschaften des Kegelschnitts übergehen, ziehen es indessen vor, dieselben etwas später aus ursprünglicheren Betrachtungen abzuleiten.

### § 28. Das Hexagrammum mysticum und die Steiner'sche Erweiterung desselben.

Wir haben bereits (§ 22) gesehen, dass im Allgemeinen fünf Punkte zur Bestimmung des Kegelschnitts nothwendig sind und dass er durch dieselben eindeutig bestimmt wird. Damit sechs Punkte auf demselben Kegelschnitt liegen, ist eine Bedingung zwischen ihnen erforderlich, welche darin besteht, dass, wenn die Punkte mit $B B_1 \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ bezeichnet werden, die beiden Strahlbüschel von je vier Strahlen

$$B\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = B_1\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$$

dasselbe Doppelverhältniss haben; diese Bedingung, deren Umkehrung zulässig ist, haben wir bereits oben anders aufgefasst und daraus das von Pascal mit dem Namen Hexagrammum mysticum bezeichnete Theorem geschlossen, auf welches wir jetzt noch einmal näher eingehen wollen.

Ziehen wir die Verbindungslinien $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und lassen die erstere von den vier Strahlen $B\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$ und die letztere von den vier Strahlen $B_1\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d})$ treffen, so erhalten wir, weil jene Doppelverhältnisse gleich sind, auf $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ vier Paar entsprechender Punkte zweier projektivischen Punktreihen, nämlich

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & (B\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) & (B\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{a} & (B_1\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}) & \mathfrak{c} & (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}); \end{array}$$

da der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ zwei entsprechende Punkte enthält, so sind die Punktreihen in perspektivischer Lage, also die Verbindungslinien entsprechender Punkte laufen durch einen Punkt, d. h.

$$B_1\mathfrak{b} \qquad B\mathfrak{c} \qquad [(B\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}),\ (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c})]$$

laufen durch einen Punkt, oder was dasselbe sagt, die drei Punkte

$$(B_1\mathfrak{b},\ B\mathfrak{c}) \qquad (B\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \qquad (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c})$$

liegen auf einer Geraden; diese drei Punkte lassen sich aber als Schnittpunkte gegenüber liegender Seiten eines einfachen Sechs-

ecks auffassen, dessen Ecken in gewisser Reihenfolge die sechs Punkte des Kegelschnitts sind; in der That dieses Sechseck lautet:

$$B_1 \ \mathfrak{b} \ \mathfrak{a} \ \mathfrak{c} \ B \ \mathfrak{d}$$

und wir schliessen daraus: **Werden sechs Punkte eines Kegelschnitts in irgend welcher Reihenfolge zu einem einfachen Sechseck verbunden, so liegen die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.**

Dieser Satz ist offenbar auch umzukehren: Liegen die drei Schnittpunkte von drei Linienpaaren auf einer Geraden und man fasst dieselben als die gegenüberliegenden Seiten eines einfachen Sechsecks auf, so liegen die sechs Ecken desselben auf einem Kegelschnitt; denn seien die drei Linienpaare $a\,b \quad a_1\,b_1 \quad a_2\,b_2$, deren Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so lassen sich dieselben als gegenüberstehende Seiten eines einfachen Sechsecks auffassen, dessen Seiten in der Reihenfolge stehen:

$$a \ b_2 \ a_1 \ b \ a_2 \ b_1$$

und dessen Ecken also sind:

$$(a\,b_2) \quad (b_2\,a_1) \quad (a_1\,b) \quad (b\,a_2) \quad (a_2\,b_1) \quad (b_1\,a).$$

Diese sechs Ecken müssen nun auf einem Kegelschnitt liegen, weil die vier Strahlenpaare

$$(a_2\,b_1) \ \{(a_1\,b),\ (a_1\,b_2),\ (b\,a_2),\ (b_1\,a)\}$$
$$(a\ \ b_2) \ \{(a_1\,b),\ (a_1\,b_2),\ (b\,a_2),\ (b_1\,a)\}$$

projektivisch sind aus folgendem Grunde: die ersten vier Strahlen treffen nämlich $a_1$ und die letzten vier Strahlen $b$ in den Punktenpaaren

$$(a_1\,b) \quad (a_1\,b_2) \quad (a_1\,a_2) \quad (a_1\,b_1)$$
$$(a_1\,b) \quad (b\ \ b_2) \quad (b\ \ a_2) \quad (a\ \ b)$$

und die ersten vier Punkte liegen mit den letzten vier perspektivisch, weil der Punkt $(a_1\,b)$ gemeinschaftlich ist und die drei anderen Verbindungsstrahlen

$$b_2 \qquad a_2 \qquad (a\,b,\ a_1\,b_1)$$

sind, welche sich in einem Punkte schneiden müssen, weil die Schnittpunkte $a\,b \quad a_1\,b_1 \quad a_2\,b_2$ in einer Geraden liegen; hierdurch ist der umgekehrte Satz erwiesen und lässt sich, wie wir aus der Bezeichnung der sechs Ecken erkennen, auch so aussprechen:

**Wenn von den neun Punkten, in welchen die Seiten eines Dreiseits $a\,a_1\,a_2$ die Seiten eines andern $b\,b_1\,b_2$**

treffen, drei in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitte.

In ganz gleicher Weise wird der analoge (Brianchon'sche) Satz und sein umgekehrter abgeleitet und erscheint als eine andere Ausdrucksweise für die Gleichheit zweier Doppelverhältnisse:

Werden sechs Tangenten eines Kegelschnitts in irgend welcher Reihenfolge zu einem einfachen Sechsseit zusammengefasst, so laufen die drei Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken durch einen Punkt, und umgekehrt: Laufen die Verbindungslinien von drei Punktenpaaren durch einen Punkt und man fasst dieselben als gegenüberliegende Ecken eines einfachen Sechsecks auf, so berühren seine sechs Seiten einen und denselben Kegelschnitt.

Beide Sätze lassen sich in Verbindung bringen und führen dann zu einem neuen Satze. Fassen wir nämlich in dem obigen Sechseck

$$B_1 \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{c} \quad B \quad \mathfrak{d}$$

die Schnittpunkte der Gegenseiten auf:

$$(B_1\mathfrak{b},\ B\mathfrak{c}) \quad (B\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \quad (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}),$$

welche in gerader Linie liegen müssen, so haben wir zugleich drei Punktenpaare, deren Verbindungslinien durch einen Punkt laufen, nämlich:

$$B_1 \text{ und } \mathfrak{b}$$
$$B \text{ und } \mathfrak{c}$$
$$(B\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}) \text{ und } (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}).$$

Fassen wir diese als gegenüberliegende Ecken eines einfachen Sechsseits auf, so lassen sich die Ecken desselben in folgender Reihe zusammen stellen:

$$B_1 \quad (B_1\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{c}) \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{b} \quad (\mathfrak{b}\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}B) \quad B$$

und hieraus folgen die auf einander folgenden Seiten

$$B_1\mathfrak{d} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} \quad \mathfrak{c}\mathfrak{b} \quad \mathfrak{b}\mathfrak{a} \quad \mathfrak{d}B \quad BB_1.$$

Diese sechs Linien müssen nach dem vorigen Satze einen Kegelschnitt berühren; sie sind nichts anderes, als die Seiten der beiden Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $BB_1\mathfrak{d}$; wir schliessen hieraus den Satz:

Wenn die sechs Ecken zweier Dreiecke auf einem Kegelschnitt liegen, so berühren die sechs Seiten derselben einen zweiten Kegelschnitt,

und zugleich den parallel laufenden Satz, welcher der umgekehrte ist:

Wenn die sechs Seiten zweier Dreiseite einen

*Kegelschnitt berühren, so liegen die sechs Ecken derselben auf einem zweiten Kegelschnitt.*

Dies lässt sich anders aufgefasst, weil der Kegelschnitt durch fünf Tangenten oder fünf Punkte eindeutig bestimmt ist, auch so aussprechen:

Haben zwei Kegelschnitte eine solche Lage zu einander, dass es ein Dreieck giebt, welches gleichzeitig dem einen um- und dem andern einbeschrieben ist, so giebt es unzählig viele Dreiecke derselben Beschaffenheit, indem jeder Punkt des umbeschriebenen Kegelschnitts als Ecke eines neuen Dreiecks aufgefasst werden kann, dessen zusammenstossende Seiten zwei Tangenten des andern Kegelschnitts sind.

Die besonderen Fälle, welche sich aus dem Pascal'schen und Brianchon'schen Satze ergeben, wenn wir zwei auf einander folgende Ecken des einbeschriebenen Sechsecks zusammenfallen lassen, also eine Seite desselben zur Tangente des Kegelschnitts machen, oder anderseits, wenn wir zwei Seiten des umbeschriebenen Sechsseits zusammenfallen lassen, also ihren Schnittpunkt zum Berührungspunkt machen, dürfen wir hier übergehen, weil ein Theil der daraus entspringenden Sätze in dem Früheren (§ 20—23, § 27) enthalten ist; wir wollen aber die vollständige Figur eines Sechsecks im Kegelschnitt näher untersuchen und die von Steiner angegebenen Eigenschaften derselben herleiten.

Sechs Punkte eines Kegelschnitts, der Kürze wegen mit 1 2 3 4 5 6 bezeichnet, lassen sich auf sechzig verschiedene Arten zu einem einfachen Sechseck verbinden; von sämmtlichen 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 Permutationen liefern nämlich immer zwei Mal sechs dasselbe Sechseck, nämlich z. B.

| 1 2 3 4 5 6 | 2 3 4 5 6 1 | 3 4 5 6 1 2 | 4 5 6 1 2 3 | 5 6 1 2 3 4 | 6 1 2 3 4 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 5 4 3 2 1 | 1 6 5 4 3 2 | 2 1 6 5 4 3 | 3 2 1 6 5 4 | 4 3 2 1 6 5 | 5 4 3 2 1 6, |

da man die sechs Ecken in derselben Reihenfolge in einem und dem entgegengesetzten Sinne durchlaufen und ausserdem mit jeder Ecke beginnen kann. Es bleiben daher nur $\frac{1.2.3.4.5.6}{2.6} = 60$ Permutationen übrig, welche verschiedene Sechsecke liefern. Bei jedem derselben liegen nach dem Pascal'schen Satze die drei Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden, z. B. beim Sechseck 1 2 3 4 5 6 die Schnittpunkte

(12, 45) (23, 56) (34, 61)

in einer Geraden; solcher Geraden, welche Pascal'sche Linien heissen mögen, erhalten wir also sechzig und diese haben einen eigenthümlichen Zusammenhang; aus dem in § 21 behandelten speciellen Fall des Pascal'schen Satzes (in welchem der Kegelschnitt durch ein Linienpaar vertreten wird) ergiebt sich nämlich zunächst auf ganz dieselbe Weise wie dort, dass die Pascal'schen Linien für die drei Sechsecke

$$\begin{cases} 1\;2\;3\;4\;5\;6 \\ 1\;4\;3\;6\;5\;2 \\ 1\;6\;3\;2\;5\;4 \end{cases}$$

sich in einem Punkte schneiden müssen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten

$$\begin{array}{lll} (12,\ 45) = p_1 & (34,\ 16) = p_2 & (56,\ 23) = p_3 \\ (45,\ 36) = q_1 & (16,\ 25) = q_2 & (23,\ 14) = q_3 \\ (36,\ 12) = r_1 & (25,\ 34) = r_2 & (14,\ 56) = r_3, \end{array}$$

so liegen $p_1\, p_2\, p_3$ in einer Pascal'schen Linie, $q_1\, q_2\, q_3$ in einer andern und $r_1\, r_2\, r_3$ in einer dritten; es ist aber aus diesem Schema ersichtlich, dass

$$\begin{array}{lll} p_1\, q_1 = 45 & p_2\, q_2 = 16 & p_3\, q_3 = 23 \\ q_1\, r_1 = 36 & q_2\, r_2 = 25 & q_3\, r_3 = 14 \\ r_1\, p_1 = 12 & r_2\, p_2 = 34 & r_3\, p_3 = 56 \end{array}$$

und da in dem Sechsecke

$$1\;2\;5\;4\;3\;6$$

$$\begin{array}{llll} (12,\ 34) & (36,\ 25) & (45,\ 16) & \text{oder} \\ (p_1 r_1,\ p_2 r_2) & (r_1 q_1,\ r_2 q_2) & (q_1 p_1,\ q_2 p_2) & \end{array}$$

in einer Geraden liegen, so müssen nach einem in § 11 bewiesenen Satze die Verbindungslinien:

$$p_1\, p_2 \qquad q_1\, q_2 \qquad r_1\, r_2$$

sich in einem Punkte schneiden; die Pascal'schen Linien der obigen drei Sechsecke laufen also durch einen Punkt, welcher Steiner'scher Punkt heissen soll; ebenso laufen die Pascal'schen Linien der drei Sechsecke

$$\begin{cases} 1\;2\;5\;4\;3\;6 \\ 1\;4\;5\;6\;3\;2 \\ 1\;6\;5\;2\;3\;4 \end{cases}$$

durch einen Steiner'schen Punkt, welcher sein Gegenpunkt genannt werde. (Dass ein Steiner'scher Punkt und sein Gegenpunkt allemal ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf den

Kegelschnitt sind, kann erst später, § 31, gezeigt werden.) Die eine Gruppe von drei Sechsecken ist nun so gebildet, dass die erste, dritte und fünfte Ecke festgehalten, die zweite, vierte und sechste cyklisch vertauscht werden, während bei der andern Gruppe, wenn wir sie so schreiben:

2 5 4 3 6 1
2 3 4 1 6 5
2 1 4 5 6 3

die vorhin vertauschten Ecken fest bleiben und die übrigen drei cyklisch vertauscht werden; sobald wir aus den sechs Punkten 1 2 3 4 5 6 irgend drei Punkte herausnehmen und sie an die ungeraden Stellen der Ecken versetzen, lassen sich die übrigen drei nur auf diese sechs Arten dazwischen als geradstellige Ecken einfügen und die auf diese Weise erhaltenen sechs Sechsecke zerfallen in zwei Gruppen von je drei, für welche je drei Pascal'sche Linien in einem Steiner'schen Punkte und seinem Gegenpunkte zusammenlaufen. Da nun die sechs Punkte auf $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ Arten sich zu dreien kombiniren lassen, so laufen die 60 Pascal'schen Linien zu je dreien durch 20 Steiner'sche Punkte, welche wieder in 10 Paare von Gegenpunkten zerfallen. Wir werden in dem später folgenden Tableau die 60 Sechsecke so zusammenstellen, dass die 20 Steiner'schen Punkte aus ihnen vollständig und in übersichtlicher Weise hervortreten.

Theilen wir zweitens die sechs Punkte des Kegelschnitts in drei Paare ab, z. B.

12 34 56,

so lassen sich diese Paare unter einander und die Elemente jedes Paares unter sich, ohne dass ein Paar getrennt wird, auf alle mögliche Arten nur so vertauschen, dass acht verschiedene Sechsecke zum Vorschein kommen, weil von den sämmtlichen 48 hervorgehenden Sechsecken immer 6 identisch werden; diese 8 verschiedenen Sechsecke lassen sich aber in 4 Paare zertheilen, welche, wenn wir sie mit 1 alle beginnen lassen, so lauten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 6 5 | 1 2 4 3 5 6 | 1 2 4 3 6 5 |
| 1 4 3 6 5 2 | 1 4 3 5 6 2 | 1 3 4 6 5 2 | 1 3 4 5 6 2 |

und jedes Paar besteht, wie wir sehen, aus zwei Sechsecken, deren Pascal'sche Linien sich in einem Steiner'schen Punkte

treffen. Nennen wir der Ordnung gemäss die Pascal'schen Linien dieser acht Sechsecke

$$\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4, \end{matrix}$$

so dass also $(l_1 m_1)$ $(l_2 m_2)$ $(l_3 m_3)$ $(l_4 m_4)$ vier Steiner'sche Punkte sind, so liegen zunächst in $l_1$ die drei Punkte:

$$(12, 45) \quad (34, 61) \quad (56, 23);$$

da aber (12, 45) auch in $m_4$ liegt, (34, 61) in $l_3$ und (56, 23) in $l_2$, wie wir aus der Zusammenstellung der acht Sechsecke erkennen, so lassen sich die vorigen drei Punkte auch so schreiben:

$$(12, m_4) \quad (34, l_3) \quad (56, l_2).$$

Durch diese drei in gerader Linie befindlichen Punkte gehen also drei Linienpaare, welche als gegenüberliegende Seiten eines einfachen Sechsecks aufgefasst werden können, so dass die auf einander folgenden Seiten etwa folgende wären:

$$12 \quad l_2 \quad 34 \quad m_4 \quad 56 \quad l_3$$

und die auf einander folgenden Ecken mithin:

$$(12, l_2) \quad (34, l_2) \quad (34, m_4) \quad (56, m_4) \quad (56, l_3) \quad (12, l_3).$$

Diese sechs Ecken liegen nach der oben bewiesenen Umkehrung des Pascal'schen Satzes auf einem Kegelschnitt, weil die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten sich in einer Geraden befinden. Diese sechs Ecken können wir aber auch anders darstellen, wenn wir das Schema der obigen acht Sechsecke zu Hülfe nehmen; es ist nämlich $(12, l_2) = (12, 46)$ und dieser Punkt liegt gleichzeitig auf $m_3$, also $(12, l_2) = (l_2 m_3)$; in dieser Weise gestalten sich die vorigen sechs Ecken folgendermassen:

$$(l_2 m_3) \quad (l_2 l_4) \quad (m_2 m_4) \quad (m_3 m_4) \quad (l_3 l_4) \quad (m_2 l_3)$$

oder in anderer Reihenfolge

$$(l_2 m_3) \quad (m_3 m_4) \quad (m_4 m_2) \quad (m_2 l_3) \quad (l_3 l_4) \quad (l_4 l_2).$$

Die auf einander folgenden Seiten dieses Sechsecks heissen daher

$$l_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad m_2 \quad l_3 \quad l_4,$$

und da die sechs Ecken desselben auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen sich die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten einer Geraden treffen, d. h. die Punkte

$$(l_2 m_2) \quad (l_3 m_3) \quad (l_4 m_4)$$

liegen auf einer Geraden. In ganz derselben Weise würden wir gezeigt haben, dass die drei Punkte $(l_3 m_3)$ $(l_4 m_4)$ $(l_1 m_1)$ in einer

Geraden liegen, wenn wir von $l_2$ anstatt von $l_1$ ausgegangen wären; mithin liegen alle vier Steiner'schen Punkte:

$$(l_1\, m_1),\ (l_2\, m_2)\ \ (l_3\, m_3)\ \ (l_4\, m_4)$$

auf derselben Geraden, welche wir Steiner'sche Gerade nennen wollen, und da sich die sechs Punkte nur auf 15 Arten in drei Paare theilen lassen, wie leicht einzusehen ist, so folgt, dass die 20 Steiner'schen Punkte zu je vier auf 15 Geraden liegen.*)

Die 60 Sechsecke lassen sich nun in ein Tableau bringen, aus welchem die Lage der 20 Steiner'schen Punkte zu den 15 Steiner'schen Geraden klar hervortritt; dies ist folgendes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1 2 3 4 5 6<br>1 4 3 6 5 2<br>1 6 3 2 5 4 | $p$ | 1 4 3 6 5 2<br>1 6 3 2 5 4<br>1 2 3 4 5 6 | $p$ | 1 6 3 2 5 4<br>1 2 3 4 5 6<br>1 4 3 6 5 2 |
| $a_1$ | 1 2 3 4 6 5<br>1 4 3 5 6 2<br>1 5 3 2 6 4 | $b_1$ | 1 4 6 3 2 5<br>1 3 6 5 2 4<br>1 5 6 4 2 3 | $c_1$ | 1 6 5 4 2 3<br>1 4 5 3 2 6<br>1 3 5 6 2 4 |
| $a_2$ | 1 2 4 3 5 6<br>1 3 4 6 5 2<br>1 6 4 2 5 3 | $b_2$ | 1 4 2 5 3 6<br>1 5 2 6 3 4<br>1 6 2 4 3 5 | $c_2$ | 1 6 2 3 4 5<br>1 3 2 5 4 6<br>1 5 2 6 4 3 |
| $a_3$ | 1 2 4 3 6 5<br>1 3 4 5 6 2<br>1 5 4 2 6 3 | $b_3$ | 1 4 6 3 5 2<br>1 3 6 2 5 4<br>1 2 6 4 5 3 | $c_3$ | 1 6 3 2 4 5<br>1 2 3 5 4 6<br>1 5 3 6 4 2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 1 2 5 4 3 6<br>1 4 5 6 3 2<br>1 6 5 2 3 4 | $\pi$ | 1 4 5 6 3 2<br>1 6 5 2 3 4<br>1 2 5 4 3 6 | $\pi$ | 1 6 5 2 3 4<br>1 2 5 4 3 6<br>1 4 5 6 3 2 |
| $\alpha_1$ | 1 2 6 4 3 5<br>1 4 6 5 3 2<br>1 5 6 2 3 4 | $\alpha_2$ | 1 6 4 3 5 2<br>1 3 4 2 5 6<br>1 2 4 6 5 3 | $\alpha_3$ | 1 2 6 3 4 5<br>1 3 6 5 4 2<br>1 5 6 2 4 3 |
| $\beta_1$ | 1 4 2 3 6 5<br>1 3 2 5 6 4<br>1 5 2 4 6 3 | $\beta_2$ | 1 6 3 4 2 5<br>1 4 3 5 2 6<br>1 5 3 6 2 4 | $\beta_3$ | 1 2 6 3 5 4<br>1 3 6 4 5 2<br>1 4 6 2 5 3 |
| $\gamma_1$ | 1 4 2 3 5 6<br>1 3 2 6 5 4<br>1 6 2 4 5 3 | $\gamma_2$ | 1 6 4 3 2 5<br>1 3 4 5 2 6<br>1 5 4 6 2 3 | $\gamma_3$ | 1 2 3 6 4 5<br>1 6 3 5 4 2<br>1 5 3 2 4 6 |

*) Plücker, über ein neues Princip der Geometrie, Crelle's Journ. Bd. V S. 268 ff.

Dieses sind sämmtliche 60 verschiedene Sechsecke, wenn wir die in den identischen Gruppen $p\ p\ p$ enthaltenen und ebenso die in den Gruppen $\pi\ \pi\ \pi$ enthaltenen nur je ein Mal zählen; jedes derselben liefert eine Pascal'sche Linie. Die Punkte

$$p\ \pi\ a_1\ a_2\ a_3\ b_1\ b_2\ b_3\ c_1\ c_2\ c_3\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$$

sind die 20 Steiner'schen Punkte, in welchen sich die Pascal'schen Linien zu je dreien schneiden, und zwar je zwei gleichnamige aus dem lateinischen und griechischen Alphabet Gegenpunkte, wie z. B. $c_2$ und $\gamma_2$ u. s. f.

Die 15 Steiner'schen Geraden, auf welchen diese 20 Punkte zu je vieren liegen, sind folgende:

$$\begin{array}{llll|llll}
p & a_1 & a_2 & a_3 & \pi & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\
p & b_1 & b_2 & b_3 & \pi & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\
p & c_1 & c_2 & c_3 & \pi & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll|llll|llll}
a_1 & b_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & a_2 & b_2 & \gamma_3 & \gamma_1 & a_3 & b_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \\
b_1 & c_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & b_2 & c_2 & \alpha_3 & \alpha_1 & b_3 & c_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\
c_1 & a_1 & \beta_2 & \beta_3 & c_2 & a_2 & \beta_3 & \beta_1 & c_3 & a_3 & \beta_1 & \beta_2.
\end{array}$$

Die 15 Steiner'schen Geraden schneiden sich also zu je drei in den 20 Steiner'schen Punkten. Diese 20 Punkte und 15 Geraden bilden hiernach eine solche Figur, wie sie bereits in § 11 und § 21 aufgetreten ist.*) Dass in der That die 20 Steiner'schen Punkte zu je vier auf den angegebenen 15 Steiner'schen Geraden liegen, erkennen wir aus dem oben zusammengestellten Tableau nach dem für einen Fall durchgeführten Beweise, wenn wir noch berücksichtigen, dass dasselbe Sechseck, immer bei dem Punkte 1 angefangen, in doppelter Weise gelesen werden kann, z. B. 1 6 3 2 5 4 und 1 4 5 2 3 6; dass aber die 15 Steiner'schen Geraden zu je dreien sich in den 20 Steiner'schen Punkten schneiden, sehen wir aus dem letzten Schema, bei welchem je vier in derselben Horizontalreihe stehende Punkte immer in einer Geraden liegen und jeder der 20 Punkte in drei Horizontalreihen vorkommt.

Die Bildungsweise des obigen Tableaus von 60 Sechsecken ist leicht ersichtlich. Wir gehen aus von dem Sechseck 1 2 3 4 5 6

*) Hesse, „eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem", Crelle's Journal Bd. XLI S. 269.

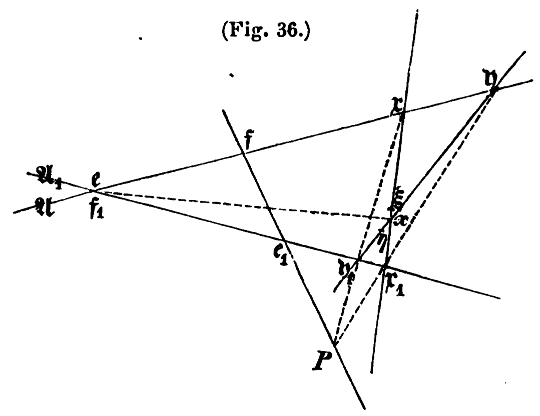
und bilden, indem wir die ungeradstelligen Ecken festhalten, die geradstelligen aber cyklisch vertauschen, die drei Sechsecke, deren Pascal'sche Linien sich in einem Steiner'schen Punkte $p$ treffen. Hieraus erhalten wir drei andere Gruppen von je drei Sechsecken, welche die Steiner'schen Punkte $a_1$ $a_2$ $a_3$ liefern, indem wir die sechs Punkte 1 2 3 4 5 6 in drei Paare 12 34 56 theilen und sowohl die Paare unter einander, als auch die Elemente je eines Paares unter sich vertauschen, ohne aber die Paare zu trennen. Zugleich bilden wir nach der oben angegebenen Weise die Gegenpunkte $\pi$ $\alpha_1$ $\alpha_2$ $\alpha_3$.

Nehmen wir die erste Gruppe $p$ noch einmal, lassen aber die drei in ihr enthaltenen Sechsecke cyklisch fortrücken, d. h. gehen wir von dem Sechsecke 1 4 3 6 5 2 aus, wie vorhin von dem Sechsecke 1 2 3 4 5 6, so erhalten wir vier neue Steiner'sche Punkte, die in einer Geraden liegen, und gehen wir von dem dritten Sechsecke 1 6 3 2 5 4 aus, so erhalten wir eine dritte Gruppe von vier Steiner'schen Punkten, welche auf einer Geraden liegen. Bilden wir endlich in bekannter Weise diejenigen Sechsecke, welche die Gegenpunkte liefern, so haben wir sämmtliche 60 Sechsecke und sämmtliche 20 Steiner'sche Punkte; es bleibt dann noch übrig, die zweite und dritte Gruppe von Steiner'schen Punkten mit den richtigen Buchstaben $b_1$ $b_2$ $b_3$ $c_1$ $c_2$ $c_3$ so zu bezeichnen, dass $a_1$ $b_1$ $\gamma_2$ $\gamma_3$, $b_1$ $c_1$ $\alpha_2$ $\alpha_3$ u. s. f. in je einer Geraden liegen. Dies ist aus dem bekannten Kriterium für vier Steiner'sche Punkte, die in einer Geraden liegen, unschwer zu ermitteln und so fügt sich das Tableau in ganz harmonischer Weise zusammen. Die weiteren Eigenschaften dieser Figur, welche Cayley und Kirkman hinzugefügt haben, übergehen wir hier (vgl. A treatise on conic sections by G. Salmon, pag. 317); auch bedarf die gleichlaufende Betrachtung eines dem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseits und die Erweiterung des Brianchon'schen Satzes keiner Ausführung, weil man unter der Bezeichnung 1 2 3 4 5 6 ebenso gut sechs Tangenten eines Kegelschnitts, als sechs Punkte desselben verstehen kann und hiernach der Ausdruck der Eigenschaften beider Figuren völlig gleichlautend wird.

## § 29. Auftreten des Punktsystems und Strahlsystems beim Kegelschnitt.

Fassen wir den Kegelschnitt als das Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \ldots \mathfrak{x} \ldots$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{x}_1 \ldots$, deren Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ seien, auf, so wissen wir (§ 21), dass für irgend zwei Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$ auf derselben festen Geraden liegt, welche durch die Berührungspunkte der beiden Träger geht (Fig. 36). Wir können aber auch umgekehrt schliessen, dass, wenn wir irgend einen

(Fig. 36.)




Punkt $P$ dieser Geraden mit einem Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ verbinden, diese Strahlen die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ in zwei neuen Punkten $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}$ treffen, welche entsprechende Punkte sein müssen. Halten wir nun den Punkt $P$ fest und verändern das erste Paar $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gemäss der projektivischen Beziehung auf den beiden Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, so erhalten wir in $P$ zwei auf einander liegende projektivische Strahlbüschel, beschrieben von den Strahlen $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$; diese beiden projektivischen Strahlbüschel liegen in der eigenthümlichen Weise auf einander, dass dem Strahl $P\mathfrak{x}$, wenn wir ihn als $P\mathfrak{y}_1$ (einen Strahl des andern Strahlbüschels) auffassen, derjenige Strahl $P\mathfrak{y}$ entspricht, welcher mit $P\mathfrak{x}_1$ coincidirt, dass also die entsprechenden gleichen Winkel $\mathfrak{x}P\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1P\mathfrak{x}_1$ verkehrt auf einander fallen; hieraus erkennen wir nach § 17, dass die Strahlenpaare $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ ein Strahlsystem bilden. Zugleich wird auf jedem der beiden Träger, sowohl auf $\mathfrak{A}$ durch die Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, als auch auf $\mathfrak{A}_1$ durch die Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ ein Punktsystem fixirt und zwar erhalten wir zu $\mathfrak{x}$ den konjugirten Punkt $\mathfrak{y}$, indem wir

den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$ mit ein und demselben festen Punkte $P$ der Berührungssehne beider Träger verbinden und den Schnittpunkt dieser Verbindungslinie mit $\mathfrak{A}$ aufsuchen. Durch Veränderung des Punktes $P$ auf der Berührungssehne verändert sich das Strahlsystem und die beiden Punktsysteme auf den Trägern. Es ist nun leicht zu erkennen, wann das in $P$ entstehende Strahlsystem ein elliptisches und wann es ein hyperbolisches sein wird. Seien nämlich $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ die in dem Schnittpunkte der Träger vereinigten und $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ ihre entsprechenden Punkte, also $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ die Berührungssehne, so wird diese unendlich lange Gerade durch die Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ in zwei Gebiete getrennt; das eine ist die endliche Strecke zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, das andere besteht aus den beiden unendlichen Stücken ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$, von $\mathfrak{f}$ bis $\infty$ und von $\infty$ bis $\mathfrak{e}_1$. Wenn nun irgend ein Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ die Berührungssehne innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ trifft, so entspricht dem endlichen Stück $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ des Trägers $\mathfrak{A}$ das im Unendlichen zusammenhangende Stück $\mathfrak{e}_1\infty\mathfrak{f}_1$ des Trägers $\mathfrak{A}_1$ und dem im Unendlichen zusammenhangenden Stück $\mathfrak{f}\infty\mathfrak{e}$ des ersten Trägers $\mathfrak{A}$ das endliche Stück $\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$ des Trägers $\mathfrak{A}_1$; hieraus folgt aber nach der Figur, dass sämmtliche Projektionsstrahlen die Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ innerhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ treffen müssen und das andere Gebiet der Berührungssehne von keinem Projektionsstrahl getroffen wird (der Kegelschnitt ist Hyperbel nach dem in § 26 gegebenen Kriterium). Wenn dagegen irgend ein Projektionsstrahl $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ die Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ trifft, so entsprechen sich die endlichen Strecken $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$ und die im Unendlichen zusammenhangenden Theile $\mathfrak{e}\infty\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1\infty\mathfrak{f}_1$; in diesem Falle müssen sämmtliche Projektionsstrahlen die Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ treffen und das endliche Stück $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ wird von keinem Projektionsstrahl getroffen (der Kegelschnitt ist Ellipse, oder wenn die Punktreihen insbesondere projektivisch-ähnlich sind, Parabel). Nehmen wir nun den ersten Fall an, so wird, wenn $P$ zwischen $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ auf der Berührungssehne liegt, das Strahlsystem hyperbolisch sein, weil $P\mathfrak{f}$ und $P\mathfrak{f}_1$ durch $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ nicht getrennt werden (§ 17), dagegen, wenn $P$ ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ liegt, wird es elliptisch sein, weil $P\mathfrak{f}$ und $P\mathfrak{f}_1$ durch $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ getrennt werden; im zweiten Fall ist es gerade umgekehrt; liegt $P$ zwischen $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$, so ist das in ihm entstehende Strahlsystem elliptisch, liegt $P$ dagegen

ausserhalb der Strecke $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$, so ist das Strahlsystem hyperbolisch. Wir können aber beide Fälle zusammenfassen, wenn wir dasjenige (unendliche) Gebiet der Ebene, welches von sämmtlichen Projektionsstrahlen erfüllt wird (§ 20), *ausserhalb* des Kegelschnitts nennen und dasjenige Gebiet der Ebene, welches von keinem Projektionsstrahl getroffen wird, *innerhalb* des Kegelschnitts; der Kegelschnitt selbst ist die Grenze zwischen beiden Gebieten. Mit dieser Bezeichnung lassen sich beide Fälle so zusammenfassen: *Liegt $P$ ausserhalb des Kegelschnitts, so ist das in ihm entstehende Strahlsystem hyperbolisch, liegt $P$ innerhalb des Kegelschnitts, so ist sein Strahlsystem elliptisch.* Liegt endlich $P$ auf dem Kegelschnitt selbst, d. h. in einem der Punkte $\mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{e}_1$, so nimmt sein Strahlsystem den einseitigen Charakter an, dass die konjugirten Strahlen zu sämmtlichen in einen einzigen zusammenfallen. Es ist dies der in § 16 erwähnte Uebergangsfall eines parabolischen Strahlsystems. Bemerken wir noch, dass der Unterscheidung, ob ein Punkt ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegt, die Unterscheidung zur Seite steht, ob eine Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten trifft oder in keinem. Denn wenn eine Gerade den Kegelschnitt in keinem Punkte trifft, so fällt sie ganz in dasjenige Gebiet der Ebene, welches von allen Projektionsstrahlen erfüllt wird, also sämmtliche Punkte von ihr liegen dann ausserhalb des Kegelschnitts; wenn dagegen eine Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten trifft, so begrenzen diese auf ihr eine endliche Strecke und zwei unendliche; die letzteren liegen ausserhalb des Kegelschnitts, weil sie in das von den Projektionsstrahlen erfüllte Gebiet fallen, die endliche Strecke innerhalb des Kegelschnitts.

Wenn der Punkt $P$ ausserhalb des Kegelschnitts liegt, also sein Strahlsystem ein hyperbolisches ist, werden die beiden Asymptoten desselben offenbar Projektionsstrahlen, d. h. die aus $P$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten sein, weil in diesem Fall $P\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1$ und $P\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}$ zusammenfallen. Das Strahlsystem ist durch die beiden Asymptoten vollständig bestimmt und jedes Paar konjugirter Strahlen sind harmonisch zugeordnete Strahlen mit den beiden Asymptoten (§ 17). Da nun die beiden aus $P$ an den Kegelschnitt gelegten Tangenten immer dieselben bleiben, auf wie verschiedene Weise wir auch den Kegelschnitt als Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen auffassen mögen, so folgt, dass

das in dem Punkte $P$ entstehende Strahlsystem, welches aus der Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projektivische Punktreihen abgeleitet wurde, unabhängig ist von der besonderen Art dieser Erzeugung, d. h. immer dasselbe bleibt, welches Paar projektivischer Punktreihen wir auch als erzeugendes ansehen mögen. Dies ist allerdings nur für den Fall erwiesen, dass $P$ ausserhalb des Kegelschnitts liegt, also ein reelles Tangentenpaar durch ihn geht; es gilt aber auch in dem andern Falle, wenn $P$ innerhalb des Kegelschnitts liegt, und kann, wie folgt, allgemein nachgewiesen werden. Denken wir uns auf den Projektionsstrahlen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ die Berührungspunkte $\xi$ und $\eta$ ermittelt, so wissen wir aus § 21, dass $\xi$ und $\eta$ mit $P = (\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y})$ in gerader Linie liegen müssen, dass überhaupt (§ 23 und 27) das von den vier Berührungspunkten $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1\xi\eta$ gebildete Viereck und das von den vier Tangenten des Kegelschnitts in diesen Punkten (den vier Projektionsstrahlen) gebildete Vierseit ein und dasselbe Diagonaldreieck haben; hieraus folgt, wenn $x$ den Schnittpunkt der beiden Projektionsstsahlen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ bezeichnet, aus den bekannten harmonischen Eigenschaften des Vierecks und Vierseits (§ 9), dass die beiden Diagonalen $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ harmonisch zugeordnet sind, sowohl mit $P\mathfrak{e}$ und $Px$, als auch mit $P\mathfrak{e}_1$ und $P\xi$; also sind (§ 17) $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ als die Asymptoten eines hyperbolischen Strahlsystems aufzufassen, von welchem $P\mathfrak{e}$ und $Px$ ein Paar und $P\mathfrak{e}_1$ und $P\xi$ ein zweites Paar konjugirter Strahlen sind; nun folgt ferner nach einem Satze, welcher dem in § 18 (Anmerkung) bewiesenen analog ist und so lautet: „Sind $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paar konjugirter Strahlen eines hyperbolischen Strahlsystems, dessen Asymptoten $g$ und $h$ sind, so bilden allemal die drei Strahlenpaare $a\beta$, $b\alpha$ und $gh$ drei Paare konjugirter Strahlen eines neuen Strahlsystems", dass die drei Strahlenpaare $P\mathfrak{e}$, $P\mathfrak{e}_1$, $P\mathfrak{x}$, $P\mathfrak{x}_1$ und $P\xi$, $Px$ Involution bilden oder drei Strahlenpaare desselben Strahlsystems sind; dieses Strahlsystem ist das nach der ursprünglichen Erzeugung des Kegelschnitts dem Punkt $P$ zugehörige, weil es durch die beiden Paare konjugirter Strahlen $P\mathfrak{e}$ und $P\mathfrak{e}_1$, $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ bestimmt wird. Fassen wir nun statt der beiden ursprünglichen Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die beiden Projektionsstrahlen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ als Träger zweier neuen erzeugenden Punktreihen auf, so sind für sie $\xi$ und $\eta$ die Berührungspunkte, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ein Paar entsprechender Punkte und $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ ein zweites Paar ent-

sprechender Punkte, also der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}) = P$ derselbe vorhin so bezeichnete Punkt, dessen Strahlsystem bei der neuen Erzeugung des Kegelschnitts zunächst das Paar konjugirter Strahlen $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{y}$ oder was dasselbe ist $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ und dann $Px$ und $P\xi$ als ein zweites Paar konjugirter Strahlen hat. Da nun die drei Strahlenpaare $P\mathfrak{e}\,P\mathfrak{e}_1$, $P\mathfrak{x}\,P\mathfrak{x}_1$, $Px\,P\xi$ demselben Strahlsystem angehören, welches durch zwei von ihnen schon bestimmt ist, so coincidiren die Strahlsysteme in $P$ bei der einen und der andern Entstehungsweise des Kegelschnitts, unabhängig davon, ob $P$ ausserhalb oder innerhalb desselben liegt. Das Resultat der vorigen Untersuchung lässt sich also folgendermassen zusammenfassen:

Jeder Punkt $P$ in der Ebene eines Kegelschnitts ist der Mittelpunkt eines bestimmten dem Kegelschnitt zugehörigen Strahlsystems, welches dadurch erhalten wird, dass man eine beliebige Gerade durch $P$ zieht, welche in den Punkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ den Kegelschnitt trifft, die Tangenten in $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ durch die sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts in zwei projektivischen Punktreihen schneiden lässt und immer zwei entsprechende Punkte dieser beiden Punktreihen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ mit $P$ verbindet, wobei $P\mathfrak{x}$ und $P\mathfrak{x}_1$ zwei konjugirte Strahlen des Strahlsystems in $P$ werden. Dieses Strahlsystem ist unabhängig von der Lage der Punkte $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, deren Tangenten als Träger der den Kegelschnitt erzeugenden Punktreihen aufgefasst werden, wenn nur $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ mit $P$ in gerader Linie liegen. Das Strahlsystem ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem der Punkt $P$ ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegt; falls es hyperbolisch ist, sind seine Asymptoten die aus dem Punkte $P$ an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten, also jedes Paar konjugirter Strahlen zu ihnen harmonisch zugeordnet.

Die der vorigen zur Seite stehende Betrachtung, welche von der Erzeugung des Kegelschnitts durch zwei projektivische Strahlbüschel ausgeht, bedarf keiner weiteren Ausführung, da sie der obigen unmittelbar nachgebildet werden kann; es genüge daher das Resultat anzugeben:

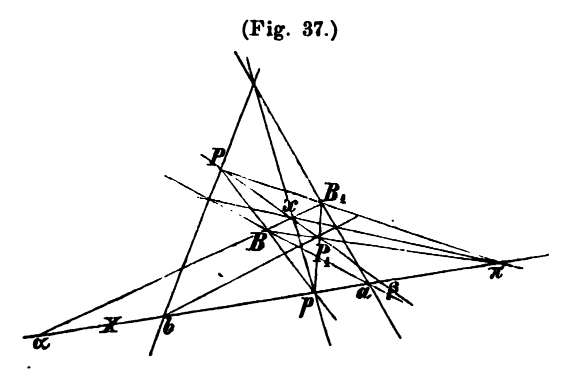
Jede in der Ebene eines Kegelschnitts liegende

Gerade ist der Träger eines bestimmten dem Kegelschnitt zugehörigen Punktsystems, welches dadurch erhalten wird, dass man von einem ihrer Punkte das Tangentenpaar ($f$ und $e_1$) an den Kegelschnitt legt und die Berührungspunkte als die Mittelpunkte zweier den Kegelschnitt erzeugender projektivischer Strahlbüschel auffasst; je zwei entsprechende Strahlen dieser beiden projektivischen Strahlbüschel treffen die gegebene Gerade in zwei konjugirten Punkten des ihr zugehörigen Punktsystems. Dasselbe ist unabhängig von der Lage des Tangentenpaares $(fe_1)$, wenn nur sein Schnittpunkt auf der Geraden liegt; es ist hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem die Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten trifft oder nicht; falls es hyperbolisch ist, sind seine Asymptotenpunkte die beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt, also jedes Paar konjugirter Punkte des Punktsystems zu ihnen harmonisch zugeordnet.

Das jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts zugehörige Strahlsystem und das jeder Geraden zugehörige Punktsystem stehen in naher Verbindung mit einander, wie sich aus folgender Betrachtung ergiebt:

Sei $X$ eine beliebige Gerade in der Ebene eines Kegelschnitts und $a$ einer ihrer Punkte, von welchem sich ein Tangentenpaar

(Fig. 37.)




an den Kegelschnitt legen lässt, welches in $B$ und $B_1$ denselben berührt; wird alsdann ein beliebiger Punkt $P$ des Kegelschnitts

mit $B$ und $B_1$ verbunden, so treffen nach dem letzten Satze $BP$ und $B_1 P$ die Gerade $X$ in einem Paar konjugirter Punkte $p$ und $\pi$ desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $X$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, und lassen wir den Punkt $P$ den ganzen Kegelschnitt durchwandern, so erhalten wir das ganze Punktsystem auf $X$; insbesondere ist der konjugirte Punkt zu $a$ derjenige $\alpha$, in welchem die Berührungssehne $BB_1$ die Gerade $X$ trifft; bei dieser Bewegung von $P$ tritt nun jedes Punktenpaar des der Geraden $X$ zugehörigen Punktsystems zwei Mal auf; denn treffen $BP$ und $B_1 P$ in $p$ und $\pi$ die Gerade $X$, so muss auch, wenn $B\pi$ in $P_1$ dem Kegelschnitt zum andern Mal begegnet, $B_1 P_1$ in demjenigen Punkte der Geraden $X$ begegnen, welcher der zu $\pi$ konjugirte Punkt des Punktsystems ist, d. h. in $p$, also dasselbe Punktenpaar $\pi p$ wird auch durch das Strahlenpaar $BP_1$ und $B_1 P_1$ hervorgerufen. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von $BB_1$ und $PP_1$ mit $x$, so ist $BPB_1 P_1$ ein vollständiges Viereck im Kegelschnitt, dessen Diagonaldreieck $xp\pi$ ist; die beiden Tangenten in $B$ und $B_1$ sind bekannt; wollen wir zur Vervollständigung der Figur noch die beiden Tangenten in $P$ und $P_1$ ermitteln, so verbinden wir die Schnittpunkte, in welchen die Diagonale $px$ die Tangenten $Ba$ und $B_1 a$ trifft, resp. mit $P_1$ und $P$, welches die gesuchten Tangenten sind; zugleich wissen wir aus § 27, dass die Tangenten in $P$ und $P_1$ sich in demjenigen Punkt $b$ der Geraden $X$ treffen müssen, welcher der vierte harmonische zu $p\pi a$ ist, dem $a$ zugeordnet; und dass die Verbindungslinie $PP_1$ in demjenigen Punkte $\beta$ der Geraden $X$ begegnet, welcher der vierte harmonische ist zu $p\pi\alpha$ dem $\alpha$ zugeordnet; folglich gehören (nach § 18, Anmerkung) die drei Punktenpaare $a\alpha$, $b\beta$, $p\pi$ demselben Punktsysteme an, welches das der Geraden $X$ zugehörige ist. Suchen wir jetzt das dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem in Bezug auf den Kegelschnitt und betrachten zu diesem Zweck die in den Endpunkten der durch $x$ gehenden Sehne $BB_1$ gezogenen Tangenten als Träger erzeugender Punktreihen, so muss nach § 27 die Tangente in $P$ die letzteren in zwei solchen Punkten treffen, welche mit $x$ verbunden die Strahlen $xp$ und $x\pi$ geben, die daher ein Paar konjugirter Strahlen des dem $x$ zugehörigen Strahlsystems sind, und da anderseits dem Punkt $B$ des einen Trägers der Schnittpunkt $a$ des andern entsprechend ist, so sind $xB$ und $xa$ oder was dasselbe ist

$xa$ und $x\alpha$ ein zweites Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems von $x$; in gleicher Weise sind auch noch $xb$ und $x\beta$ ein drittes Paar. Wir sehen also, dass das dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem mit dem der Geraden $X$ zugehörigen Punktsystem perspektivisch liegt, d. h. je zwei konjugirte Strahlen des Strahlsystems durch zwei konjugirte Punkte des Punktsystems gehen und umgekehrt. Wenn wir nun den Punkt $P$ durch den ganzen Kegelschnitt bewegen, so wird der Punkt $x$ dabei unverändert bleiben, weil er der vierte harmonische zu den drei festen Punkten $BB_1\alpha$ ist, dem $\alpha$ zugeordnet. Bei dieser Bewegung durchläuft das Punktenpaar $p\pi$ das ganze der Geraden $X$ zugehörige Punktsystem und das Strahlenpaar $xp$, $x\pi$ das ganze dem Punkt $x$ zugehörige Strahlsystem. Dieser eigenthümliche Zusammenhang des Punktes $x$ mit der Geraden $X$, wonach das Strahlsystem des einen und das Punktsystem des andern in perspektivischer Lage sich befinden, soll nun im folgenden Paragraphen weiter ausgeführt werden.

## § 30. **Pol und Polare des Kegelschnitts. Konjugirte Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt. Tripel konjugirter Punkte und Strahlen.**

Die in dem vorigen Paragraphen durchgeführte Untersuchung giebt eine Menge von wichtigen Eigenschaften des Kegelschnitts, welche unter dem Namen der Polareigenschaften bekannt sind. Die zuletzt besprochene Bewegung des Punktes $P$ auf dem Kegelschnitt, bei welcher der Punkt $x$ unverändert bleibt, zeigt nämlich zunächst, dass, während die veränderliche Sehne $PP_1$ sich um den festen Punkt $x$ dreht, der Schnittpunkt der Tangenten in $P$ und $P_1$ auf der festen Geraden $X$ läuft, sodann folgt aus der harmonischen Eigenschaft des Vierecks, dass der vierte harmonische Punkt $\beta$ zu $PP_1x$, der dem festen Punkt $x$ zugeordnet ist, auf derselben Geraden $X$ sich bewegen muss; daher gilt der Satz:

Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Strahlen, welche denselben in je zwei Punkten treffen, so ist der Ort des vierten harmonischen, dem gegebenen zugeordneten Punktes auf jedem Strahl (während die Schnittpunkte das andere Paar zugeordneter Punkte bilden), eine gerade Linie,

welche den Kegelschnitt nicht treffen wird, sobald der Punkt innerhalb des Kegelschnitts liegt, dagegen durch die beiden Berührungspunkte der von dem gegebenen Punkte an den Kegelschnitt zu legenden Tangenten geht, sobald der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

Die letzte Bemerkung geht daraus hervor, dass, wenn durch den gegebenen Punkt eine Tangente des Kegelschnitts geht, auf diesem Strahl die beiden Schnittpunkte, also zwei zugeordnete von vier harmonischen Punkten zusammenfallen, folglich auch der vierte dem festen Punkt harmonisch zugeordnete in jene beiden hineinfallen muss (§ 8) und umgekehrt, wenn von vier harmonischen Punkten zwei nicht zugeordnete zusammenfallen, in diesen nothwendig auch einer der beiden übrigen hineinfallen muss. Hieraus ergiebt sich ein bequemes Mittel, durch einen gegebenen Punkt $O$ Tangenten an den Kegelschnitt zu ziehen, welcher gezeichnet vorliegt: Man ziehe durch $O$ zwei beliebige Strahlen (oder soviel, wie man will), welche in $a$ und $\alpha$; $b$ und $\beta$ demselben begegnen; die Schnittpunkte $(a\beta, b\alpha)$ und $(ab, \alpha\beta)$ mit einander verbunden geben eine Gerade, die den Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten trifft, deren Verbindungslinien mit $O$ das gesuchte Tangentenpaar sind; denn wegen der harmonischen Eigenschaft des Vierecks geht jene Gerade durch die vierten harmonischen Punkte auf den durch $O$ gezogenen Strahlen. Trifft die so ermittelte Gerade den Kegelschnitt nicht, so giebt es keine Tangenten durch $O$.

Dieselbe Gerade, welche oben mit $X$ bezeichnet wurde, ist aber anderseits auch der Ort des Punktes $b$, also gilt der Satz: Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Strahlen, welche denselben in je zwei Punkten treffen, und bestimmt die Tangenten an letzteren, so ist der Ort des Schnittpunktes eines jeden solchen Tangentenpaares eine gerade Linie, welche mit der im vorigen Satze erhaltenen identisch ist.

Hiernach gehört zu jedem beliebigen Punkt $x$ in der Ebene eines Kegelschnitts eine bestimmte Gerade $X$, welche immer reell vorhanden ist, weil es, wo auch der Punkt $x$ liegen mag, immer Strahlen durch ihn giebt, welche dem Kegelschnitt in zwei reellen Punkten begegnen. Diese dem Punkte $x$ zugehörige Gerade $X$

heisst die **Polare** des Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt; sie kann auf die eine oder andere angegebene Art konstruirt werden und besitzt nach dem Vorigen die charakteristische Eigenschaft, dass das in Bezug auf den Kegelschnitt ihr zugehörige Punktsystem mit dem dem Punkte zugehörigen Strahlsystem perspektivisch liegt. Ist der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts gelegen, so ist seine Polare die Berührungssehne des aus ihm an den Kegelschnitt zu legenden Tangentenpaars; ist der Punkt innerhalb des Kegelschnitts gelegen, so giebt es zwar kein Tangentenpaar aus ihm an den Kegelschnitt, aber die Polare hört nicht auf zu existiren, sondern ist allemal eine bestimmte in der angegebenen Weise zu konstruirende Gerade, welche in diesem Falle mit dem Kegelschnitt keinen Punkt gemein hat; ihr Punktsystem ist elliptisch. Liegt endlich der Punkt auf dem Kegelschnitt selbst, so erkennen wir aus der zweiten Konstruktion der Polare, dass seine Polare die Tangente des Kegelschnitts in diesem Punkte selbst ist. Die Tangente des Kegelschnitts erscheint also als besonderer Fall der Polare für solche Punkte, welche auf dem Kegelschnitt selbst liegen.

Wir schliessen ferner aus der in der obigen Figur (Fig. 37) vorgenommenen Bewegung, indem wir den Punkt $b$ auf der Geraden $X$ fortlaufen lassen und bemerken, dass die Berührungssehne des Tangentenpaars aus ihm an den Kegelschnitt durch den festen Punkt $x$ läuft, den folgenden Satz:

**Legt man aus den Punkten einer Geraden in der Ebene eines Kegelschnitts die Tangentenpaare an denselben, so läuft die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen festen Punkt; konstruirt man zu jedem Tangentenpaare und der gegebenen Geraden den vierten harmonischen Strahl, welcher der letzteren zugeordnet ist (während das Tangentenpaar das andere Paar zugeordneter Strahlen ist), so läuft dieser vierte harmonische Strahl durch denselben eben ermittelten festen Punkt. Schneidet die gegebene Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten, so ist der feste Punkt der Schnittpunkt der beiden Tangenten in den letzteren, liegt also ausserhalb des Kegelschnitts. Trifft die gegebene Gerade den Kegelschnitt nicht, so ist der auf die eine oder**

andere Weise zu ermittelnde Punkt innerhalb des Kegelschnitts gelegen.

Hiernach gehört zu jeder beliebigen Geraden $X$ in der Ebene eines Kegelschnitts ein bestimmter Punkt $x$, welcher immer reell vorhanden ist, wie auch die Gerade in der Ebene liegen mag, weil es immer Punkte auf ihr giebt, deren Tangentenpaare an den Kegelschnitt reell sind. Dieser Punkt heisst der „Pol" der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt. Er besitzt die charakteristische Eigenschaft, dass das ihm zugehörige Strahlsystem mit dem der Geraden zugehörigen Punktsystem perspektivisch liegt; beide sind also gleichzeitig elliptisch oder hyperbolisch. Wenn insbesondere die Gerade eine Tangente des Kegelschnitts ist, so wird ihr Pol der Berührungspunkt. Zu dem Pol einer gegebenen Geraden gelangen wir, indem wir aus zwei solchen Punkten derselben, welche ausserhalb des Kegelschnitts liegen, die Tangentenpaare an denselben legen und den Schnittpunkt der Berührungssehnen aufsuchen, oder wenn die gegebene Gerade den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneidet, indem wir den Schnittpunkt der Tangenten in diesen beiden Punkten aufsuchen.

Es geht nun daraus, dass gleichzeitig in unserer Figur $X$ die Polare von $x$ und $x$ der Pol von $X$ ist, ein inniger Zusammenhang zwischen Pol und Polare hervor:

Die Polare eines beliebigen Punktes hat denselben zu ihrem Pol und der Pol einer beliebigen Geraden hat zu seiner Polare diese Gerade.

Da ferner in unserer Figur die veränderliche Sehne $PP_1$ die Polare des Punktes $b$ ist, so folgt der Satz:

Bewegt sich ein Punkt $y$ auf einer Geraden $X$ in der Ebene eines Kegelschnitts, so läuft seine Polare $Y$ durch einen festen Punkt $x$, den Pol jener Geraden, und trifft die Gerade $X$ in denjenigen Punkten, welche die konjugirten zu den $y$ sind, im Punktsysteme, das der Geraden $X$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, während die Verbindungsstrahlen des festen Punktes $x$ mit dem veränderlichen Punkte $y$ die konjugirten Strahlen zu den Polaren $Y$ in demjenigen Strahlsysteme sind, welches dem Punkt $x$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Um also auf einer beliebigen Geraden das ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zuge-

hörige Punktsystem zu erhalten, haben wir zu jedem Punkte $x$ den Schnittpunkt $\xi$ seiner Polare mit der gegebenen Geraden zu bestimmen; dann sind immer $x\xi$ ein Paar konjugirter Punkte des gesuchten Punktsystems; in analoger Weise erhalten wir das einem gegebenen Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Strahlsystem.

Und analoger Weise:

Dreht sich ein Strahl $Y$ um einen festen Punkt $x$ in der Ebene eines Kegelschnitts, so bewegt sich sein Pol $y$ auf einer festen Geraden $X$, der Polare jenes Punktes $x$. Der Punkt $y$ und der Schnittpunkt des Strahls $Y$ mit der Geraden $X$ sind konjugirte Punkte desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $X$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; der Strahl $Y$ und der Verbindungsstrahl des festen Punktes $x$ mit dem Pol $y$ sind konjugirte Strahlen desjenigen Strahlsystems, welches dem Punkt $x$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört.

Da nun Punktsystem und Strahlsystem in sich projektivische Doppelgebilde sind (§ 16 und 17), so folgt der bemerkenswerthe Satz:

Die Polaren sämmtlicher Punkte einer geraden Punktreihe in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden ein mit der Punktreihe projektivisches Strahlbüschel und die Pole sämmtlicher Strahlen eines ebenen Strahlbüschels in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden eine mit dem Strahlbüschel projektivische gerade Punktreihe.

Nehmen wir jetzt zwei beliebige projektivische Punktreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, so bilden die Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt zwei mit jenen, also unter sich projektivische Strahlbüschel $B$ und $B_1$; die Schnittpunkte entsprechender Strahlen sind die Pole der Projektionsstrahlen der Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$; beide Erzeugnisse sind, wie wir wissen, Kegelschnitte und die Tangenten des einen die Polaren der Punkte des andern, ebenso wie die Punkte des einen die Pole der Tangenten des andern; daher gilt der Satz:

Wenn man von sämmtlichen Punkten eines Kegelschnitts $K$ die Polaren in Bezug auf einen beliebigen

andern Kegelschnitt $C$ bestimmt, so umhüllen dieselben einen dritten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und wenn man von sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts $K$ die Pole in Bezug auf $C$ bestimmt, so erhält man die Punkte desselben Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, in der Weise, dass jede Tangente (und der Berührungspunkt) des einen Kegelschnitts einen Punkt (und seine Tangente) des andern Kegelschnitts zum Pol (und zur Polare) in Bezug auf den Kegelschnitt $C$ haben. Hieraus folgt zugleich, dass, wenn man von irgend einem Punkt $P$ die Polare $L$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K$ annimmt, auch der Pol $\mathfrak{P}$ von $L$ und die Polare $\mathfrak{L}$ von $P$ rücksichtlich des Hülfskegelschnitts $C$ für den neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ Pol und Polare sein werden. Dies giebt ein leichtes Kriterium, um zu erkennen, ob der Polarkegelschnitt $\mathfrak{K}$ Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist; nämlich: Liegt der Mittelpunkt von $C$ ausserhalb $K$, so ist $\mathfrak{K}$ Hyperbel, liegt er auf $K$, so ist $\mathfrak{K}$ Parabel, liegt er innerhalb $K$, so ist $\mathfrak{K}$ Ellipse.

Dieser Satz gestattet eine direkte Uebertragung der Eigenschaften des Kegelschnitts in andere (polare), z. B. des Pascal-schen Satzes in den Brianchon'schen Satz und lässt eine vollkommene Dualität der Eigenschaften des Kegelschnitts erkennen, wie sie ursprünglich schon in den Grundelementen enthalten ist, von denen wir ausgegangen sind. Allgemeiner aufgefasst ist dies gegenseitige Entsprechen der Punkte einer Ebene und der Geraden in derselben mit Hülfe eines festen Kegelschnitts (Basis) ein fruchtbares Prinzip zur Auffindung neuer Wahrheiten (Polarisation) und der Ausgangspunkt einer umfangreichen Theorie (théorie des polaires réciproques) geworden.

Die Grundeigenschaft von Pol und Polare, welche wir oben gefunden haben, dass nämlich die Polare $X$ irgend eines Punktes $x$ immer durch den Pol $y$ irgend einer durch $x$ gezogenen Geraden $Y$ geht und umgekehrt der Pol $x$ einer beliebigen Geraden $X$ auf der Polare $Y$ eines beliebigen in $X$ liegenden Punktes $y$ sich befindet, führt uns dahin, zwei solche Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts $x$ und $y$, für welche die Polare des einen durch den andern geht, also gleichzeitig die Polare des zweiten durch den ersten, zwei konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt und in gleicher Weise zwei solche Strahlen

$X$ und $Y$ in der Ebene eines Kegelschnitts, für welche der Pol der einen auf der andern liegt, also auch gleichzeitig der Pol der zweiten auf der ersten, zwei konjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt zu nennen. Mit dieser Bezeichnung sind nach dem Vorigen ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt immer ein Paar konjugirte Punkte desjenigen Punktsystems, welches ihrer Verbindungslinie in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört und ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt nichts anderes, als ein Paar konjugirter Strahlen desjenigen Strahlsystems, welches ihrem Schnittpunkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Dies lässt sich auch so aussprechen: Sämmtliche Paare konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, welche auf derselben Geraden liegen, bilden dasjenige Punktsystem, welches dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, und sämmtliche Paare konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt, welche durch denselben Punkt gehen, bilden dasjenige Strahlsystem, welches diesem Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Hieraus folgt beiläufig, dass es durch jeden beliebigen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts ein Paar und im Allgemeinen nur ein Paar rechtwinkliger konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt giebt, die Axen des Strahlsystems, welches ihm zugehört; es sei denn, dass das Strahlsystem ein Kreissystem wäre, bei dem sämmtliche Paare konjugirter Strahlen zu einander rechtwinklig sind. Dieser Fall wird uns später beschäftigen.

Zu einem Punkte $x$ gehören unendlich viele konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, die alle auf der Polare $X$ liegen; nehmen wir einen beliebigen Punkt $y$ derselben, so gehören zu ihm auch unendlich viele konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, die sämmtlich auf der durch $x$ gehenden Polare $Y$ liegen. Die beiden Polaren $X$ und $Y$ schneiden sich nun in einem Punkte $z$, dessen Polare $Z$ nach dem Vorigen die Verbindungslinie $xy$ sein muss. Solche drei Punkte $xyz$, von denen je zwei ein Paar konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind und deren Polaren $XYZ$ die (gegenüberliegenden) Seiten dieses Dreiecks sind $X = (yz)$, $Y = (zx)$, $Z = (xy)$, nennt man ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt oder ein sich selbst konjugirtes Dreieck, weil seine Seiten die Polaren seiner Ecken sind. Zugleich aber nennt

man auch solche drei Strahlen $XYZ$, von denen je zwei ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt sind und deren Pole die (gegenüberliegenden) Ecken dieses Dreiseits sind $x = (Y, Z)$, $y = (Z, X)$, $z = (X, Y)$, ein *Tripel konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt* oder ein sich selbst konjugirtes Dreiseit, weil seine Ecken die Pole seiner Seiten sind. *Die Seiten eines von einem Tripel konjugirter Punkte gebildeten Dreiecks sind zugleich ein Tripel konjugirter Strahlen und die Ecken eines von einem Tripel konjugirter Strahlen gebildeten Dreiseits ein Tripel konjugirter Punkte.* Bemerken wir noch, dass aus der angegebenen Konstruktion von Polare und Pol unmittelbar folgt: *Das Diagonaldreieck eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Vierecks oder eines demselben umbeschriebenen vollständigen Vierseits ist immer ein Tripel konjugirter Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt.* Diese Tripel spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Kegelschnitte und sind in unendlicher Mannichfaltigkeit vorhanden. Ein Punkt $x$ von drei Punkten eines Tripels kann willkührlich in der ganzen Ebene angenommen werden, der zweite $y$ ist dann auf die Polare $X$ beschränkt und kann auf dieser auch noch willkührlich gewählt werden, der dritte $z$ ist aber durch diese beiden bestimmt, nämlich der Schnittpunkt der Polaren $X$, $Y$; ebenso verhält es sich mit einem Tripel konjugirter Strahlen. Zu einem beliebigen Punkte $x$ in der Ebene eines Kegelschnitts giebt es unendlich viele Paare $yz$, welche mit ihm zusammen ein Tripel bilden; sie liegen sämmtlich auf der Polare $X$ des Punktes $x$ und bilden dasjenige Punktsystem, welches dieser Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört. Liegt daher der Punkt $x$ innerhalb des Kegelschnitts, so ist sein Strahlsystem elliptisch, die Punktenpaare $yz$ bilden daher auch ein elliptisches Punktsystem; die Polare $X$ trifft den Kegelschnitt nicht; liegt aber $x$ ausserhalb des Kegelschnitts, so ist sein Strahlsystem hyperbolisch, also auch das Punktsystem $yz$ auf der Polare $X$ hyperbolisch, welche in diesem Fall den Kegelschnitt trifft. In jedem der beiden Schnittpunkte fällt mithin ein Paar konjugirter Punkte zusammen und wir haben den besonderen Fall eines Tripels, dass zwei Punkte $yz$ desselben zusammenfallen; es muss alsdann der dritte $x$

auf der Tangente in diesem Punkte liegen, also die drei Punkte $xyz$ liegen in gerader Linie, was sonst nie der Fall sein kann. In diesem Fall ist das Tripel unbestimmt; jeder Punkt der Tangente kann als dritter Punkt des Tripels angesehen werden, während in dem Berührungspunkte die beiden andern zusammenfallen. Ein analoger specieller Fall kann bei einem Tripel konjugirter Strahlen eintreten. Im Allgemeinen erkennen wir hieraus leicht, dass bei einem Tripel konjugirter Punkte von den drei ihnen zugehörigen Strahlsystemen immer zwei hyperbolisch und eines elliptisch ist und bei einem Tripel konjugirter Strahlen von den drei ihnen zugehörigen Punktsystemen immer zwei hyperbolisch und eines elliptisch ist, also, dass von den drei Punkten eines Tripels immer einer innerhalb und die beiden andern ausserhalb des Kegelschnitts liegen und von den drei Strahlen eines Tripels immer zwei den Kegelschnitt in je zwei reellen Punkten treffen, während der dritte ihn nicht trifft.

## § 31. **Einige Folgerungen aus den Polar-Eigenschaften des Kegelschnitts.**

Aus der vorigen Betrachtung ergiebt sich eine Menge von Beziehungen zwischen konjugirten Punkten eines Kegelschnitts, von denen einige hier hervorgehoben werden mögen:

Verbindet man irgend ein Paar konjugirter Punkte $p\pi$ in Bezug auf einen Kegelschnitt mit einem beliebigen Punkte $B$ desselben, so treffen $Bp$ und $B\pi$ den Kegelschnitt in zwei Punkten ($P$ und $P_1$), deren Verbindungslinie durch den Pol der Geraden $p\pi$ geht. (Fig. 37.)

Bezeichnen wir mit $x$ den Pol der Geraden $p\pi$, so bilden $p\pi x$ ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt und die vorige Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen:

Ein Tripel konjugirter Punkte besitzt immer die Eigenschaft, dass es unendlich viele dem Kegelschnitt einbeschriebene Dreiecke giebt, deren Seiten durch die Punkte des Tripels gehen. Jeder Punkt des Kegelschnitts kann eine Ecke eines solchen Dreiecks sein; wird er mit zwei Tripelpunkten verbunden, so treffen die beiden Verbindungsstrahlen den Kegelschnitt in den beiden andern Ecken dieses Dreiecks; verbinden wir ihn mit allen drei Tripelpunkten

und merken die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrahlen mit dem Kegelschnitt, so haben wir im Kegelschnitt ein Viereck, dessen vier Dreiecke (die vier Mal zu je drei kombinirten Ecken) ebenfalls die angegebene Eigenschaft besitzen; das Tripel ist das Diagonaldreieck dieses vollständigen Vierecks im Kegelschnitt, und auch umgekehrt; dies lässt sich etwas anders so aussprechen: Sind $a\alpha$ irgend ein Paar konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt und werden dieselben mit einem Peripheriepunkt $o$ durch zwei Strahlen verbunden, welche den Kegelschnitt zum andern Male in den Punkten $p$ und $q$ treffen, d. h. $oa$ trifft in $p$ und $o\alpha$ in $q$, dann muss auch der Schnittpunkt $(p\alpha, qa) = r$ auf dem Kegelschnitte liegen. Hieraus folgt die Lösung der Aufgabe: Es soll ein Kegelschnitt konstruirt werden, der durch drei gegebene Punkte $p_1 p_2 p_3$ geht und ein gegebenes Punktsystem $(x, \xi)$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$ zu dem ihm zugehörigen Punktsysteme hat (§ 30). Ist das gegebene Punktsystem hyperbolisch, so muss der Kegelschnitt durch die beiden Asymptotenpunkte desselben gehen und ist also durch diese fünf Punkte vollständig bestimmt; wenn es aber elliptisch ist, so sind die Asymptotenpunkte imaginär und man kann folgendermassen konstruiren: Trifft die Verbindungslinie $p_2 p_3$ den Träger $\mathfrak{A}$ in $s_1$ und ist $\sigma_1$ der zu $s_1$ konjugirte Punkt des Punktsystems, ferner $\varrho_1$ der vierte harmonische zu $s_1 p_2 p_3$, dem $s_1$ zugeordnet, so wird $\varrho_1 \sigma_1$ die Polare von $s_1$ in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt sein; trifft $p_3 p_1$ in $s_2$ den Träger $\mathfrak{A}$, ist $\sigma_2$ der konjugirte Punkt zu $s_2$ und $\varrho_2$ der vierte harmonische Punkt zu $s_2 p_1 p_3$, so ist $\varrho_2 \sigma_2$ die Polare von $s_2$; der Schnittpunkt $(\varrho_1 \sigma_1, \varrho_2 \sigma_2) = a$ ist der Pol von $\mathfrak{A}$ in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt; durch ihn muss auch die in analoger Weise konstruirte dritte Gerade $\varrho_3 \sigma_3$ gehen. Die Verbindungslinien $p_3 a$ und $\sigma_1 p_2$ (oder $\sigma_2 p_1$) treffen sich $\pi_3$ oder $(\sigma_1 p_2, \sigma_2 p_1) = \pi_3$, ebenso $(\sigma_3 p_1, \sigma_1 p_3) = \pi_2$, $(\sigma_2 p_3, \sigma_3 p_2) = \pi_1$; die drei Punkte $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ liegen auf dem gesuchten Kegelschnitt und $p_1 \pi_1$, $p_2 \pi_2$, $p_3 \pi_3$ schneiden sich in $a$. Um beliebig viele Punkte des Kegelschnitts zu erhalten, haben wir nur den veränderlichen Schnittpunkt $(p_1 x, \pi_1 \xi)$ aufzusuchen.

Hieran knüpft sich die Lösung der zweiten Aufgabe: Es soll ein Kegelschnitt konstruirt werden, der durch einen gegebenen Punkt $p$ geht und zwei gegebene Punktsysteme $(x, \xi)$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$ und $(y, \eta)$ auf

dem Träger 𝔅 zu den ihm zugehörigen Punktsystemen hat. Sei der Schnittpunkt der beiden Träger (𝔄, 𝔅) in dem ersten Punktsystem mit $s$, in dem zweiten mit $t$ bezeichnet und die konjugirten zu diesen $\sigma$ und $\tau$, deren Verbindungslinie 𝔈 heisse; dann ist 𝔈 die Polare von $s$ (oder $t$) in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt, enthält also die Pole sowohl von 𝔄 wie von 𝔅. Wir müssen nun durch den gegebenen Punkt $p$ ein solches Strahlenpaar ziehen, welches sowohl 𝔄 als auch 𝔅 in einem Paar konjugirter Punkte trifft; dasselbe wird 𝔈 in den beiden Punkten des gesuchten Kegelschnitts treffen, nach unserm obigen Satze. Ein solches Paar ist immer reell vorhanden, sobald eines oder beide gegebenen Punktsysteme elliptisch sind; nur wenn beide hyperbolisch wären, braucht es nicht reell zu sein; in diesem Falle aber bestimmen die vier Asymptotenpunkte und $p$ vollständig den gesuchten Kegelschnitt. In den andern Fällen legen wir durch $p$ zwei concentrische Strahlsysteme mit den gegebenen Punktsystemen perspektivisch; diese haben (§ 16) ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Strahlen, welches das gesuchte ist; trifft dasselbe die Gerade 𝔈 in $c$ und $\gamma$, so liefert der veränderliche Schnittpunkt $(cx, \gamma\xi)$ alle Punkte des gesuchten Kegelschnitts. Die den obigen polar-entsprechenden Aufgaben werden in analoger Weise gelöst.

Kehren wir nunmehr zu dem Ausgangspunkte dieses Paragraphen zurück und halten die Verbindungslinie $p\pi$ fest, verändern aber das Punktenpaar $p\pi$ auf ihr, indem wir an seine Stelle alle Paare konjugirter Punkte des ganzen der Geraden $p\pi$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Punktsystems setzen, so bleibt der Pol fest; die Durchbohrungssehne läuft also durch einen festen Punkt und in $B$ entsteht ein Strahlsystem; wir schliessen also:

Dreht man um einen festen Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts einen veränderlichen Strahl, welcher den Kegelschnitt in je zwei Punkten $P$ und $P_1$ trifft, und verbindet einen beliebigen aber festen Punkt $B$ des Kegelschnitts mit dem veränderlichen Punktenpaare $PP_1$, so beschreibt dies Strahlenpaar $BP$, $BP_1$ ein Strahlsystem.

Dies lässt sich auch umkehren:

Verlegt man in einen Punkt des Kegelschnitts den

**Mittelpunkt eines beliebigen Strahlsystems, so durchbohren zwei konjugirte Strahlen desselben den Kegelschnitt immer in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt läuft.** Dieser wird ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts liegen, je nachdem das Strahlsystem hyperbolisch oder elliptisch ist. Der Beweis ergiebt sich leicht; denn da zwei Paar konjugirter Strahlen das Strahlsystem vollständig bestimmen und die beiden Durchbohrungssehnen derselben sich in einem Punkte $x$ treffen, so wird, wenn wir alle Sehnen durch $x$ ziehen, nach dem vorigen Satze in $B$ ein Strahlsystem entstehen, welches mit dem gegebenen identisch ist.

Hieraus erhalten wir als besonderen Fall, wenn wir ein Kreissystem für das Strahlsystem nehmen, folgenden Satz:

**Dreht man den in der Peripherie eines Kegelschnitts befindlichen Scheitel eines rechten Winkels beliebig herum, so dass die Schenkel den Kegelschnitt immer in zwei neuen Punkten treffen, so wird die Verbindungslinie derselben durch einen festen Punkt gehen, welcher mit dem Scheitel verbunden die Normale des Kegelschnitts liefert, d. h. diejenige Gerade, welche senkrecht steht auf der Tangente des Kegelschnitts.**

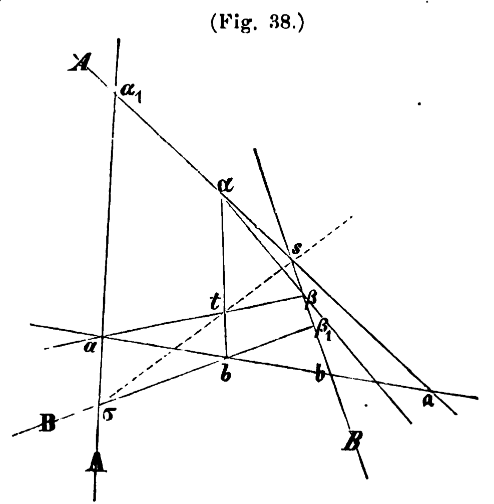
Die den vorigen analogen Sätze, welche wir entweder durch die gleichen Schlüsse aus unserer früheren Betrachtung (Fig. 37) ableiten oder aus dem im vorigen Paragraphen angedeuteten Prinzip der Polarisation direkt abschreiben können, lauten folgendermassen:

**Legt man aus den Punkten einer beliebigen Geraden in der Ebene eines Kegelschnitts Tangentenpaare an denselben, so treffen sie irgend eine feste Tangente des Kegelschnitts in Punktenpaaren eines Punktsystems.** Und umgekehrt:

**Nimmt man in einer Tangente des Kegelschnitts ein beliebiges Punktsystem $x\xi$ an und legt aus je zwei konjugirten Punkten desselben die anderen Tangenten an den Kegelschnitt, so ist der Ort ihres Schnittpunktes eine Gerade,** welche den Kegelschnitt trifft oder nicht trifft, je nachdem das angenommene Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch war.

Fassen wir jetzt (Fig. 38) zwei beliebige Paare konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$, die nicht auf derselben Geraden liegen, ins Auge; sei $A$ die Polare von $a$, welche mithin durch $\alpha$ gehen muss, $B$ die Polare von $b$, welche durch $\beta$ geht, und $s$ der Schnittpunkt von $A$ und $B$. Ziehen wir die Verbindungslinie $ab$, welche von $A$ in $\mathfrak{a}$ und von $B$ in $\mathfrak{b}$ getroffen wird, so sind

(Fig. 38.)



$a\,\mathfrak{a}$ und $b\,\mathfrak{b}$ zwei Punktenpaare desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $a\,b$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; dieses Punktsystem wird aber auch bestimmt durch die Schnittpunkte der Seitenpaare eines vollständigen Vierecks mit der Transversale $a\,b$ (§ 18). Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(a\,\beta,\ b\,\alpha) = t$, so hat das vollständige Viereck $\alpha\,\beta\,s\,t$, ein Seitenpaar $\alpha\,s = A$ und $\beta\,t = t\,a$, ein zweites Seitenpaar $\beta\,s = B$ und $\alpha\,t = t\,b$, als drittes Seitenpaar aber $\alpha\,\beta$ und $s\,t$; da die ersten beiden Seitenpaare die Transversale $a\,b$ in Paaren konjugirter Punkte desjenigen Punktsystems treffen, welches derselben in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, und dies Punktsystem schon durch zwei Paare bestimmt ist, so treffen auch $\alpha\,\beta$ und $s\,t$ die Gerade $a\,b$ in zwei konjugirten Punkten in Bezug auf den Kegelschnitt, oder der Schnittpunkt $(a\,b,\ \alpha\,\beta)$ hat zu seinem konjugirten auf $a\,b$ denjenigen, in welchem $s\,t$ es trifft. Der Punkt $s$ ist aber der Pol von $a\,b$, weil er der Schnittpunkt der Polaren $A\,B$ ist; folglich muss $s\,t$ die Polare des Punktes $(a\,b,\ \alpha\,\beta)$ sein; sie geht nun durch den Punkt $t = (a\,\beta,\ b\,\alpha)$; folglich sind $(a\,b,\ \alpha\,\beta)$ und $(a\,\beta,\ \alpha\,b)$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt und wir erhalten den folgenden Satz: *)

*) O. Hesse: „de curvis et superficiebus secundi ordinis," Crelle's Journal für Mathematik Bd. XX Seite 301.

Hat man irgend zwei Paare konjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt $a\alpha$ und $b\beta$, so sind die Schnittpunkte $(ab, \alpha\beta)$ und $(a\beta, \alpha b)$ allemal ein drittes Paar konjugirter Punkte. Oder:

Wenn zwei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits Paare konjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt sind, so ist es auch das dritte Paar. In gleicher Weise wird auch der polare Nebensatz bewiesen:

Sind $a$, $\alpha$ und $b$, $\beta$ irgend zwei Paare konjugirter Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt, so sind auch die Verbindungslinien der Schnittpunkte $(ab, \alpha\beta)$ und $(a\beta, \alpha b)$ ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt.

Wenn wir anderseits anstatt der Polaren $A$ und $B$ von $a$ und $b$ die Polaren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ von $\alpha$ und $\beta$ genommen hätten, deren Schnittpunkt $\sigma$ sei, so würde in derselben Weise $\sigma t$ als die Polare von $(ab, \alpha\beta)$ gefunden worden sein; folglich müssen $s\sigma t$ in derselben Geraden liegen. Die beiden Polaren $A$ und $\mathbf{A}$ schneiden sich aber in $\alpha_1$, dem Pol von $a\alpha$, und $a\alpha\alpha_1$ bilden daher ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt; ebenso schneiden sich die Polaren $B$ und $\mathbf{B}$ in $\beta_1$ und $b\beta\beta_1$ bilden ein anderes Tripel; es ist nun

$$(A, B) = s \qquad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sigma,$$

d. h.

$$(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1) = s \qquad (a\alpha_1, b\beta_1) = \sigma$$

und

$$(a\beta, b\alpha) = t;$$

da $s\sigma t$ in gerader Linie liegen und als die Schnittpunkte der Gegenseiten eines Pascal'schen Sechsecks

$$a\,\alpha_1\,\alpha\,b\,\beta_1\,\beta$$

aufgefasst werden können, so folgt (§ 28), dass die sechs Punkte $a\,\alpha\,\alpha_1\;b\,\beta\,\beta_1$, d. h. die Ecken zweier Tripel konjugirter Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Wir schliessen also:

Zwei Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf einen Kegelschnitt sind immer sechs Punkte eines neuen Kegelschnitts, und zugleich gilt der analoge Satz:

Zwei Tripel konjugirter Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt sind immer sechs Tangenten eines neuen Kegelschnitts.

Da die Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken ein Tripel konjugirter Punkte sind, zugleich ein Tripel konjugirter Strahlen bilden, so ergiebt sich beiläufig der in § 28 direkt bewiesene Satz: dass, wenn die sechs Ecken zweier Dreiecke auf einem Kegelschnitt liegen, die sechs Seiten derselben einen andern Kegelschnitt berühren und umgekehrt.

Ferner folgt hieraus: Hat man in Bezug auf einen Kegelschnitt $K$ zwei Tripel konjugirter Punkte, welche in einem Kegelschnitt $K_1$ liegen, während die Seiten dieser Tripeldreiecke einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ berühren, so sind $K_1$ und $\mathfrak{K}_1$ reciproke Polarfiguren von einander in Bezug auf die Basis $K$, denn die sechs Seiten sind die Polaren der sechs Ecken. Nehmen wir also irgend einen Punkt $p_1$ auf $K_1$, so wird seine Polare in Bezug auf $K_1$ eine Tangente von $\mathfrak{K}_1$ sein; sei einer ihrer Schnittpunkte mit $K_1$ der Punkt $q_1$, so wird auch die Polare von $q_1$ in Bezug auf $K$ eine Tangente von $\mathfrak{K}_1$ sein müssen, und da sie durch $p_1$ geht, so ist sie eine der beiden von $p_1$ an $\mathfrak{K}_1$ zu legenden Tangenten; ihr Schnittpunkt mit der Polare von $p_1$ ist der dritte Tripelpunkt $r_1$ zu $p_1$ und $q_1$, d. h. der Pol von $p_1 q_1$; da nun zwei Tripel immer auf einem Kegelschnitt liegen müssen, so wird auch der Kegelschnitt $K_1$, welcher schon ein Tripel enthält und durch $p_1 q_1$ geht, wodurch er unzweideutig bestimmt ist, durch $r_1$ gehen müssen und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, welcher bereits die Seiten eines der anfänglichen Tripeldreiecke und ausserdem $q_1 r_1$ und $p_1 r_1$ berührt, wird auch $p_1 q_1$ berühren müssen; der Kegelschnitt $K_1$ erhält also ein drittes Tripel $p_1 q_1 r_1$, dessen Seiten ebenfalls Tangenten von $\mathfrak{K}_1$ sind. Die beiden Kegelschnitte $K_1$ und $\mathfrak{K}_1$ liegen also so, dass es unendlich viele Dreiecke giebt, welche gleichzeitig dem ersten eingeschrieben und dem zweiten umgeschrieben sind (§ 28); jedes dieser Dreiecke bildet ein Tripel konjugirter Punkte und Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $K$. Dies lässt sich auch so aussprechen: Jede Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}_1$ schneidet $K_1$ in zwei Punkten, welche konjugirte Punkte in Bezug auf $K$ sind und das Tangentenpaar aus jedem Punkte von $K_1$ an $\mathfrak{K}_1$ ist ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf $K$. Hieraus folgt, wenn wir insbesondere eine gemeinschaftliche Tangente der Kegelschnitte $K$ und $\mathfrak{K}_1$ auffassen, dass $K_1$ durch die beiden Berührungspunkte derselben gehen muss; denn zwei konjugirte

Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen immer harmonisch mit dem Tangentenpaar, welches aus ihrem Schnittpunkte an den Kegelschnitt gelegt werden kann. Da nun das Tangentenpaar aus jedem Punkte $p_1$ des $K_1$ an $\mathfrak{K}_1$ ein Paar konjugirter Strahlen für $K$ ist, so bilden die Tangentenpaare aus $p_1$ an $K$ und an $\mathfrak{K}_1$ vier harmonische Strahlen; fallen von vier harmonischen Strahlen irgend zwei zusammen, so muss auch von den übrigen einer in diese beiden hineinfallen, also für eine gemeinschaftliche Tangente von $K$ und $\mathfrak{K}_1$ muss der Punkt $p_1$ entweder in dem einen oder dem andern Berührungspunkte liegen. Wir schliessen also: Der Kegelschnitt $K_1$ geht durch die acht Berührungspunkte der vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_1$ und $K$, und hieraus folgt: Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ berührt die acht Tangenten, welche in den vier Schnittpunkten der Kegelschnitte $K_1$ und $K$ an beiden gezogen werden können. Dass jene acht Punkte auf einem Kegelschnitt liegen und diese acht Geraden einen Kegelschnitt berühren müssen, haben wir schon früher (§ 27) gefunden (vergl. § 55).

Das Resultat der obigen Betrachtung lässt sich noch anders aussprechen; es ist nämlich $A$ die Polare von $a$, $B$ die Polare von $b$ und $\alpha\beta$ die Polare von $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sigma$; wir haben also ein Dreieck $ab\sigma$ und sein Polar-Dreiseit, gebildet von den drei Geraden $A$, $B$, $\alpha\beta$; die gegenüberliegenden Ecken dieses Dreiseits sind $\beta$, $\alpha$, $s$ und nach dem Obigen schneiden sich $a\beta$, $b\alpha$, $s\sigma$ in einem Punkte $t$; folglich erhalten wir den Satz:

Ein beliebiges Dreieck und sein Polardreieck liegen immer perspektivisch, d. h. sind $a\,b\,c$ drei beliebige Punkte und $A\,B\,C$ resp. ihre Polaren (die Seiten des ersten Dreiecks $bc = \mathfrak{A}$; $ca = \mathfrak{B}$; $ab = \mathfrak{C}$ und die Ecken des letzteren $(B, C) = \mathfrak{a}$ $(C, A) = \mathfrak{b}$ $(A, B) = \mathfrak{c}$), so schneiden sich die drei Verbindungsstrahlen $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$ und $c\mathfrak{c}$ in einem Punkte und die drei Schnittpunkte $(A, \mathfrak{A})$ $(B, \mathfrak{B})$ $(C, \mathfrak{C})$ liegen auf einer Geraden, welche die Polare dieses Punktes ist.

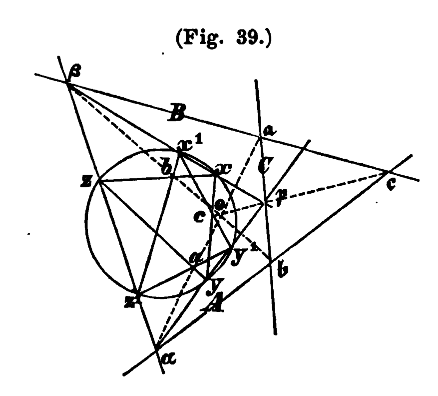
Verfolgen wir diese von einem beliebigen Dreieck $a\,b\,c$ und deren Polaren $ABC$ gebildete Figur weiter, so ergiebt sich daraus die Lösung einer interessanten und ihrer Zeit berühmten Aufgabe:

Sind nämlich die Ecken des Polardreiecks:

$$(B, C) = \mathfrak{a}, \quad (C, A) = \mathfrak{b}, \quad (A, B) = \mathfrak{c},$$

so schneiden sich nach dem vorigen Satze $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ in einem

(Fig. 39.)



Punkte $o$; möge $oa$ in $\alpha$ die Polare $A$ treffen, $ob$ in $\beta$ die Polare $B$, $oc$ in $\gamma$ die Polare $C$, so bilden $\alpha\beta\gamma$ ein neues Dreieck, welches mit den beiden vorigen perspektivisch liegt und dessen Ecken resp. auf den Polaren $ABC$ liegen. Nun zeigt aber die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\alpha\beta$, dessen Seiten $\alpha\mathfrak{a}$, $\beta\mathfrak{b}$ sich in $o$ treffen, während $\alpha\mathfrak{b} = A$, $\beta\mathfrak{a} = B$ sich in $\mathfrak{c}$ treffen, dass die vier Strahlen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha a$ und $A$ vier harmonische Strahlen sind, $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ zugeordnete, $\alpha a$ und $A$ zugeordnete Strahlen; nun sind aber $a$ und $A$ Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt; begegnet daher die Gerade $\alpha\beta$ dem Kegelschnitt in zwei Punkten $z$ und $z^1$, so wird, wenn wir $za$ ziehen, der andere Schnittpunkt $y$ dieser Verbindungslinie mit dem Kegelschnitt durch $a$ und den Schnittpunkt mit $A$ von $z$ harmonisch getrennt werden, d. h. $yz$ liegen harmonisch zu $a$ und dem Schnittpunkt von $yz$ mit $A$; folglich muss der andere Schnittpunkt $y$ auf dem vierten harmonischen Strahl zu $\alpha z$, $A$, $\alpha a$ liegen, d. h. nach dem Vorigen auf $\alpha\gamma$; $y$ liegt also auf $\alpha\gamma$; ziehen wir anderseits $z^1 a$, welches in $y^1$ dem Kegelschnitt zum andern Male begegnen möge, so muss auch $y^1$ auf $\alpha\gamma$ liegen, oder $\alpha\gamma$ trifft den Kegelschnitt in den beiden Punkten $yy^1$; also die beiden Seiten $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ treffen den Kegelschnitt in zwei solchen Punktenpaaren $zz^1$ und $yy^1$, dass $zy$ und $z^1y^1$ durch $a$

gehen, daher $zy^1$ und $z^1y$ sich in $a_1$ auf der Polare $A$ schneiden; in gleicher Weise treffen die beiden Seiten $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ den Kegelschnitt in zwei solchen Punktenpaaren $zz^1$ und $xx^1$, dass $zx$ und $z^1x^1$ sich in $b$ treffen, also $zx^1$ und $z^1x$ sich in $b_1$ auf der Polare $B$ schneiden; endlich aber treffen die beiden Seiten $\beta\gamma$ und $\alpha\gamma$ den Kegelschnitt in zwei solchen Punktenpaaren $xx^1$ und $yy^1$, dass von den beiden Schnittpunkten $(xy, x^1y^1)$ und $(xy^1, x^1y)$ der eine $c$ ist und der andere $c_1$ auf der Polare $C$ liegt; es fragt sich nur noch, welcher $c$ ist und welcher $c_1$. Dies ist nicht schwer zu entscheiden, denn die sechs Punkte $zz^1\ yy^1\ xx^1$ auf dem Kegelschnitt bilden ein Pascal'sches Sechseck

$$x\ z\ y\ x^1\ z^1\ y^1,$$

dessen Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden liegen; da nun $(xz, x^1z^1) = b$ $(yz, y^1z^1) = a$, so muss der dritte $(xy^1, x^1y) = c_1$ sein, denn die willkührlich angenommenen Punkte $abc$ liegen nicht in einer Geraden; folglich ist $(xy, x^1y^1) = c$. Das dem Kegelschnitt einbeschriebene Dreieck $xyz$ hat also die Eigenschaft, dass seine drei Seiten durch die gegebenen Punkte $abc$ gehen, und das andere Dreieck $x^1y^1z^1$ hat dieselbe Eigenschaft. Daraus erhellt die Auflösung der Aufgabe:

Es ist ein Kegelschnitt gegeben und drei beliebige Punkte $abc$, man soll ein Dreieck dem Kegelschnitt einbeschreiben, dessen Seiten durch $abc$ laufen.

Auflösung. Man konstruire zu $abc$ die Polaren $ABC$, deren Schnittpunkte seien $(B, C) = \mathfrak{a}$, $(C, A) = \mathfrak{b}$, $(A, B) = \mathfrak{c}$; die Verbindungslinie $\mathfrak{a}a$ trifft $A$ in $\alpha$, $\mathfrak{b}b$ trifft $B$ in $\beta$, $c\mathfrak{c}$ trifft $C$ in $\gamma$. Die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ treffen den Kegelschnitt in drei Punktenpaaren, welche die Ecken zweier der Aufgabe genügenden Dreiecke sind, nämlich $\alpha\beta$ in $z$ und $z^1$, $\beta\gamma$ in $x$ und $x^1$, $\gamma\alpha$ in $y$ und $y^1$ und zwar, wenn man die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ mit dem Kegelschnitt durch $z$ und $z^1$ bezeichnet hat, so trifft $za$ in $y$, $z^1a$ in $y^1$, $zb$ in $x$ und $z^1b$ in $x^1$, $xy$ und $x^1y^1$ schneiden sich in $c$; es giebt also im Allgemeinen zwei Dreiecke $xyz$ und $x^1y^1z^1$ von der gewünschten Beschaffenheit, so dass die Seiten $yz, zx, xy$ resp. durch $abc$ gehen und ebenfalls $y^1z^1, z^1x^1, x^1y^1$. Diese beiden Dreiecke können aber auch imaginär werden, wenn nämlich eine Seite des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ den Kegelschnitt nicht trifft, woraus dann folgt, dass auch die andern ihn nicht treffen können;

insbesondere können beide Dreiecke zusammenfallen; (welche Bedingung müsste alsdann zwischen den gegebenen Punkten *abc* obwalten?) Sind insbesondere *abc* ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt, so giebt es, wie wir oben gesehen haben, nicht zwei Auflösungen der Aufgabe, sondern unendlich viele; sie ist unbestimmt. (Ueber die Geschichte dieses Problems vergl. Chasles, Aperçu historique Note XI. Eine elegante Lösung der allgemeineren Aufgabe hat Göpel in dem Aufsatze: „Ueber Projektivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde", Crelle's Journal Bd. XXXVI Seite 317 gegeben.)

Aus dem oben bewiesenen, bei vielen geometrischen Untersuchungen nützlichen Satze, dass die Durchbohrungssehnen der Strahlenpaare eines Strahlsystems mit einem Kegelschnitt, welcher durch den Mittelpunkt des Strahlsystems geht, in einen Punkt zusammenlaufen, folgt zugleich eine andere sehr einfache Lösung der in § 16 besprochenen Aufgabe: „Das gemeinschaftliche Paar konjugirter Strahlen bei zwei concentrisch liegenden Strahlsystemen zu finden"; legen wir nämlich durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt beider Strahlsysteme einen beliebigen Kegelschnitt $K$, so bestimmen die Durchbohrungssehnen des einen Strahlsystems einen Punkt $P$, die des andern einen Punkt $P^1$ und die Sehne $PP^1$ trifft den Kegelschnitt $K$ in zwei solchen Punkten, nach denen das gesuchte gemeinschaftliche Strahlenpaar der beiden Systeme hingeht. Diese beiden Schnittpunkte sind immer reell, sobald nur einer der beiden Punkte $P, P^1$ innerhalb des Kegelschnitts $K$ liegt, d. h. eines der beiden Strahlsysteme elliptisch ist. Sind aber beide hyperbolisch, so braucht die Verbindungslinie $PP^1$ den Kegelschnitt $K$ nicht zu treffen, weil beide Punkte ausserhalb desselben liegen. In diesem Falle gehen reelle Tangentenpaare aus $P$ und $P^1$ an den Kegelschnitt $K$ und die Berührungspunkte mit dem gemeinschaftlichen Centrum beider Strahlsysteme verbunden liefern die Asymptoten derselben; die Berührungssehnen schneiden sich aber in einem Punkte $p$, dem Pol von $PP^1$, innerhalb $K$, sobald die Verbindungslinie $PP^1$ den Kegelschnitt $K$ in keinem reellen Punkte trifft, dagegen ausserhalb $K$, wenn $PP^1$ in zwei Punkten dem Kegelschnitt begegnet; der Punkt $p$ inducirt also selbst ein neues Strahlsystem in dem gemeinschaftlichen Centrum, dessen zwei Strahlenpaare die Asymptoten der gegebenen beiden Strahlsysteme

sind. Wenn nun dieses neue Strahlsystem elliptisch ist, so haben die gegebenen Strahlsysteme kein gemeinschaftliches Paar konjugirter Strahlen; ist es dagegen hyperbolisch, so haben sie ein gemeinschaftliches Paar und dieses bilden die Asymptoten des durch die beiden Asymptotenpaare der gegebenen Strahlsysteme bestimmten neuen Strahlsystems.

Schliesslich soll noch eine Eigenschaft der Steiner'schen Punkte beim Hexagrammum mysticum (§ 28) nachgewiesen werden, welche mit den Polarbeziehungen des Kegelschnitts zusammenhängt, dass nämlich ein Steiner'scher Punkt und sein Gegenpunkt allemal zwei konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind.*) Hierzu müssen wir uns das Raisonnement aus § 28 noch einmal zurückrufen:

Die drei Sechsecke:

1 2 3 4 5 6
1 4 3 6 5 2
1 6 3 2 5 4

liefern drei Pascal'sche Linien, welche sich in einem Steinerschen Punkte treffen, und die drei Sechsecke:

1 2 5 4 3 6
1 4 5 6 3 2
1 6 5 2 3 4

drei Pascal'sche Linien, welche sich im Gegenpunkte treffen. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten bei der ersten Gruppe von Sechsecken:

$$(12, 45) = a_1 \quad (34, 16) = a_2 \quad (56, 23) = a_3$$
$$(45, 36) = b_1 \quad (16, 25) = b_2 \quad (23, 14) = b_3$$
$$(36, 12) = c_1 \quad (25, 34) = c_2 \quad (14, 56) = c_3,$$

so folgt:

$$45 = a_1 b_1 \quad 16 = a_2 b_2 \quad 23 = a_3 b_3$$
$$36 = b_1 c_1 \quad 25 = b_2 c_2 \quad 14 = b_3 c_3$$
$$12 = c_1 a_1 \quad 34 = c_2 a_2 \quad 56 = c_3 a_3.$$

Da nun aber in dem Sechseck der zweiten Gruppe:

1 2 5 4 3 6

die Schnittpunkte:

---

*) Hesse: „Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid", Crelle's Journal Bd. XXIV Seite 40.

$$\begin{matrix} (12,\ 34) & (25,\ 36) & (45,\ 16) & \text{oder} \\ (c_1 a_1,\ c_2 a_2) & (b_1 c_1,\ b_2 c_2) & (a_1 b_1,\ a_2 b_2) & \end{matrix}$$

in einer Geraden liegen, so schneiden sich $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ in einem Steiner'schen Punkte $p$; bezeichnen wir die letzten drei Punkte:

$$(12,\ 34) = \beta_3 \quad (25,\ 36) = \alpha_3 \quad (45,\ 16) = \gamma_3,$$

so sind $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ die Schnittpunkte korrespondirender Seiten der beiden perspektivisch liegenden Dreiecke $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$; in gleicher Weise bezeichnen wir:

$$\begin{matrix} (34,\ 56) = \beta_1 & (25,\ 14) = \alpha_1 & (16,\ 23) = \gamma_1 \\ (56,\ 12) = \beta_2 & (14,\ 36) = \alpha_2 & (23,\ 45) = \gamma_2, \end{matrix}$$

und $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ liegen in einer Geraden als Schnittpunkte korrespondirender Seiten der perspektivisch liegenden Dreiecke $a_2 b_2 c_2$ und $a_3 b_3 c_3$; endlich liegen $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ in einer Geraden und sind die Schnittpunkte korrespondirender Seiten der perspektivisch liegenden Dreiecke $a_3 b_3 c_3$ und $a_1 b_1 c_1$; die drei Linien $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ schneiden sich aus demselben Grunde, wie oben $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ in einem Steiner'schen Punkte $\pi$, welcher der Gegenpunkt von $p$ heisst.

Nun sehen wir aus dem obigen Schema, dass die Punkte $a_1$ nnd $\alpha_1$ konjugirte Pnnkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind, denn es sind zwei Diagonalpunkte des Vierecks 1245 im Kegelschnitt; ebenso sind es auch $b_1$ und $\beta_1$, $c_2$ und $\gamma_2$, überhaupt je zwei mit gleichnamigen Buchstaben aus dem lateinischen und griechischen Alphabet und demselben Index bezeichnete Punkte; es liegt daher nahe, zu vermuthen, dass auch $p$ und $\pi$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sein werden. In der That, denken wir uns die Polaren $A_1 A_2 B_1 B_2$ der Punkte $a_1 a_2 b_1 b_2$ ermittelt, so müssen dieselben nach dem Vorigen beziehungsweise durch die Punkte $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$ gehen; nun ist aber der Schnittpunkt $(a_1 b_1,\ a_2 b_2) = \gamma_3$, folglich die Verbindungslinie $(A_1 B_1,\ A_2 B_2)$ die Polare von $\gamma_3$ und muss durch $c_3$ gehen, weil $c_3$ und $\gamma_3$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind. Die drei Schnittpunkte $(A_1,\ B_1)$ $(A_2,\ B_2)$ und $c_3$ liegen also in gerader Linie; bezeichnen wir den Schnittpunkt $(A_1,\ A_2) = \mathfrak{a}$ und $(B_1,\ B_2) = \mathfrak{b}$, so ist $A_1 = \alpha_1 \mathfrak{a}$, $B_1 = \beta_1 \mathfrak{b}$, $A_2 = \alpha_2 \mathfrak{a}$ und $B_2 = \beta_2 \mathfrak{b}$, endlich $c_3 = (\alpha_1 \alpha_2,\ \beta_1 \beta_2)$; es liegen daher die drei Schnittpunkte

$$(\mathfrak{a}\alpha_1,\ \mathfrak{b}\beta_1) \quad (\mathfrak{a}\alpha_2,\ \mathfrak{b}\beta_2) \quad (\alpha_1\alpha_2,\ \beta_1\beta_2)$$

in einer Geraden, d. h. die korrespondirenden Seiten der beiden Dreiecke $\mathfrak{a}\alpha_1\alpha_2$ und $\mathfrak{b}\beta_1\beta_2$ schneiden sich auf einer Geraden; folglich liegen die beiden Dreiecke perspectivisch, d. h. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ schneiden sich in einem Punkte. Der Schnittpunkt $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2)$ ist aber $\pi$, also die drei Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\pi$ liegen in einer Geraden. Die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ oder $(A_1A_2, B_1B_2)$ ist nun die Polare des Punktes $(a_1a_2, b_1b_2)$ oder $p$; die Polare von $p$ geht daher durch $\pi$ oder die Steiner'schen Gegenpunkte $p$ und $\pi$ sind ein Paar konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt. Die sämmtlichen 20 Steiner'schen Punkte (§ 28) zerfallen also in 10 Paare konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt.

## §. 32. Durchmesser und Mittelpunkt, das Strahlsystem der konjugirten Durchmesser und die Axen des Kegelschnitts.

Besondere Fälle der allgemeinen Polaritätsbeziehungen des Kegelschnitts führen zu denjenigen Eigenschaften desselben, welche am bekanntesten sind und meist zum Ausgangspunkt für die Untersuchung der Kegelschnitte gewählt werden. Nehmen wir einen Punkt im Unendlichen der Ebene eines Kegelschnitts, so wird seine Polare erhalten (§ 30), indem wir durch ihn Strahlen ziehen, d. h. Parallele, welche den Kegelschnitt in je zwei Punkten treffen, und den vierten harmonischen, dem unendlich-entfernten zugeordneten Punkt konstruiren; dieser ist (§ 8) der Mittelpunkt zwischen den beiden Schnittpunkten, also: Zieht man in beliebiger Richtung eine Reihe paralleler Sehnen eines Kegelschnitts, so liegen die Mitten derselben auf einer Geraden. Eine solche Gerade heisst Durchmesser des Kegelschnitts und ist die Polare eines unendlich-entfernten Punktes in der Ebene desselben. Die Tangenten in den Schnittpunkten eines Durchmessers laufen parallel, nämlich durch den im Unendlichen liegenden Pol des Durchmessers. Nehmen wir einen zweiten Punkt im Unendlichen und ziehen durch ihn ein Parallelstrahlen-Büschel, so liegen die Mitten der durch den Kegelschnitt abgeschnittenen Stücke auf einem zweiten Durchmesser, der Polare des zweiten unendlich-entfernten Punktes; der Schnittpunkt beider Durchmesser ist der Pol der Verbindungslinie beider unendlich-entfernten Punkte, d. h. der unendlich entfernten Geraden $G_\infty$. Auf jedem durch diesen Schnitt-

punkt zweier Durchmesser gehenden Strahl werden also durch den Kegelschnitt zwei Punkte bestimmt, deren Mitte jener Punkt ist, oder jeder solcher Strahl ist die Polare eines bestimmten Punktes im Unendlichen, d. h.

Sämmtliche Durchmesser des Kegelschnitts laufen durch einen festen Punkt, welcher der Mittelpunkt des Kegelschnitts heisst und der Pol der unendlich-entfernten Geraden $G_\infty$ ist.

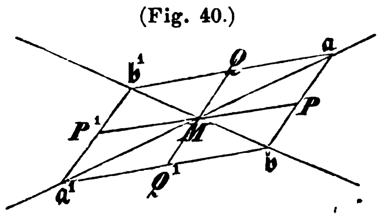
Bei der Hyberbel ist der Mittelpunkt der Schnittpunkt der beiden Asymptoten (§ 26), weil dies die Polaren (Tangenten) der unendlich-entfernten Punkte des Kegelschnitts sind; er liegt also ausserhalb der Hyperbel. Bei der Ellipse liegt er innerhalb derselben; bei der Parabel tritt die Eigenthümlichkeit ein, dass ihr Mittelpunkt auf ihr selbst liegt, nämlich ihr unendlich-entfernter Punkt ist; da nämlich die unendlich-entfernte Gerade Tangente der Parabel ist (§ 26), so ist ihr Pol der Berührungspunkt; also der unendlich-entfernte Punkt der Parabel ist zugleich der Mittelpunkt derselben und sämmtliche Durchmesser der Parabel laufen parallel nach dem unendlich-entfernten Punkte derselben hin.

Wie jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts ein bestimmtes Strahlsystem und jeder Geraden ein bestimmtes Punktsystem in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört (§ 29), so auch der unendlich-entfernten Geraden und dem Mittelpunkt; sind Punkt und Gerade Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt, so liegen Strahlsystem und Punktsystem perspektivisch, also das dem Mittelpunkt in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Strahlsystem liegt mit dem der unendlich-entfernten Geraden zugehörigen Punktsystem perspektivisch. Wir erhalten daher zwei konjugirte Strahlen des dem Mittelpunkt zugehörigen Strahlsystems, indem wir einen beliebigen Durchmesser ziehen und den Pol desselben mit dem Mittelpunkte verbinden, d. h. den Ort der Mitten der zu ihm parallelen Sehnen bestimmen; zwei solche Durchmesser des Kegelschnitts, deren einer der Ort der Mitten der zu dem andern parallelen Sehnen ist, woraus zugleich folgt, dass der erste der Ort der Mitten der zu dem zweiten parallelen Sehnen ist, oder was dasselbe sagt, zwei solche Durchmesser, deren jeder seinen Pol auf dem andern hat, heissen konjugirte Durchmesser des Kegelschnitts; die sämmtlichen Paare kon-

der Hyperbel enthalten. Das den Asymptoten selbst zugehörige Punktsystem nimmt wieder den einseitigen parabolischen Charakter an. Bei der Parabel endlich ist das jedem Durchmesser derselben (d. h. einem durch den unendlich-entfernten Punkt der Parabel gehenden Strahl) zugehörige Punktsystem, weil sein Mittelpunkt im Unendlichen liegt (§ 16), ein hyperbolisch-gleichseitiges, dessen einer Asymptotenpunkt allein im Endlichen liegt. Also jeder Durchmesser der Parabel trifft dieselbe nur in einem endlichen Punkte, der andere ist der unendlich-entfernte Punkt der Parabel.

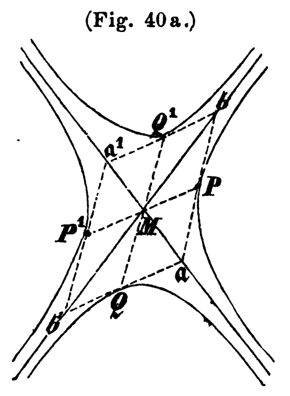
Die in den Schnittpunkten zweier konjugirten Durchmesser der Ellipse gezogenen Tangenten bilden ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm, dessen parallele Seitenpaare den konjugirten Durchmessern parallel laufen; die Diagonalen dieses Parallelogramms bilden ein zweites Paar konjugirter Durchmesser, weil sie mit der unendlich-entfernten Geraden ein Tripel konjugirter Strahlen sind als Diagonaldreieck eines dem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits (§ 30). Diese beiden Paare bestimmen das ganze Strahlsystem der konjugirten Durchmesser. Wir können aus demselben Grunde auch allgemeiner sagen: Die Diagonalen irgend eines dem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramms sind allemal ein Paar konjugirte Durchmesser desselben und die Seitenpaare eines beliebigen dem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramms laufen allemal parallel zwei konjugirten Durchmessern desselben. Bei der Hyperbel trifft nur einer von zwei konjugirten Durchmessern dieselbe in zwei reellen Punkten $P$ und $P^1$; die Tangenten in denselben laufen dem andern konjugirten Durchmesser parallel; trifft (Fig. 40) die Tangente in $P$ die Asymptoten in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist der Berührungspunkt $P$ die Mitte von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (§ 26); trifft die Tangente in $P^1$ die Asymptoten in $\mathfrak{a}^1$ und $\mathfrak{b}^1$, so ist gleichfalls $P^1$ die Mitte von $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$; da aber die Mitte von $PP^1$ der Mittelpunkt $M$ der Hyperbel ist, so bilden die vier Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$ die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seitenpaare den beiden konjugirten Durchmessern der Hyperbel parallel laufen, indem $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^1$

(Fig. 40.)



und $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}$ mit $PP^1$ parallel sind. Verändern wir den durch den Mittelpunkt $M$ gezogenen Durchmesser $PP^1$, so verändert sich dies Parallelogramm, dessen Seitenpaare allemal einem Paar konjugirter Durchmesser parallel laufen und dessen Flächeninhalt konstant bleibt; ebenso wie nun das eine Seitenpaar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$ die gegebene Hyperbel einhüllt, wird auch das andere parallele Seitenpaar eine neue Hyperbel einhüllen; denn betrachten wir die Asymptoten als die erzeugenden Punktreihen der gegebenen Hyperbel, so sind in ihrem Schnittpunkte die besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ vereinigt (§ 26) und es ist also $M\mathfrak{a} \,.\, M\mathfrak{b} = \text{const.}$ Nun ist aber $\mathfrak{b}^1 M = M\mathfrak{b}$; der Punkt $\mathfrak{b}^1$ durchläuft also eine mit der von $\mathfrak{b}$ durchlaufenen projektivisch-gleiche Punktreihe; also sind auch die von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}^1$ durchlaufenen Punktreihen projektivisch und haben ebenfalls ihre besonderen Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ in $M$ vereinigt; dies zweite Seitenpaar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^1$ und $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}$ umhüllt also gleichfalls eine Hyperbel, welche dieselben Asymptoten hat, wie die erste und ganz in die beiden andern Scheitelräume zwischen die Asymptoten hineinfällt; diese zweite heisst die konjugirte Hyperbel (oder komplementäre Hyperbel). Die Mittelpunkte $QQ^1$ des zweiten parallelen Seitenpaars unseres Parallelogramms sind die Berührungspunkte der konjugirten Hyperbel; $QQ^1$ ist also ein Durchmesser der konjugirten Hyperbel und hat zu seinem konjugirten Durchmesser $PP^1$. Das ganze System der konjugirten Durchmesser ist daher für die beiden konjugirten Hyperbeln dasselbe und sie ergänzen sich in der Weise, dass diejenigen Durchmesser, welche die eine Hyperbel in zwei reellen Punkten treffen, die andere nicht treffen und umgekehrt; zwei konjugirte Hyperbeln haben nicht allein dieselben Asymptoten, sondern auch dieselbe Potenz (§ 26) und können durch dieselben beiden Punktreihen erzeugt werden, wenn man in ihrem Schnittpunkte die besonderen Punke $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ vereinigt; die zu der einen konjugirte Hyperbel erhält man alsdann dadurch, dass man den einen der beiden Träger um den festen Schnittpunkt herumbewegt um $180^0$, so dass jede Hälfte des Trägers in die Lage der andern Hälfte kommt.

(Fig. 40a.)



Wir bemerken noch, dass die bei dem Parallelogramm $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$, dessen Seitenpaare durch die Punkte $P$ und $P^1$, $Q$ und $Q^1$ halbirt werden, ebenso wie $P$ und $P^1$ die Asymptotenpunkte des dem Durchmesser $PMP^1$ zugehörigen Punktsystems in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel sind, die Punkte $Q$ und $Q^1$ ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf dieselbe Hyperbel sein müssen; denn die Polare von $\mathfrak{a}$ geht durch $P$ und läuft parallel $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$, folglich durch $Q^1$ und ebenso ist die Polare von $\mathfrak{b}^1$ nichts anderes, als $P^1Q^1$, mithin $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^1$ die Polare von $Q^1$; da aber die Polare von $Q^1$ durch $Q$ geht, so sind $Q$ und $Q^1$ konjugirte Punkte in Bezug auf die ursprüngliche Hyberbel und zwar dasjenige Punktenpaar des dem Durchmesser $QMQ^1$ in Bezug auf die ursprüngliche Hyperbel zugehörigen Punktsystems, welches vom Mittelpunkte $M$ nach beiden Seiten hin gleich weit absteht. Auf den beiden konjugirten Durchmessern $MP$ und $MQ$ repräsentiren also diese beiden Strecken, welche den Hälften der Seiten des Parallelogramms $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1$ gleich sind, zwei solche Längen, dass die Quadrate derselben den Inhalt der konstanten Rechtecke liefern, welche dem einen und dem andern Punktsystem auf diesen Durchmessern in Bezug auf die Hyberbel zugehören, wobei aber festzuhalten ist, dass allemal das eine Punktsystem hyperbolisch, das andere elliptisch ist.

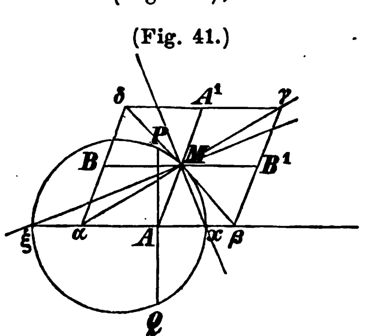
Das dem Mittelpunkte des Kegelschnitts zugehörige Strahlsystem der konjugirten Durchmesser hat, wie jedes Strahlsystem (§ 17), ein Paar zu einander rechtwinklige konjugirte Strahlen und nur ein einziges Paar, die Axen des Strahlsystems, wofern nicht das Strahlsystem ein Kreissystem ist. Also:

Der Kegelschnitt hat im Allgemeinen immer ein Paar zu einander rechtwinklige konjugirte Durchmesser und nur ein einziges Paar (wenn er nicht Kreis ist); diese heissen die Axen des Kegelschnitts. Eine Ausnahme hiervon macht der Kreis, welcher unendlich viele Axenpaare hat. Um die Axen des Kegelschnitts zu finden, hat man also die Axen desjenigen Strahlsystems aufzusuchen, welches dem Mittelpunkt in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört und welches durch zwei Paar konjugirte Strahlen (Durchmesser) bestimmt wird. Bei der Hyperbel sind die Axen unmittelbar zu finden; es sind nämlich die Halbirungslinien des Winkels zwischen den Asymptoten und seines Nebenwinkels, wie aus den Eigenschaften des hyperbolischen

Strahlsystems hervorgeht, weil jede Asymptote ein Paar zusammenfallender konjugirter Durchmesser repräsentirt.

Bei der Ellipse sei ein beliebiges Paar konjugirter Durchmesser und die (stets reellen) Schnittpunkte derselben mit der Ellipse $A$ und $A^1$, $B$ und $B^1$ ermittelt (Fig. 41), womit zugleich zwei Paar konjugirte Durchmesser bekannt sind; denn ziehen wir durch $A$ und $A^1$ zwei Parallele zu $BB^1$ und durch $B$ und $B^1$ zwei Parallele zu $AA^1$, so erhalten wir ein Parallelogramm $\alpha\beta\gamma\delta$, welches der Ellipse umbeschrieben ist und dessen Diagonalen nach dem Obigen ein zweites Paar konjugirter Durchmesser sind; die Axen des durch diese zwei Paar konjugirter Strahlen vollständig bestimmten Strahlsystems lassen sich nun in elementarer Weise wie folgt, konstruiren: Das Strahlsystem des Mittelpunkts $M$ trifft die Seite $\alpha\beta$, deren Mitte $A$ ist, in einem Punktsystem, von welchem $A$ der Mittelpunkt (dem unendlich-entfernten entsprechend) und $\alpha\beta$ ein Paar konjugirter Punkte ist; denken wir uns über $\alpha\beta$ als Durchmesser einen Kreis geschlagen und in $A$ ein Perpendikel auf $\alpha\beta$ errichtet, welches den Kreis in den Punkten $P$ und $Q$ treffen möge, so wird die ganze durch $P$ und $Q$ gelegte Kreisschaar die Gerade $\alpha\beta$ in dem betrachteten Punktsystem schneiden, d. h. jeder durch $PQ$ gelegte Kreis in zwei konjugirten Punkten dieses Punktsystems. Nun giebt es aber einen Kreis, welcher durch $PQ$ und $M$ geht; dieser schneidet in zwei konjugirten Punkten jenes Punktsystems $x\xi$, folglich sind $Mx$ und $M\xi$ die Richtungen zweier konjugirten Durchmesser, und da sie auf einander senkrecht stehen, weil $x\xi$ ein Durchmesser dieses Kreises ist, so sind es die gesuchten Axen der Ellipse. — Da Axe eines Kegelschnitts ein solcher Durchmesser desselben ist, dessen konjugirter auf ihm senkrecht steht, oder für den die Tangente in einem Schnittpunkt zu ihm rechtwinklig ist, so können wir auch für die Parabel die Axen ermitteln. Alle nach dem unendlich-entfernten Punkte der Parabel (ihrem Mittelpunkte) gehende Parallelstrahlen sind Durchmesser derselben; jeder schneidet sie nur noch in einem einzigen,

(Fig. 41.)



im Endlichen liegenden Punkt und es ist ein solcher zu suchen, dessen Tangente senkrecht auf dieser Richtung ist, d. h. wir haben eine Tangente aus demjenigen unendlich-entfernten Punkte an die Parabel zu legen, welcher in der zu der Richtung sämmtlicher Durchmesser senkrechten Richtuug liegt. Da es durch jeden unendlich-entfernten Punkt (ausser der unendlich-entfernten Geraden) nur noch eine Tangente an die Parabel giebt, so giebt es auch nur eine bestimmte zu der Richtung nach dem unendlich-entfernten Punkt der Parabel senkrechte Tangente. Der Berührungspunkt, welcher Scheitel der Parabel heisst, mit dem unendlich-entfernten Punkt derselben verbunden liefert eine Axe der Parabel; die andere Axe ist die unendlich-entfernte Gerade selbst; die Parabel hat alsto nur eine im Endlichen liegende Axe.

## §. 33. Konstruktion der Axen und einige daraus hervorgehende metrische Beziehungen.

Die Schnittpunkte der Axen mit dem Kegelschnitt heissen, wie bei der Parabel, auch bei Ellipse und Hyperbel Scheitelpunkte und die endliche Strecke auf jeder Axe zwischen den beiden Scheitelpunkten wird im engeren Sinne Axe des Kegelschnitts genannt, die Hälfte dieser Strecke Halbaxe. Suchen wir zunächst bei der Ellipse die Grösse der Axen zu bestimmen: Die im vorigen Paragraphen angegebene Konstruktion ergab zunächst nur die Richtung derselben; sie führt aber auch leicht zur Bestimmung ihrer Grösse, wenn wir berücksichtigen, dass die Scheitelpunkte die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems auf der Axe sind, welches ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; $M$ ist Mittelpunkt dieses Punktsystems; der Punkt $x$ (Fig. 41) und der Schnittpunkt seiner Polare bestimmen ein anderes Paar konjugirter Punkte; die Polare von $x$ muss aber durch $A$ gehen, weil $A$ der Berührungspunkt einer aus $x$ an den Kegelschnitt gehenden Tangente ist, sie muss ferner senkrecht auf $Mx$ stehen, weil sie durch den Pol von $Mx$, d. h. den unendlich-entfernten Punkt des konjugirten Durchmessers, oder der anderen Axe gehen muss und die beiden Axen auf einander senkrecht stehen. Die Polare von $x$ ist also das aus $A$ auf $Mx$ gefällte Perpendikel; möge es in $x^1$ treffen, so ist $Mx \,.\, Mx^1$ das konstante Rechteck für das auf der Axe befindliche Punktsystem; sei:

$$Mx \,.\, Mx^1 = a^2,$$

wo die Grösse $a$ durch elementare Konstruktion leicht zu ermitteln ist, dann sind die Scheitel auf dieser Axe der Ellipse die Endpunkte der nach entgegengesetzten Richtungen von $M$ aufgetragenen Strecke $a$; also $2a$ die Länge der einen Axe; treffe gleicherweise das aus $A$ auf $M\xi$ gefällte Perpendikel in $\xi^1$ und sei:

$$M\xi \,.\, M\xi^1 = b^2,$$

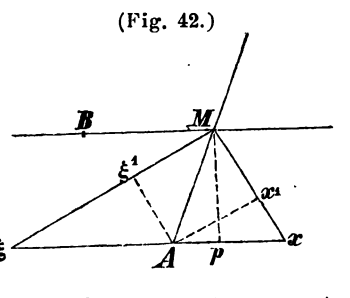
so wird die nach entgegengesetzten Richtungen von $M$ aus auf die zweite Axe aufgetragene Strecke $b$ die Schnittpunkte der zweiten Axe bestimmen, deren Länge $2b$ ist. Die Axen der Ellipse sind im Allgemeinen verschieden, die grössere bezeichnet man gewöhnlich mit $2a$, die kleinere mit $2b$ und nennt erstere die „grosse Axe", letztere die „kleine Axe" der Ellipse; sind sie insbesondere gleich, so ist das durch die Parallelen in den Scheiteln gebildete, der Ellipse umschriebene Rechteck ein Quadrat, dessen Diagonalen also auch zu einander rechtwinkelig sind; das dem Mittelpunkte zugehörige Strahlsystem hat daher zwei Paar rechtwinklige konjugirte Strahlen, ist also (§ 17) ein Kreissystem und die Ellipse ist in diesem besonderen Fall ein Kreis.

Aus der vorigen Konstruktion ergeben sich einfache metrische Beziehungen zwischen den Axen und irgend einem Paar konjugirter Durchmesser des Kegelschnitts. Betrachten wir das rechtwinkelige Dreieck $\xi Mx$ (Fig. 41), in dessen Hypothenuse sich der Punkt $A$ befindet; die Perpendikel aus $A$ auf die Katheten treffen dieselben in $\xi^1$ und $x^1$ und es ist:

$$Mx \,.\, Mx^1 = a^2 \qquad M\xi \,.\, M\xi^1 = b^2$$

Bezeichnen wir ferner die beiden halben konjugirten Durchmesser $MA = A$ und $MB = B$, ihren Winkel $AMB$, welcher gleich dem Winkel $xAM$ ist, mit $\varphi$, so ergeben sich, wenn wir noch aus $M$ das Perpendikel $Mp$ auf die Hypothenuse herablassen (Fig. 42), folgende Relationen:

(Fig. 42.)




$$\begin{array}{lcl} Mx^2 &=& xp \,.\, x\xi \\ \dfrac{Mx^1}{Mx} &=& \dfrac{A\xi}{x\xi} \\ \hline Mx \,.\, Mx^1 &=& A\xi \,.\, xp \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} M\xi^2 &=& \xi p \,.\, \xi x \\ \dfrac{M\xi^1}{M\xi} &=& \dfrac{Ax}{\xi x} \\ \hline M\xi \,.\, M\xi^1 &=& Ax \,.\, \xi p \end{array}$$

Hieraus folgt also:

$$\begin{cases} a^2 = A\xi \,.\, xp \\ b^2 = Ax \,.\, \xi p. \end{cases}$$

Da nun

$$\xi p \,.\, px = pM^2 = (MA \sin\varphi)^2 = A^2 \,.\, \sin^2\varphi$$

und $\xi A \,.\, Ax = AP^2 = AQ^2 = MB^2 = B^2$ (Fig. 41.)

so folgt: $A^2 B^2 \sin^2\varphi = a^2 b^2,$

also: (I.) $AB \,.\, \sin\varphi = ab.$

Ferner haben wir:

$$Ax = Ap + px \qquad \xi p = \xi A + Ap$$

$$b^2 = (Ap + px)(\xi A + Ap) = Ap \,.\, \xi A + px \,.\, \xi A + Ap \,.\, px + Ap^2$$
$$= Ap^2 + px \,.\, \xi p + \xi A \,.\, Ap$$
$$a^2 = \xi A \,.\, px$$

---

$$a^2 + b^2 = Ap^2 + \xi A \,.\, Ax + px \,.\, \xi p$$

und da $\xi p \,.\, px = pM^2 \qquad Ap^2 + pM^2 = AM^2 = A^2$

$$\xi A \,.\, Ax = B^2,$$

so folgt: (II.) $A^2 + B^2 = a^2 + b^2.$

Die Relation (I.) sagt folgenden Satz aus:

Das von den Tangenten in den Endpunkten zweier konjugirten Durchmesser der Ellipse gebildete Parallelogramm hat konstanten Inhalt, der gleich ist dem aus den Axen der Ellipse gebildeten Rechteck.

Die Relation (II.) lässt sich so in Worten ausdrücken:

Die Summe der Quadrate zweier konjugirten Durchmesser der Ellipse ist konstant, gleich der Summe der Quadrate ihrer Axen.

Aus dieser metrischen Beziehung zwischen den Paaren konjugirter Durchmesser der Ellipse geht ein ausgezeichnetes Paar, die gleichen konjugirten Durchmesser der Ellipse, hervor, welches einer gewissen Analogie wegen, die es mit den Asymptoten der Hyperbel hat, öfters in Betracht kommt; es giebt nämlich unter den Paaren konjugirter Durchmesser eines, dessen Längen gleich werden und welches mithin den Bedingungen genügen muss:

$$\begin{cases} \mu^2 \sin\vartheta = ab \\ 2\,\mu^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

wo $\mu$ die halbe Länge eines der beiden gleichen konjugirten Durchmesser und $\vartheta$ den Winkel bedeutet, welchen dieselben mit ein-

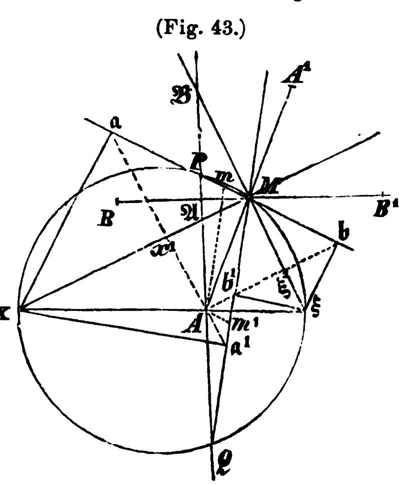
ander bilden. Die Länge $\mu$ kann hiernach leicht konstruirt werden, $\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$; die Lage der gleichen konjugirten Durchmesser geht aus der Relation $\sin \vartheta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ hervor, welche $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}$ ergiebt. Denkt man sich also das der Ellipse umschriebene Rechteck, gebildet von den vier Tangenten in den Schnittpunkten der Axen, so wird der Winkel zwischen den Diagonalen dieses Rechtecks $= \vartheta$ sein, und da die Diagonalen selbst ein Paar konjugirter Durchmesser sind (§ 32), so sind sie die gesuchten gleichen konjugirten Durchmesser der Ellipse ihrer Lage nach. **Die Axen der Ellipse halbiren also die Winkel zwischen den gleichen konjugirten Durchmessern derselben.**

Die Ermittelung der Länge der Axen $2a$ und $2b$ war auf die elementare Aufgabe zurückgeführt, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln: $Mx \,.\, Mx^1 = a^2$ und $M\xi \,.\, M\xi^1 = b^2$; allein die nähere Betrachtung der vorigen Figur (Fig. 41) zeigt, dass wir gar nicht nöthig haben, diese Aufgabe besonders zu lösen, sondern dass die Figur selbst auch die Länge der Axen der Ellipse liefert und zugleich zu einigen interessanten Eigenschaften derselben führt. Sei, wie im vorigen Paragraphen, $M$ der Mittelpunkt der Ellipse, $MA$ der Halbmesser $A$, die Tangente in $A$ und die darauf Senkrechte (Normale) gezogen, auf letzterer die Länge

$$AP = AQ = MB = B$$

des halben konjugirten Durchmessers zu $A$ nach beiden Seiten hin abgetragen, durch die Punkte $PQM$ ein Kreis gelegt, welcher in $x$ und $\xi$ die Tangente in $A$ trifft, also $Mx$ und $M\xi$ die Richtungen der Axen der Ellipse und endlich aus $A$ auf die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $xM\xi$ die Perpendikel $Ax^1$ und $A\xi^1$ gefällt, dann ist $Mx \,.\, Mx^1 = a^2$ und $M\xi \,.\, M\xi^1 = b^2$. Ziehen wir nun noch die Linien $MP$ und $MQ$ (Fig. 43) und möge

(Fig. 43.)



das Perpendikel $Ax^1$ die Linien $MP$ und $MQ$ in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^1$, das Perpendikel $A\xi^1$ dieselben in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^1$ treffen, so zeigt eine einfache Betrachtung, dass $M\mathfrak{a} = M\mathfrak{a}^1 = a$ und $M\mathfrak{b} = M\mathfrak{b}^1 = b$ wird, also die Längen der Halbaxen unmittelbar aus der Figur zu entnehmen sind.

In der That zunächst ist, weil die Punkte $PQx\xi M$ auf einem Kreise liegen:

$$\angle PMx = \angle P\xi x = \angle P\xi A \text{ und } \angle QMx = \angle Q\xi A,$$

weil aber $A$ die Mitte von $PQ$ und $A\xi$ senkrecht auf $PQ$, ist $\angle P\xi A = \angle Q\xi A$, folglich auch:

$$\angle PMx = \angle QMx,$$

d. h. die Axen halbiren die Winkel zwischen den beiden Strahlen $MP$, $MQ$. Folglich hätten wir nach der Konstruktion der Punkte $P$ und $Q$ nur nöthig gehabt, den Winkel und Nebenwinkel zwischen den Strahlen $MP$ und $MQ$ zu halbiren, um die Richtungen der Axen der Ellipse zu erhalten, ohne den Kreis durch $PQM$ zu legen und die Schnittpunkte $x\xi$ mit der Tangente in $A$ aufzusuchen. Aus der Gleichheit der Winkel $PMx$ und $QMx$ folgt, dass das Perpendikel $Ax^1$ auf den beiden Strahlen $MP$ und $MQ$ zwei gleiche Strecken $M\mathfrak{a} = M\mathfrak{a}^1$ abschneidet und ebenso das Perpendikel $A\xi^1$ zwei gleiche Strecken $M\mathfrak{b} = M\mathfrak{b}^1$; denken wir uns durch $A$ eine Parallele zu $MQ$ gezogen, so muss dieselbe, weil $AP = AQ$ ist, $PM$ in $m$ halbiren und der Parallelität wegen ist auch $mA = m\mathfrak{a}$, also da das Dreieck $\mathfrak{a}A\mathfrak{b}$ bei $A$ rechtwinklig ist, $m\mathfrak{a} = m\mathfrak{b} = mA = \frac{1}{2}MQ$; mithin $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = MQ$; anderseits, wenn wir durch $A$ eine Parallele zu $MP$ ziehen, so muss dieselbe $MQ$ in $m^1$ halbiren und $m^1\mathfrak{b}^1 = m^1A = m^1\mathfrak{a}^1$ sein, also haben wir:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = MQ;\ M\mathfrak{a} = M\mathfrak{a}^1 = P\mathfrak{b} = Q\mathfrak{b}^1 \\ \mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 = MP;\ M\mathfrak{b} = M\mathfrak{b}^1 = P\mathfrak{a} = Q\mathfrak{a}^1. \end{cases}$$

Ferner haben wir wegen der Parallelität von $Ax^1$ und $\xi M$ $\angle \mathfrak{b}M\xi = \angle M\mathfrak{a}x^1$ und wegen des Kreisvierecks $MPx\xi$ $\angle \mathfrak{b}M\xi = \angle Px\xi = \angle \xi PA$, folglich:

$$\triangle M\mathfrak{a}x^1 \sim \triangle \xi PA$$

$$\frac{Mx^1}{M\mathfrak{a}} = \frac{\xi A}{\xi P} \text{ und da } \frac{Mx^1}{Mx} = \frac{\xi A}{\xi x}, \text{ so folgt}$$

$$\frac{Mx}{M\mathfrak{a}} = \frac{\xi x}{\xi P},$$

aus dem Produkt beider Gleichungen folgt:

$$\frac{Mx \, . \, Mx^1}{M\mathfrak{a}^2} = \frac{\mathfrak{x}A \, . \, \mathfrak{x}x}{\mathfrak{x}P^2} = 1.$$

Da aber $Mx \, . \, Mx^1 = a^2$, so folgt:

$$M\mathfrak{a} = a \quad \text{und ebenso} \quad M\mathfrak{b} = b,$$

d. h. auf den Strahlen $MP$ und $MQ$ werden von $M$ aus durch die aus $A$ auf die Richtungen der Axen gefällten Perpendikel Strecken abgeschnitten, welche paarweise gleich sind und die Längen der Halbaxen $a$ und $b$ liefern.

Ferner ergiebt sich aus den obigen Relationen:

$$\begin{cases} MP = a - b \\ MQ = a + b: \end{cases}$$

Die Abstände des Mittelpunktes $M$ von den beiden Punkten $P$ und $Q$ sind Summe und Differenz der beiden Halbaxen der Ellipse.

Oder auch:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}\ \mathfrak{b} = a + b \\ \mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 = a - b, \end{cases}$$

welche Relationen sich ebenso leicht in Worte kleiden lassen.

Aus der Aehnlichkeit der drei symmetrischen Vierecke: $\mathfrak{x}PxQ$, $M\mathfrak{a}x\mathfrak{a}^1$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{b}M\mathfrak{b}^1$ ergeben sich andere metrische Beziehungen von geringerer Bedeutung. Wenn wir die Schnittpunkte der Geraden $PQ$, welche die Normale der Ellipse im Punkte $A$ ist, mit den beiden Axen durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen, so folgt aus der Parallelität (Fig. 43):

$$\frac{A\mathfrak{A}}{AP} = \frac{\mathfrak{b}M}{\mathfrak{b}P} = \frac{b}{a}; \quad \frac{A\mathfrak{B}}{QA} = \frac{\mathfrak{a}^1 M}{Q\mathfrak{a}^1} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergiebt sich:

1) $$\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Normale in einem beliebigen Punkte $A$ der Ellipse trifft die Axen derselben in zwei solchen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dass das Verhältniss der Abschnitte $A\mathfrak{A} : A\mathfrak{B}$ konstant bleibt, gleich dem Verhältniss der Quadrate der Axen, und

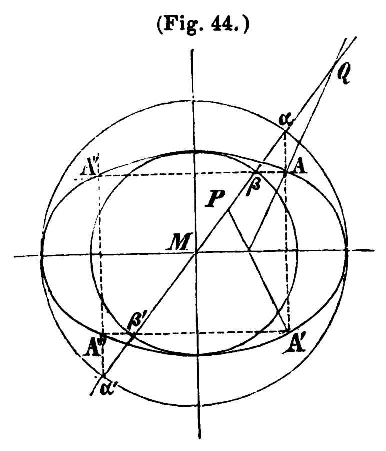
2) $$A\mathfrak{A} \, . \, A\mathfrak{B} = B^2$$

das Rechteck aus den beiden Abschnitten auf der Normale einer Ellipse vom Peripheriepunkte $A$ bis zu

**den Schnittpunkten der Normale mit den Axen ist gleich dem Quadrate desjenigen Halbmessers der Ellipse, welcher dem nach dem Punkte $A$ hin gehenden konjugirt ist.**

Die Betrachtung der obigen Figur führt auch zu einer bekannten graphischen Konstruktion der Ellipse, welche sich für praktische Zwecke empfiehlt; lassen wir nämlich den Punkt $A$ auf der Ellipse sich verändern, so beschreiben die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^1$ einen Kreis, welcher $M$ zum Mittelpunkt und die Halbaxe $a$ zum Radius hat; ebenso beschreiben die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^1$ einen Kreis, welcher $M$ zum Mittelpunkt und $b$ zum Radius hat; auch die Punkte $P$ und $Q$ beschreiben mit jenen concentrische Kreise, deren Radien $a - b$ und $a + b$ sind. Gehen wir daher umgekehrt von zwei concentrischen Kreisen um $M$ mit den Radien $a$ und $b$ aus, lassen einen beliebigen Strahl durch $M$ gehen, welcher in $\alpha$ und $\alpha^1$ den ersten, in $\beta$ und $\beta^1$ den anderen Kreis treffe, und nehmen durch $M$ ein rechtwinkeliges Axenkreuz an, welches die Richtungen der beiden Axen der Ellipse enthält, so werden die durch $\alpha$ auf die $a$-Axe, durch $\beta$ auf die $b$-Axe gefällten Perpendikel sich in einem Punkte $A$ der Ellipse treffen müssen nach der vorigen Figur; die Benutzung der andern Schnittpunkte $\alpha^1 \beta^1$ bei dieser Konstruktion liefert zugleich drei andere Punkte der Ellipse, deren einer der diametral gegenüberliegende und die beiden andern die symmetrisch mit $A$ in Bezug auf die beiden Axen liegenden Punkte sind. Die Bewegung des durch $M$ willkührlich gezogenen Strahles $M\alpha\beta$ führt successive zu sämmtlichen Punkten der Ellipse und die einfache Konstruktion derselben gestattet die leichte Entwerfung eines anschaulichen Bildes, wie es Fig. 44 darstellt. Dieses Bild der Ellipse lässt die Symmetrie rücksichtlich der beiden Axen erkennen und zeigt, dass die beiden Kreise die Ellipse in ihren Scheiteln berühren. Weiterhin führt dieselbe Betrachtung zur Konstruktion der Nor-

(Fig. 44.)



male und mithin auch der Tangente in dem Ellipsenpunkte $A$; denn trägt man auf den Strahl $M\beta\alpha$ nach derselben Richtung hin die Strecke $MQ = a + b$ auf, so ist $QA$ die Normale der Ellipse im Punkte $A$; fasst man die nach entgegengesetzten Seiten hin liegenden Schnittpunkte $\alpha$ und $\beta^1$ desselben durch $M$ gezogenen Strahles mit den beiden Kreisen auf, welche den Punkt $A^1$ liefern und trägt $MP = a - b$ auf diesem Strahle ab, so ist $PA^1$ die Normale für den Punkt $A^1$; denken wir uns überhaupt zwei neue concentrische Kreise mit den Radien $a + b$ und $a - b$ um $M$ beschrieben, die Oerter der Punkte $P$ und $Q$, so bieten dieselben nach der angegebenen Konstruktion das einfachste Mittel dar, die Normalen und also auch die Tangenten der Ellipse unmittelbar zu zeichnen. Wir übergehen weitere Eigenschaften der Ellipse, welche sich aus Fig. 43 folgern liessen — z. B. wegen der Gleichheit der Winkel gilt die Aehnlichkeit der Dreiecke $MP\mathfrak{A}$ und $MxQ$ und daraus fliesst die Relation:

$$M\mathfrak{A} \,.\, Mx = MP \,.\, MQ = a^2 - b^2 = \text{const.},$$

d. h. Tangente und Normale eines Punktes der Ellipse schneiden auf jeder der Axen vom Mittelpunkt aus zwei Strecken ab, deren Rechteck konstant ist; die Schnittpunkte bilden also ein Punktsystem, welches auf der einen Axe hyperbolisch, auf der andern elliptisch ist u. s. w. (Siehe § 35). Wir wollen nur noch die den vorigen analogen Eigenschaften der Hyperbel kurz ableiten. Wir wissen, dass nur ein Theil der Durchmesser einer Hyperbel dieselbe in reellen Punktenpaaren trifft und dass immer der zu einem solchen konjugirte Durchmesser der Hyperbel nicht begegnet; es giebt also auch nur eine reelle Axe der Hyperbel. Nehmen wir aber die konjugirte Hyperbel (§ 32) zu Hülfe, so werden auf zwei konjugirten Durchmessern von der einen und von der konjugirten Hyperbel Strecken abgeschnitten, welche als die Längen zweier konjugirten Durchmesser der Hyperbel aufgefasst ganz analoge Eigenschaften besitzen, wie die Paare konjugirter Durchmesser bei der Ellipse. In der That haben wir schon oben gesehen (Fig. 40), dass das Parallelogramm, welches von den Tangentenpaaren in den Schnittpunkten zweier konjugirten Durchmesser mit den beiden konjugirten Hyperbeln gebildet wird, konstanten Inhalt besitzt, weil seine Ecken auf den Asymptoten der Hyperbel liegen; die Seiten dieses Parallelogramms

vertreten die Längen zweier konjugirter Durchmesser der Hyperbel und wir können daher auch von der konjugirten Hyperbel ganz abstrahiren, indem wir nur die Asymptoten zu Hülfe nehmen; sei $A$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel, treffe die Tangente in $A$ die beiden Asymptoten in $\alpha$ und $\beta$ (also bekanntlich $\alpha A = A\beta$), so ist $\alpha\beta$ die Länge desjenigen Durchmessers, welcher dem durch $A$ gehenden konjugirt ist, und bezeichnen wir zur Abkürzung die absoluten Längen

$$MA = A \qquad \alpha A = A\beta = B,$$

den Winkel dieser beiden konjugirten Richtungen durch $\varphi$, so ist

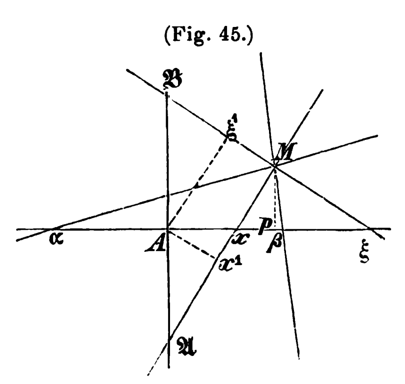
$$AB \,.\, \sin\varphi = \text{const.}$$

wegen der konstanten Potenz der Hyperbel (§ 26). Wir überzeugen uns aber auch in ganz analoger Weise, wie bei der Ellipse, von der Richtigkeit dieser und der zweiten Relation zwischen den konjugirten Durchmessern der Hyperbel, indem wir die Axen derselben bestimmen; ihre Richtungen sind geradezu durch die Halbirungslinien der von den Asymptoten gebildeten Winkel gegeben; mögen sie in $x$ und $\xi$ die Tangente $\alpha\beta$ treffen, so ist, weil $\alpha\beta x\xi$ vier harmonische Punkte sind und $A$ die Mitte von $\alpha\beta$

$$Ax \,.\, A\xi = A\alpha^2 = A\beta^2 = B^2.$$

Um die Schnittpunkte der Axen mit der Hyperbel zu finden, haben wir das ihnen zugehörige Punktsystem zu ermitteln, dessen Mittelpunkt $M$ ist; da nun die Polare von $x$ durch $A$ gehen muss und durch den Pol von $Mx$, so ist sie die Senkrechte $Ax^1$, aus $A$ auf $Mx$ gefällt (Fig. 45) und $xx^1$ ein Paar konjugirter Punkte des gesuchten Punktsystems; dasselbe ist hyperbolisch, weil $x$ und $x^1$ auf derselben Seite von $M$ liegen, und die Länge der einen Halbaxe $a$ wird gefunden aus der

(Fig. 45.)




Relation: $$Mx \,.\, Mx^1 = a^2.$$

Das aus $A$ auf die andere Axe $M\xi$ gefällte Perpendikel trifft dieselbe in $\xi^1$ und ist die Polare von $\xi$; die Punkte $\xi$ und $\xi^1$ liegen aber nothwendig nach entgegengesetzten Richtungen von $M$,

also das Punktsystem auf der zweiten Axe ist elliptisch; nach der obigen Bemerkung (§ 32) über die konjugirte Hyperbel ist nun das konstante Rechteck des dieser zweiten Axe zugehörigen Punktsystems gleich dem Quadrat des halben konjugirten Durchmessers, also:

$$\xi M \,.\, M\xi^1 = b^2.$$

Tragen wir die hieraus zu ermittelnde Strecke $b$ auf $M\xi$ nach beiden Seiten hin ab, so erhalten wir die Durchschnittspunkte der zweiten Axe mit der konjugirten Hyperbel. Denken wir uns noch das Perpendikel $Mp$ auf die Tangente $\alpha\beta$ gefällt, so ergiebt eine der oben bei der Ellipse durchgeführten ganz analoge elementare Rechnung:

$$\begin{array}{ll}\dfrac{Mx}{Mx^1} = \dfrac{\xi x}{\xi A} & \dfrac{\xi M}{M\xi^1} = \dfrac{\xi x}{xA} \\ Mx^2 = px \,.\, \xi x & \xi M^2 = \xi p \,.\, \xi x \\ \hline Mx \,.\, M^1 = px \,.\, \xi A & \xi M \,.\, M\xi^1 = \xi p \,.\, xA \\ a^2 = px \,.\, \xi A & b^2 = \xi p \,.\, xA,\end{array}$$

woraus zunächst folgt:

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= \xi p \,.\, px \,.\, Ax \,.\, A\xi \\ &= pM^2 \,.\, B^2 \\ &= (A \,.\, \sin\varphi)^2 \,.\, B^2 \qquad \text{also} \end{aligned}$$

$$(\mathrm{I}^1.) \;\ldots\; AB \sin\varphi = ab.$$

Zweitens:

$$\begin{aligned} a^2 &= (pA + Ax)\,(\xi p + pA) \\ &= pA \,.\, \xi p + pA^2 + Ax \,.\, \xi p + Ax \,.\, pA \\ a^2 &= pA \,.\, \xi p + pA^2 + Ax \,.\, \xi A \\ b^2 &= xA \,.\, \xi p \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= px \,.\, \xi p + pA^2 + Ax \,.\, \xi A \\ &= pM^2 + pA^2 - B^2 \end{aligned}$$

$$(\mathrm{II}^1) \;\ldots\; a^2 - b^2 = A^2 - B^2 = \text{const.}$$

Ziehen wir noch die Normale in dem Hyperbelpunkte $A$, welche die Axen respektive in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ treffen möge, so zeigt die Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}A} = \frac{x^1 M}{\mathfrak{A}x^1} \text{ und}$$

$$\frac{\mathfrak{A}x^1}{x^1 A} = \frac{A\xi^1}{\xi^1 B} = \frac{\xi\xi^1}{A\xi^1} = \frac{\xi M}{xM}, \text{ also}$$

$$\frac{\mathfrak{A}x^1}{M\xi^1} = \frac{\xi M}{xM} \quad \text{oder} \quad Ax^1 = \frac{\xi M \,.\, M\xi^1}{xM},$$

folglich:

$$\frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}A} = \frac{Mx \,.\, Mx^1}{\xi M \,.\, M\xi^1} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$(1^1.) \quad \ldots\ldots \quad \frac{A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}A} = \frac{a^2}{b^2} = \text{const.}$$

Da aber auch:

$$\frac{\mathfrak{A}A}{Ax} = \frac{\mathfrak{A}x^1}{x^1A} = \frac{\xi M}{xM} = \frac{\xi A}{\mathfrak{B}A}$$

$$\mathfrak{A}A \,.\, A\mathfrak{B} = Ax \,.\, A\xi = B^2$$

$$(2^1.) \quad \ldots\ldots \quad \mathfrak{A}A \,.\, A\mathfrak{B} = B^2.$$

Wir übergehen die Erörterung einiger anderer metrischer Beziehungen, welche die Figur liefert, wie z. B.

$$\frac{\xi M}{M\xi^1} = \frac{\xi x}{xA} = \frac{Mx}{xx^1}$$

$$\overline{M\xi^1}^2 = xx^1 \,.\, x^1\mathfrak{A}$$

$$\xi M \,.\, M\xi^1 = Mx \,.\, x^1\mathfrak{A} = b^2$$

$$Mx \,.\, Mx^1 = a^2$$

$$Mx \,.\, M\mathfrak{A} = a^2 + b^2 = \text{const. u. s. w. (§ 35).}$$

Die Konstruktion der Längen $a$ und $b$ ist vermöge der beiden Relationen $Mx \,.\, Mx^1 = a^2$ und $\xi M \,.\, M\xi^1 = b^2$ auf die elementare Aufgabe zurückgeführt: „ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln"; in der von uns betrachteten Figur (Fig. 45) treten diese Längen selbst nicht so unmittelbar auf, wie bei der Ellipse (Fig. 43) und es knüpft sich hieran auch nicht eine so einfache Konstruktion der Hyperbel durch Punkte, wie dort; wir können dieselbe aber um so eher entbehren, als die Tangenten und Punkte der Hyperbel mit Hülfe der Asymptoten, wie wir schon früher gesehen haben, in der einfachsten Weise sich ermitteln lassen.

## § 34. Bestimmung solcher Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts, für welche das zugehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges wird.

Wir haben in § 29 gesehen, dass jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts als Mittelpunkt eines bestimmten dem Kegelschnitt zugehörigen Strahlsystems aufgefasst werden kann und dass dasselbe hyperbolisch ist, wenn der Punkt ausserhalb des Kegelschnitts liegt, indem die beiden aus ihm an den Kegelschnitt gelegten Tangenten die Asymptoten dieses Strahlsystems sind;

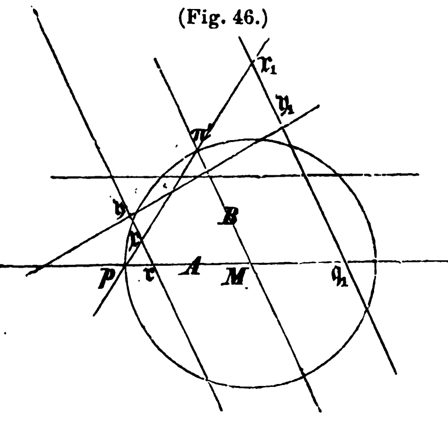
wir wollen jetzt insbesondere solche Punkte in der Ebene aufsuchen, für welche das zugehörige Strahlsystem hyperbolisch-gleichseitig wird. Da beim hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystem die Asymptoten rechtwinklig zu einander sind, so kommt die vorliegende Frage darauf hinaus, den Ort des Schnittpunktes zweier zu einander rechtwinkligen Tangenten des Kegelschnitts aufzusuchen. Betrachten wir zuerst

a) die Ellipse und fassen irgend zwei parallele Tangenten auf, welche in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ berühren, die den unendlich-entfernten entsprechen, so können wir diese als die Träger zweier die Ellipse erzeugenden Punktreihen ansehen, welche (§ 26) ungleichlaufend sein müssen; jede Tangente der Ellipse schneidet also die entsprechenden Hälften der beiden Träger in zwei Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{x}_1$ von solcher Beschaffenheit, dass das Rechteck

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = \text{const.}$$

ist, und da die Punktreihen ungleichlaufend sind, so müssen die Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ gleich gerichtet sein; werden insbesondere die beiden Seiten dieses konstanten Rechtecks gleich, so erhalten wir eine dem Durchmesser $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ parallele Tangente, welche mithin auf den Tangenten in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ Stücke abschneidet, die dem halben konjugirten Durchmesser zu $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ gleich sind; bezeichnen wir diesen mit $B$, während $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1 = 2A$ sei oder, wenn $M$ die Mitte von $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ ist, $M\mathfrak{r} = A$, so ist:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \,.\, \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1 = B^2.$$



(Fig. 46.)

Ziehen wir noch durch $M$ eine Parallele zu den Tangenten in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, so sind die beiden durch $M$ gehenden Strahlen zwei konjugirte Durchmesser der Ellipse, deren Richtungen $Mp$ und $M\pi$ seien (Fig. 46).

Hätten wir nun zwei rechtwinklige Tangenten der Ellipse, so müssten die zu ihnen parallelen Tangenten ebenfalls rechtwinklig sein, also diese vier Tangenten ein der Ellipse umschriebenes Rechteck bilden; die Diagonalen eines

Rechtecks sind aber gleich und sie sind zugleich (§ 32) die Richtungen eines Paares konjugirter Durchmesser. Denken wir uns das vorhin beliebig angenommene Paar konjugirter Durchmesser $Mp$ und $M\pi$ als die Diagonalen eines solchen der Ellipse umschriebenen Rechtecks, so müsste eine Seite desselben auf den beiden Durchmessern $Mp$ und $M\pi$ gleiche Stücke abschneiden, d. h. es wäre eine Tangente zu suchen, welche die beiden konjugirten Durchmesser in zwei solchen Punkten $p$ und $\pi$ träfe, dass $Mp = M\pi$ würde; der Punkt $p$ (und ebenso $\pi$) müsste dann der Schnittpunkt zweier rechtwinkeligen Tangenten der Ellipse sein, denn der Winkel zwischen den beiden durch $p$ den konjugirten Durchmessern parallel gezogenen Strahlen würde durch die eine Tangente halbirt, und da jene ein Paar konjugirte Strahlen des dem Punkte $p$ zugehörigen Strahlsystems sind, dessen eine Asymptote die gesuchte Tangente ist, so halbirt die andere Asymptote, d. h. die zweite durch $p$ gehende Tangente den Nebenwinkel, steht also auf der ersten senkrecht; das dem Punkt $p$ zugehörige Strahlsystem ist also ein hyperbolisch-gleichseitiges. Um nun $p$ zu finden, haben wir $Mp = M\pi$ und wegen der Parallelität $\mathfrak{r}p = \mathfrak{r}\mathfrak{x}$; $\mathfrak{q}_1 p = \mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$, also

$$\mathfrak{r}p \cdot \mathfrak{q}_1 p = B^2,$$

es ist aber:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}p &= Mp - A \\ \mathfrak{q}_1 p &= Mp + A \\ \hline B^2 &= Mp^2 - A^2 \\ Mp^2 &= A^2 + B^2. \end{aligned}$$

Da nun nach dem in § 33 (II) bewiesenen Satze:

$$A^2 + B^2 = a^2 + b^2 = \text{const},$$

so ist $Mp$ konstant, d. h. der Ort von $p$ ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt; wir haben also den Satz:

Der Ort des Schnittpunktes zweier rechtwinkligen Tangenten der Ellipse ist ein mit derselben concentrischer Kreis, dessen Radius $= \sqrt{a^2 + b^2}$ und welcher dem Rechteck umschrieben ist, das von den Tangenten in den Scheiteln der Ellipse gebildet wird. Jeder Punkt dieses Ortskreises besitzt die Eigenschaft, dass das in Bezug auf die Ellipse ihm zu-

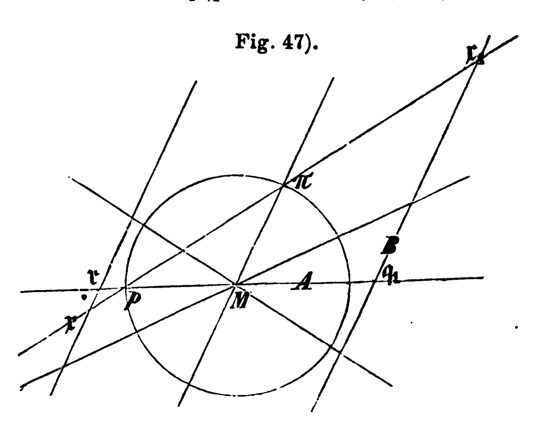
gehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges ist.

*b*) Bei der Hyperbel muss der Beantwortung der Frage die Erörterung vorangehen, ob es überhaupt rechtwinklige Tangenten der Hyperbel giebt, eine Frage, die bei der Ellipse übrig war, weil es bei ihr in jeder Richtung ein Paar parallele Tangenten giebt, folglich auch zu jeder Tangente zwei mit ihr rechtwinklige Tangenten. Wir haben in § 26 gesehen, dass es nur in denjenigen Richtungen Tangenten an der Hyperbel giebt, welche in die beiden die Hyperbelzweige nicht enthaltenden Scheitelräume zwischen den Asymptoten hineinfallen; bezeichnen wir denjenigen Winkel, in dessen Scheitelräumen die Hyperbel liegt, durch $\vartheta$ $\left(\text{also nach der vorigen Definition (§ 33) der Axen der Hyperbel: } \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{b}{a}\right)$, den Nebenwinkel also durch $180^0 - \vartheta$ und nehmen eine beliebige Tangente der Hyperbel an, deren Richtung in die Nebenscheitelräume hineinfällt, so wird es, wenn die zu ihr senkrechte Richtung auch in die Nebenscheitelräume hineinfällt, nothwendig rechtwinklige Tangenten zu der angenommenen geben; hierzu ist aber erforderlich, dass $180^0 - \vartheta > 90^0$, d. h. $\vartheta < 90^0$, und umgekehrt ist ersichtlich, dass nur, wenn $\vartheta < 90^0$ ist, rechtwinklige Tangentenpaare an der Hyperbel existiren, dagegen, wenn $\vartheta > 90^0$, keine zwei zu einander rechtwinkeligen Tangenten der Hyperbel vorhanden sind. Wenn $\vartheta = 90^0$, d. h. die Hyperbel eine gleichseitige ist, so giebt es nur ein einziges Paar zu einander rechtwinkliger Tangenten, nämlich die Asymptoten; ihr Schnittpunkt ist der einzige Punkt der Ebene von der gesuchten Beschaffenheit, dass das ihm zugehörige Strahlsystem in Bezug auf die Hyperbel ein hyperbolisch-gleichseitiges ist, in diesem Falle also das konjugirte Durchmesser-System. Wenn dagegen $\vartheta < 90^0$ oder nach dem Obigen $b < a$, so giebt es eine Menge von Rechtecken, die der Hyperbel umschrieben sind, und der Ort ihrer Ecken lässt sich ganz analog, wie bei der Ellipse ermitteln. Fassen wir nämlich wieder zwei parallele Tangenten, die in den Endpunkten eines Durchmessers $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ berühren, als Träger der die Hyperbel erzeugenden Punktreihen auf, so müssen diese (§ 26) gleichlaufend sein oder, wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ irgend ein Paar entsprechende Punkte derselben sind, die Strecken $\mathfrak{r}\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{x}_1$ entgegengesetzt gerichtet; der absolute Werth des

Rechtecks aus diesen beiden Strecken muss konstant sein; eine durch den Mittelpunkt $M$ zwischen $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ gehende Tangente, d. h. eine Asymptote der Hyperbel schneidet auf den beiden Trägern gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Strecken ab und eine solche ist nach dem Vorigen (§ 33) die Länge des halben dem Durchmesser $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ konjugirten Durchmessers der Hyperbel; bezeichnen wir diesen mit $B$ und $M\mathfrak{r} = A$, so ist also:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1 = B^2 \quad \text{(Fig. 47).}$$

Fig. 47).




Ziehen wir noch durch $M$ eine Parallele zu den Tangenten in $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$, so haben wir in $M$ ein Paar konjugirte Durchmesser der Hyperbel und genau ebenso wie im vorigen Falle eine solche Tangente der Hyperbel zu suchen, welche auf jenen zwei gleiche Strecken $Mp = M\pi$ abschneidet; trifft dieselbe in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ die Träger der beiden Punktreihen, so ist wegen der Parallelität

$$\mathfrak{r}p = \mathfrak{r}\mathfrak{x} \quad \text{und} \quad p\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1$$

$$\mathfrak{r}p = \mathfrak{r}M - pM \qquad p\mathfrak{q}_1 = pM + M\mathfrak{q}_1$$

$$= A - pM \qquad = pM + A$$

$$\mathfrak{r}p \cdot p\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}_1\mathfrak{q}_1 = B^2 = A^2 - (pM)^2$$

$$Mp^2 = A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = \text{const.} \quad (\S\ 33,\ \text{II}^1),$$

folglich, da $a > b$ angenommen ist, der Ort des gesuchten Punktes $p$ ein mit der Hyperbel concentrischer Kreis. Wir schliessen hieraus folgendes Resultat:

Der Ort des Schnittpunktes zweier rechtwinkliger

Tangenten der Hyperbel ist, wenn $a > b$, ein mit der Hyperbel concentrischer Kreis, dessen Radius

$$= \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Jeder Punkt dieses Kreises besitzt die Eigenschaft, dass das in Bezug auf die Hyperbel ihm zugehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges ist. Wenn $a = b$, d. h. die Hyperbel eine gleichseitige ist, so zieht sich dieser Kreis auf einen Punkt zusammen (hat den Radius 0), den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel; wenn $a < b$, so giebt es keine zwei zu einander rechtwinklige Tangenten der Hyperbel (der Ortskreis wird imaginär), dagegen für die konjugirte Hyperbel ist der Ort ihres Schnittpunktes ebenfalls ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M$ und dem Radius $\sqrt{b^2 - a^2}$.

c) Bei der Parabel giebt es keine zwei parallele Tangenten, sondern in jeder beliebigen Richtung eine und nur eine Tangente; folglich existiren keine der Parabel umschriebenen Rechtecke, wohl aber unzählig viele rechte Winkel, deren Schenkel die Parabel berühren; um den Ort ihrer Scheitel zu finden, haben wir das in den beiden vorigen Fällen angewendete Mittel nicht zur Verfügung, weil es keine zwei parallele Tangenten der Parabel giebt, welche als Träger der sie erzeugenden Punktreihen aufgefasst werden könnten. Die Parabel wird immer von zwei projektivisch-ähnlichen Punktreihen erzeugt, d. h. wenn $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ irgend zwei Paare entsprechender Punkte sind, so ist das Verhältniss $\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1} = \text{const.}$ Bezeichnen wir mit $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}_1$ den Schnittpunkt der beiden Träger und mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}$ die entsprechenden Berührungspunkte, so ist also:

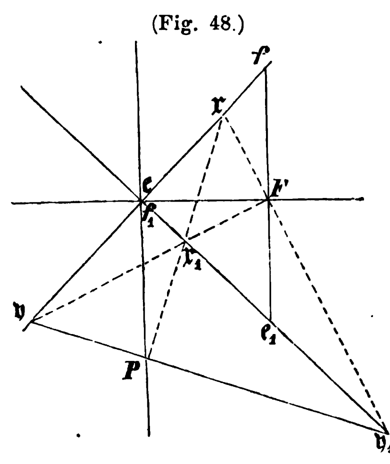
$$\frac{\mathfrak{f}\mathfrak{x}}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{x}_1} = \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{e}}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1},$$

und wenn $\mathfrak{x}$ zwischen $\mathfrak{f}\mathfrak{e}$ liegt, so liegt $\mathfrak{x}_1$ zwischen $\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$. Wir können nun, um die Untersuchung der vorliegenden Frage zu vereinfachen, zwei solche Tangenten der Parabel als Träger zweier erzeugenden Punktreihen auswählen, für welche die projektivisch-ähnlichen Punktreihen projektivisch-gleich werden, also $\mathfrak{f}\mathfrak{x} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{x}_1$, was immer der Fall ist, sobald $\mathfrak{f}\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$. Verbinden wir den

Schnittpunkt zweier Tangenten $\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1$ mit der Mitte der Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$, so ist diese Verbindungslinie bekanntlich allemal ein Durchmesser, geht also bei der Parabel durch den unendlichentfernten Punkt derselben; soll nun $\mathfrak{f}\mathfrak{e} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$ sein, so muss die Berührungssehne $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ senkrecht stehen auf dem durch den Schnittpunkt $\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1$ gehenden Durchmesser der Parabel, also die ganze Schaar der zu $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ parallelen Sehnen, deren Mitten auf dem Durchmesser liegen, insbesondere auch die zu $\mathfrak{f}\mathfrak{e}_1$ parallele Tangente muss senkrecht stehen auf diesem durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmesser, oder wie wir oben gesehen haben, dieser Durchmesser muss die Axe der Parabel sein. Zwei solche Tangenten der Parabel, welche sich auf ihrer Axe treffen, sind daher als die Träger zweier projektivisch-gleicher Punktreihen aufzufassen, die die Parabel erzeugen. Wie die Axe der Parabel gefunden werden kann, wenn wir z. B. die Parabel als gezeichnet in der Ebene vorliegend annehmen, ergiebt sich aus dem Früheren: Irgend eine Reihe paralleler Sehnen hat ihre Mittelpunkte auf einem Durchmesser, ziehen wir eine zweite zu diesem Durchmesser senkrechte Reihe von parallelen Sehnen, so liegen ihre Mittelpunkte auf der gesuchten Axe; das dieser Axe zugehörige Punktsystem in Bezug auf die Parabel ist natürlich ein hyperbolisch-gleichseitiges, weil sein Mittelpunkt und ein Asymptotenpunkt im Unendlichen liegen; der andere endliche Asymptotenpunkt ist der Scheitel der Parabel. Die von irgend einem Punkte der Axe ausserhalb der Parabel an dieselbe gelegten beiden Tangenten bilden gleiche Winkel mit der Axe und haben ihre Berührungspunkte in gleichem Abstande von dem Schnittpunkte, woraus denn die vollkommene Symmetrie der Parabel in Bezug auf ihre Axe erhellt. Wir wollen nun denjenigen besonderen Punkt der Axe auswählen, für welchen das Tangentenpaar einen rechten Winkel bildet, der also schon zu dem gesuchten Orte gehört. Es giebt nur einen solchen und er wird leicht gefunden, indem wir die zur Axe unter $45^0$ geneigten Tangenten der Parabel aufsuchen, welche sich in diesem Punkte der Axe treffen. Diese besonderen beiden Tangenten sollen als Träger der die Parabel erzeugenden projektivisch-gleichen Punktreihen aufgefasst werden und es ist einleuchtend, dass sie ihrer eigenthümlichen Beschaffenheit wegen am einfachsten zur Beantwortung der vorliegenden Frage führen werden. In der That

sei (Fig. 48) $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}_1$ ihr Schnittpunkt und $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$ ihre Berührungspunkte, also $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f} = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}_1$ und $\angle\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1 = 90^0$, die Mitte der Berührungssehne $\mathfrak{f}\,\mathfrak{e}_1$ sei $F$, also $\mathfrak{f}_1 F$ die Axe der Parabel und $\mathfrak{e}F = F\mathfrak{f}$, weil

$$\angle\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{e}F = 45^0;$$



(Fig. 48.)

tragen wir ferner eine beliebige Strecke $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{f}$ aus auf $\mathfrak{f}\,\mathfrak{e}$ ab und die gleiche Strecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{x}_1$ von $\mathfrak{f}_1$ auf $\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_1$, so ist $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ eine Tangente der Parabel. Aus dieser Konstruktion geht die Kongruenz der Dreiecke $\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}F$ und $\mathfrak{f}_1\mathfrak{x}_1F$ hervor, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ($45^0$) gleich haben; es folgt daher $\mathfrak{x}F = \mathfrak{x}_1F$ und $\angle\,\mathfrak{x}F\mathfrak{x}_1 = 90^0$, also jeder der beiden andern Winkel des Dreiecks $\mathfrak{x}F\mathfrak{x}_1$ beträgt $45^0$. Nun treffen die Verlängerungen von $F\mathfrak{x}$ und $F\mathfrak{x}_1$ die Träger der erzeugenden beiden Punktreihen, weil $F$ auf der Berührungssehne liegt, in zwei neuen entsprechenden Punkten $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ (§ 21), deren Verbindungslinie ebenfalls eine Tangente der Parabel sein muss (was auch daraus unmittelbar erhellt, dass sich $\mathfrak{e}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{e}_1\,\mathfrak{y}_1$ ergiebt). Die vier Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ haben eine solche Lage in der Ebene, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, denn in dem Dreieck $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ steht $\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{x}_1$ auf $\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}$ senkrecht (in $\mathfrak{e}$), und auch $\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_1$ auf $\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}$ (in $F$), also ist $\mathfrak{x}_1$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$, und folglich steht auch $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ auf $\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ senkrecht, d. h. wir haben zwei neue zu einander senkrechte Tangenten der Parabel gefunden, die sich in $P$ treffen. Verändern wir die willkührlich angenommene Tangente $\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1$ der Parabel, so erhalten wir sämmtliche Paare rechtwinkliger Tangenten derselben und können nun leicht den Ort ihrer Schnittpunkte $P$ ermitteln. Da nämlich $\mathfrak{x}_1$ der Höhenpunkt des Dreiecks $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1$ ist, so liegen die vier Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_1P\,\mathfrak{e}$ auf einem Kreise und es ist $\angle\,P\mathfrak{e}\,\mathfrak{y}_1 = \angle\,P\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}_1 = 45^0$, also liegt $P$ auf derjenigen Halbirungslinie des Winkels zwischen den beiden Trägern, welche senkrecht auf der Parabelaxe steht; diese gerade Linie bleibt nun fest,

während wir die Tangente $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ verändern, und wir erhalten daher folgendes Resultat:

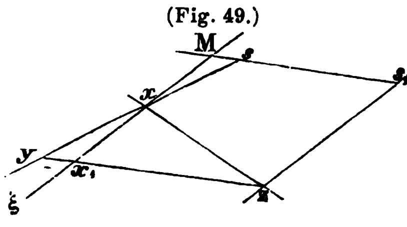
Der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel Tangentenpaare einer Parabel sind, ist eine gerade Linie, welche senkrecht steht auf der Axe der Parabel in demjenigen Punkte, durch welchen die beiden unter $45^0$ zur Axe geneigten Tangenten der Parabel sich treffen. Jeder Punkt dieser Geraden besitzt die Eigenschaft, dass das in Bezug auf die Parabel ihm zugehörige Strahlsystem ein hyperbolisch-gleichseitiges ist.

Wollen wir dieses Resultat mit dem für Ellipse und Hyperbel gefundenen in Uebereinstimmung bringen, so können wir die gefundene Gerade auch als einen Kreis mit unendlich-grossem Radius ansehen, was denn vollständig mit dem Umstande harmonirt, dass bei der Parabel die Längen der Axen unendlich gross sind, weil ihr Mittelpunkt im Unendlichen liegt.

Wir geben hier nicht auf weitere Eigenschaften der Parabel ein, welche sich aus der betrachteten Figur (Fig. 48) in ganz elementarer Weise ergeben, auch nicht auf die Bedeutung der gefundenen Geraden und des Punktes $F$, welche Pol und Polare in Bezug auf die Parabel sind (Leitlinie und Brennpunkt derselben), weil wir hierauf sogleich von anderer Seite kommen werden.

Nur eine Eigenschaft des gefundenen Ortskreises wollen wir noch berühren: Denken wir uns nämlich irgend ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt: $xyz$ (§ 30) und den Mittelpunkt $M$ desselben, ziehen $Mx$, welches der Polare $yz$ von $x$ in $x_1$ begegnen möge (Fig. 49), so ist $Mx \cdot Mx_1$ das konstante Rechteck (Potenz) des diesem Durchmesser des Kegelschnitts zugehörigen Punktsystems, also $= A^2$ oder $- A^2$, je nachdem $x$ und $x_1$ auf derselben oder entgegengesetzten Seite von

(Fig. 49.)




$M$ liegen; den konjugirten Durchmesser zu $Mx$ erhalten wir, indem wir durch $M$ eine Parallele zu $yz$ ziehen; wird diese Parallele von $xy$ in $s$ getroffen, so muss eine durch $z$ zu $Mx$ gezogene

Parallele dieselbe in dem konjugirten Punkte $s_1$ treffen, so dass $Ms \,.\, Ms_1$ das konstante Rechteck auf dem konjugirten Durchmesser ist für das Punktsystem, welches diesem Durchmesser in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört, also $= B^2$ oder $- B^2$, je nachdem der Durchmesser den Kegelschnitt trifft oder nicht. Für die Ellipse gelten die Werthe $A^2$ und $B^2$, für die Hyperbel $A^2$ und $- B^2$ oder $B^2$ und $- A^2$; in beiden Fällen aber ist die Summe konstant und zwar, wie wir gesehen haben, gleich dem Quadrate des Radius $R$ desjenigen Kreises, welcher als der Ort des Schnittpunktes zweier rechtwinkligen Tangenten des Kegelschnitts gefunden wurde, also:

$$Mx\,Mx_1 + Ms \,.\, Ms_1 = R^2.$$

Nun ist wegen der Parallelität:

$$\frac{Ms}{Mx} = \frac{x_1 y}{x_1 x} \quad \text{und} \quad Ms_1 = x_1 z,$$

also:

$$\frac{Ms \,.\, Ms_1}{Mx} = \frac{x_1 y \,.\, x_1 z}{x_1 x},$$

welcher Ausdruck sich leicht geometrisch ausdrücken lässt, indem wir durch $xyz$ einen Kreis legen und den andern Schnittpunkt $\xi$ der Geraden $x_1\,x$ mit diesem Kreise bestimmen, dann wird:

$$\frac{Ms \,.\, Ms_1}{Mx} = x_1 \xi \quad \text{oder} \quad Ms \,.\, Ms_1 = Mx \,.\, x_1 \xi;$$

nun ist aber allgemein:

$$x_1 \xi = M\xi - Mx_1,$$

also:

$$Ms \,.\, Ms_1 + Mx \,.\, Mx_1 = R^2 = Mx \,.\, M\xi$$

und da $Mx \,.\, M\xi$ die Potenz des Punktes $M$ in Bezug auf den um $xyz$ beschriebenen Kreis bedeutet, so folgt: **Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts hat in Bezug auf den einem beliebigen Tripel-Dreieck des Kegelschnitts umschriebenen Kreis immer dieselbe Potenz**, welche gleich ist dem Quadrate des Radius desjenigen Ortskreises, der die Schnittpunkte der rechtwinkligen Tangenten des Kegelschnitts enthält. Oder auch: **Der Ortskreis des Schnittpunktes der rechtwinkligen Tangenten eines Kegelschnitts schneidet jeden, einem beliebigen Tripel-Dreieck in Bezug auf den Kegelschnitt umschriebenen Kreis rechtwinklig.** In gleicher Weise ergiebt sich:

$$Mx \,.\, Mx_1 \,.\, Ms \,.\, Ms_1 \sin^2 \varphi = a^2 b^2,$$

wo $\varphi$ den Winkel der beiden konjugirten Durchmesser bezeichnet, oder wenn man mit $p_1 p_2 p_3$ die drei Perpendikel aus $M$ auf die Seiten des Tripel-Dreiecks bezeichnet, nach leichter Reduktion:

$$a^2 b^2 = p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{xy}{\sin(xzy)} = 2\, p_1 p_2 p_3 r,$$

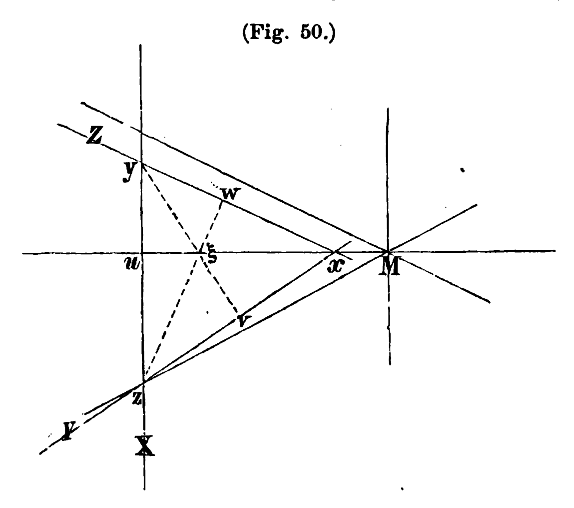
wo $r$ den Radius des dem Tripel-Dreieck umschriebenen Kreises bedeutet, da bekanntlich im Dreieck das Verhältniss einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich dem Durchmesser des umschriebenen Kreises ist. (Diese Theoreme sind von Faure in den Nouvelles Annales de Mathématiques tome XIX p. 234 und tome XX pag. 55 mitgetheilt worden.)

**§ 35. Bestimmung solcher Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts, für welche das zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem wird: Die Brennpunkte des Kegelschnitts.**

Da jedem Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts ein bestimmtes Strahlsystem in Bezug auf denselben zugehört, so bietet sich insbesondere die Frage nach solchen Punkten dar, deren Strahlsystem ein Kreissystem wird, bei welchem je zwei konjugirte Strahlen zu einander rechtwinklig sind. Solche Punkte müssen natürlich, falls sie vorhanden sind, innerhalb des Kegelschnitts liegen, d. h. es dürfen keine reellen Tangenten durch sie gehen, weil das Kreissystem ein besonderer Fall des elliptischen Strahlsystems ist. Wir können aber den Ort, wo wir sie überhaupt zu suchen haben, noch mehr beschränken, denn es ist leicht zu ersehen, dass sie nur auf den Axen des Kegelschnitts liegen können. Wäre $P$ irgend ein nicht auf einer Axe des Kegelschnitts liegender Punkt und $M$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts, so würde dem Durchmesser $PM$ ein konjugirter Durchmesser zugehören, der nicht zu ihm rechtwinklig wäre, und zögen wir durch $P$ zu diesem konjugirten Durchmesser eine Parallele, so hätten wir in $P$ zwei konjugirte Strahlen des dem Punkte $P$ zugehörigen Strahlsystems; diese wären also nicht zu einander rechtwinklig, folglich das Strahlsystem für $P$ kein Kreissystem. Wir haben mithin die Punkte von der verlangten Eigenschaft nur auf den Axen zu suchen und zwar nur auf denjenigen Abschnitten der Axen, welche von keiner Tangente getroffen werden (innerhalb des Kegelschnitts liegen). Sei $x$ ein beliebiger Punkt einer Axe des Kegelschnitts und $X$ seine Polare, die senk-

recht auf der Axe steht in $u$, dann wird das ganze dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem in folgender Weise erhalten: Wir ziehen einen beliebigen Strahl $Z$ durch $x$, welcher in $y$ die Polare $X$ treffe, und bestimmen den Pol $z$ von $Z$, welcher nothwendig auf $X$ liegt; während sich $Z$ bewegt, wird sich auch $xz = Y$ verändern und $YZ$ sind immer ein Paar konjugirte Strahlen des dem Punkte $x$ zugehörigen Strahlsystems (§ 30); $y$ und $z$ sind gleichzeitig ein Paar konjugirte Punkte des der Geraden $X$ zugehörigen Punktsystems, dessen Mittelpunkt offenbar $u$ ist (Fig. 50);

(Fig. 50.)




der Strahl $xu$ und die auf ihm Senkrechte durch $x$ sind die Axen des Strahlsystems für den Punkt $x$; wenn nun die beiden konjugirten Strahlen $Y$ und $Z$ auch zu einander rechtwinklig wären, so hätte das Strahlsystem für $x$ zwei Paar Axen und wäre mithin ein Kreissystem (§ 17). Dies ist aber für einen beliebig auf der Axe angenommenen Punkt $x$ nicht der Fall und wir werden solche Punkte aufzusuchen haben, welche diese Eigenschaft darbieten. Verfolgen wir das dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem und das mit ihm perspektivisch liegende der Polare $X$ zugehörige Punktsystem $(y, z)$, so ist, weil $u$ der Mittelpunkt desselben:

$$uy \,.\, uz = \text{const.}$$

In dem Dreieck $xyz$ ist $xu$ eine Höhe, die beiden andern Höhen $yv$ und $zw$ schneiden sich daher in einem Punkte $\xi$ der ersteren,

d. h. der Axe des Kegelschnitts, und wir haben wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$yu \,.\, uz = u\xi \,.\, ux = \text{const.},$$

folglich wird, wie wir auch das Punktenpaar $y$, $z$ auf der Polare verändern, der Höhenpunkt $\xi$ des Tripel-Dreiecks $xyz$ unverändert bleiben; also haben wir den Satz gefunden:

Irgend ein fester Punkt $x$ einer Axe des Kegelschnitts kann als ein Eckpunkt von unendlich vielen Tripeln in Bezug auf den Kegelschnitt angesehen werden, dessen beide andern Eckpunkte $yz$ auf der Polare $X$ von $x$ sich bewegen; der Höhenpunkt dieser sämmtlichen Tripel-Dreiecke $xyz$ ist ein und derselbe feste Punkt $\xi$ und liegt ebenfalls auf der Axe des Kegelschnitts, auf welcher $x$ angenommen ist.

Da ferner die Punkte $v$ und $w$, die Fusspunkte der beiden aus $y$ und $z$ gefällten Höhen, die Eigenschaft besitzen, dass $vx$ und $vy$ konjugirte Strahlen sind, ebenso $wx$ und $wz$ und zugleich rechtwinklig auf einander stehen, so folgt, dass es die Axen der den Punkten $v$ und $w$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Strahlsysteme sind. Die Punkte $x$ und $\xi$ besitzen also die Eigenschaft, dass für jeden Punkt $P$ des über $x\xi$ als Durchmesser beschriebenen Kreises die Strahlen $Px$ und $P\xi$ die Axen des dem Punkte $P$ in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Strahlsystems sind. Geht insbesondere durch $x$ (oder $\xi$) eine Tangente des Kegelschnitts, deren Pol der Berührungspunkt $P_0$ ist, so muss $P_0\xi$ (oder $P_0x$) senkrecht auf der Tangente stehen, d. h. die Normale in $P_0$ sein; die Punkte $x$ und $\xi$ besitzen also auch die Eigenschaft, dass sie die Durchschnittpunkte von Tangente und Normale eines gewissen Kegelschnittspunktes mit der in Betracht gezogenen Axe sind, natürlich auch des andern zu der Axe symmetrisch liegenden Kegelschnittpunktes.

Verändern wir jetzt den Punkt $x$ auf der Axe des Kegelschnitts, so verändert sich mit ihm auch $\xi$. Wenn nun einmal das dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem wäre, so müsste das Dreieck $yxz$ bei $x$ rechtwinklig werden, oder der Höhenpunkt $\xi$ müsste mit dem Eckpunkt $x$ zusammenfallen, und umgekehrt, wenn der Höhenpunkt eines Dreiecks mit einem Eckpunkte zusammenfällt, so ist das Dreieck rechtwinklig. Wir werden also zunächst zu untersuchen haben, wie sich der Punkt $\xi$

mit dem Punkte $x$ verändert, und dann nachsehen, ob und wie oft es vorkommt, dass $x$ und $\xi$ zusammenfallen; diejenigen Punkte, bei denen dies eintritt, sind von der gesuchten Beschaffenheit, dass das ihnen zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem wird. Um zu dem Punkte $x$ den Punkt $\xi$ zu finden, haben wir nur nöthig, einen beliebigen Strahl $Z$ durch $x$ zu ziehen und aus dem Pol $z$ ein Perpendikel auf $Z$ zu fällen, welches die Axe in $\xi$ trifft. Der durch $x$ gezogene Strahl $Z$ ist übrigens willkührlich; halten wir der Einfachheit wegen, indem wir $x$ fortrücken, die Richtung von $Z$ fest, d. h. lassen es beständig sich parallel bleiben, so wird der Pol $z$ auf dem zu dieser Richtung konjugirten Durchmesser $Mz$ sich bewegen, die Senkrechte $zw$ bleibt auch sich parallel, also das Verhältniss $\frac{Mz}{M\xi} = \text{const.}$ Die Polare $X$ von $x$ bleibt auch beständig sich parallel, folglich auch das Verhältniss $\frac{Mu}{Mz}$ konstant, mithin auch $\frac{Mu}{M\xi} = \text{const.}$ Nun sind aber $x$ und $u$ konjugirte Punkte des der Axe zugehörigen Punktsystems, dessen Mittelpunkt $M$ ist, daher:

$$Mx \,.\, Mu = \text{const.} \; (= a^2 \text{ oder } b^2)$$

und es ergiebt sich hieraus, dass auch das Rechteck $Mx \,.\, M\xi$ constant bleibt:

$$Mx \,.\, M\xi = \text{const.}$$

oder, was dasselbe sagt, dass die Punkte $x$ und $\xi$ konjugirte Punkte eines neuen auf der Axe befindlichen Punktsystems sind, dessen Asymptotenpunkte, wenn es hyperbolisch ist, die gesuchten Punkte sind, deren dem Kegelschnitt zugehöriges Strahlsystem ein Kreissystem wird. Es giebt also im Allgemeinen auf jeder der beiden Axen zwei solche Punkte und es bleibt nur noch zu untersuchen, ob dieselben reell vorhanden, d. h. die in der angegebenen Weise auf den Axen des Kegelschnitts konstruirten beiden neuen Punktsysteme hyperbolisch oder elliptisch sind. Da der Mittelpunkt des Kegelschnitts $M$ auch für diese beiden neuen Punktsysteme Mittelpunkt ist, so ist nur zu untersuchen, ob ein solches auf einer der Axen befindliches Punktenpaar $x, \xi$ durch $M$ getrennt wird, oder nicht; im ersten Falle wird das Punktsystem elliptisch, im zweiten hyperbolisch sein. Um aber ein Punktenpaar $x, \xi$ zu erhalten, haben wir nach dem Vorigen nur nöthig, in irgend einem in der Ebene des Kegelschnitts ge-

wählten Punkte $P$ die Axen des Strahlsystems zu bestimmen, welches dem $P$ zugehört; diese Axen treffen eine Kegelschnittaxe in zwei Punkten $x$, $\xi$ des neuen Punktsystems auf ihr; denn lassen wir umgekehrt die Punkte $x$, $\xi$ das ganze neue Punktsystem durchlaufen und beschreiben jedesmal über $x\xi$ als Durchmesser einen Kreis, dessen Punkte $P$ die oben hervorgehobene Eigenschaft besitzen, so erhalten wir eine Kreisschaar, welche die ganze Ebene stetig erfüllt, und durch jeden beliebigen Punkt $P$ der Ebene giebt es nur einen Kreis der Schaar. Wir schliessen hieraus beiläufig folgenden Satz:

Denkt man sich in sämmtlichen Punkten der Ebene die Axen der ihnen in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Strahlsysteme ermittelt, so schneidet jedes Axenpaar die eine (oder andere) Axe des Kegelschnitts in zwei Punkten $x$, $\xi$, deren Gesammtheit ein Punktsystem auf dieser Axe konstituirt, von welchem $x$, $\xi$ allemal ein Paar konjugirte Punkte sind.

Hieraus folgt nothwendig, dass die in dieser Weise auf beiden Axen erhaltenen neuen Punktsysteme verschiedener Natur sein müssen, nämlich das eine hyperbolisch und das andere elliptisch. Denn wenn die Schenkel eines rechten Winkels $P$ die Schenkel eines andern rechten Winkels $M$ in zwei Punktenpaaren $x$, $\xi$ und $x^1\xi^1$ durchbohren, so können nicht auf den Schenkeln des letzteren 1) gleichzeitig $x$, $\xi$ durch $M$ getrennt werden und auch $x^1\xi^1$, ebenso wenig können 2) gleichzeitig $x$ und $\xi$ auf derselben Seite von $M$ in dem einen Schenkel liegen und auch $x^1$ und $\xi^1$ auf derselben Seite von $M$ in dem andern Schenkel, sondern es müssen 3) wenn $x\xi$ durch $M$ getrennt werden, $x^1$ und $\xi^1$ auf derselben Seite von $M$ liegen, oder 4) wenn $x$ und $\xi$ auf derselben Seite von $M$ liegen, $x^1$ und $\xi^1$ durch $M$ getrennt werden. Dies lehrt die unmittelbare Anschauung; folglich muss das neue Punktsystem auf der einen Kegelschnittaxe elliptisch, auf der andern hyperbolisch sein; bei dem letzteren existiren nur zwei reelle Asymptotenpunkte und wir erhalten daher als Antwort auf die vorgelegte Frage folgenden Satz:

Es giebt nur zwei reelle Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts, für welche das ihm zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem wird; diese liegen auf einer der beiden Axen des Kegelschnitts gleich weit vom Mittel-

punkte nach beiden Seiten hin abstehend; sie heissen die „Brennpunkte" des Kegelschnitts.

Wir gelangen nach dem Vorigen zu den Brennpunkten auch durch folgende Konstruktion:

Tangente und Normale in sämmtlichen Punkten eines Kegelschnitts treffen sowohl die eine, als auch die andere Axe desselben in Punktenpaaren $x$, $\xi$, welche auf jeder ein Punktsystem konstituiren, von dem $x$ und $\xi$ immer ein Paar konjugirte Punkte sind, und welches den Mittelpunkt des Kegelschnitts zugleich zu seinem Mittelpunkte hat; von diesen beiden Punktsystemen ist das eine elliptisch, das andere hyperbolisch; die Asymptotenpunkte des letzteren sind die Brennpunkte des Kegelschnitts, d. h. die einzigen reellen Punkte in der Ebene desselben, welche die Eigenschaft besitzen, dass das ihnen in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem ist.

Suchen wir nun näher bei den drei Gattungen von Kegelschnitten die Lage der Brennpunkte zu ermitteln, so zeigt sich zunächst bei der Parabel, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, das äusserst einfache Verhalten, dass das Punktsystem ($x$, $\xi$) auf der Axe der Parabel ein hyperbolisch-gleichseitiges wird, also der eine Asymptotenpunkt desselben mit dem Mittelpunkte im Unendlichen liegt und nur der andere Asymptotenpunkt im Endlichen bleibt; d. h. die Parabel hat nur einen (endlichen) Brennpunkt, nämlich:

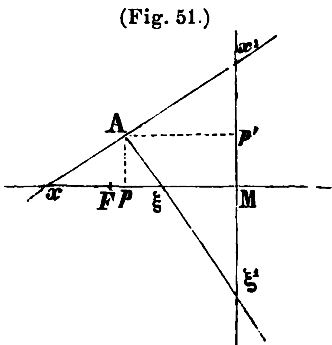
Tangente und Normale in sämmtlichen Punkten der Parabel treffen die Axe derselben in je zwei Punkten $x\xi$, deren Abstand durch ein und denselben festen Punkt, den Brennpunkt der Parabel halbirt wird.

Der zweite Brennpunkt der Parabel liegt im Unendlichen mit dem Mittelpunkt und dem unendlich-entfernten Parabelpunkt vereinigt; die zweite Axe der Parabel ist die unendlich-entfernte Gerade selbst; das auf ihr hervorgerufene Punktsystem ($x$, $\xi$) ist elliptisch.

Um bei Ellipse und Hyperbel die Lage der Brennpunkte zu bestimmen, denken wir uns in irgend einem Kegelschnittpunkte

$A$ die Tangente und Normale, welche die eine Kegelschnittsaxe in $x$ und $\xi$, die andere in $x^1$ und $\xi^1$ treffen mögen (Fig. 51).

(Fig. 51.)




Liegen nun $x$ und $\xi$ auf derselben Seite von $M$, so müssen $x^1$ und $\xi^1$ durch $M$ getrennt werden; es wird also das Punktsystem $(x, \xi)$ auf der Axe $Mx$ hyperbolisch sein und die Asymptotenpunkte desselben $F$ und $F_1$ oder die Brennpunkte des Kegelschnitts werden auf dieser Axe liegen, während das Punktsystem $(x^1, \xi^1)$ auf der andern Axe elliptisch ist. Bezeichnen wir den Abstand der beiden Brennpunkte $FF_1 = 2c$, also $MF = c$, so ist:

$$Mx \,.\, M\xi = c^2;$$

$2c$ heisst die Excentricität des Kegelschnitts und lässt sich leicht ausdrücken durch die Längen der Axen desselben. Fällen wir nämlich von $A$ die Perpendikel $Ap$ und $Ap^1$ auf die Axen, so sind $p\,x$ und $p^1\,x^1$ zwei Paare konjugirter Punkte der den Axen in Bezug auf den Kegelschnitt zugehörigen Punktsysteme; diese sind bei der Ellipse beide hyperbolisch, bei der Hyperbel ist eines hyperbolisch, das andere elliptisch; sei das hyperbolische auf der Axe $Mx$ befindlich, so haben wir sowohl für Ellipse, als auch für Hyperbel

$$Mp \,.\, Mx = a^2,$$

da $p$ und $x$ auf derselben Seite von $M$ liegen müssen; dagegen

$$Mp^1 \,.\, Mx^1 = b^2 \text{ für die Ellipse}$$

und

$$Mp^1 \,.\, Mx^1 = -\, b^2 \text{ für die Hyperbel,}$$

weil im ersten Falle $p^1$ und $x^1$ auf derselben Seite von $M$ liegen (wie in der Figur 51, die also den Fall der Ellipse voraussetzt), im zweiten Falle dagegen $p^1$ und $x^1$ durch $M$ getrennt werden. Nun zeigt die Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$\frac{Mx}{Mp} = \frac{Mx^1}{p^1 x^1} \text{ und } \frac{M\xi}{Mp} = \frac{M\xi^1}{p^1 \xi^1},$$

woraus einmal, weil:

$$Mp^2 = \xi^1 p^1 \,.\, p^1 x^1 \text{ ist,}$$

$$Mx \,.\, M\xi = \xi^1 M \,.\, M x^1 = c^2 \text{ folgt,}$$

und zweitens

$$Mx \cdot Mp = Mx^1 \cdot \xi^1 p^1$$
$$= Mx^1 (\xi^1 M + Mp^1) \quad \text{also}$$
$$Mx \cdot Mp - Mx^1 \cdot Mp^1 = c^2.$$

Wir erhalten also:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{für die Ellipse}$$
$$\text{und} \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{für die Hyperbel.}$$

Hieraus geht hervor, dass die Brennpunkte der Ellipse auf der grösseren Axe der Ellipse liegen, weil $a^2 - b^2 = c^2 > o$, also $a > b$ sein muss, und dass sie erhalten werden, wenn wir um einen der Schnittpunkte der kleineren Axe der Ellipse mit dem Radius $a$ der grösseren Halbaxe einen Kreis schlagen, welcher die grössere Axe in den gesuchten Brennpunkten $F$ und $F_1$ treffen wird, während ein mit dem Radius $b$ der kleineren Halbaxe um einen der Scheitel der andern Axe geschlagener Kreis die letztere nicht treffen kann. Für $a = b$ wird die Ellipse ein Kreis und die beiden Brennpunkte jener fallen mit dem Kreismittelpunkte zusammen ($c = o$). Zweitens sehen wir, dass bei der Hyperbel die Brennpunkte auf derjenigen Axe liegen, welche dieselbe in zwei reellen Punkten, ihren Scheiteln, trifft und dass wir sie erhalten, indem wir in den Scheiteln die Tangenten ziehen, die Schnittpunkte derselben mit den Asymptoten der Hyperbel bestimmen und mit der Entfernung eines dieser Punkte von $M$ um den Mittelpunkt der Hyperbel einen Kreis schlagen, welcher die erste Axe in den gesuchten Brennpunkten $F$ und $F_1$ trifft. Dass das Punktsystem $(x^1, \xi^1)$ auf derjenigen Axe der Hyperbel, welche dieselbe nicht trifft, elliptisch sein muss, geht auch a priori daraus hervor, dass diese ganz in das Bereich der Tangenten der Hyperbel fällt, also jedem ihrer Punkte ein hyperbolisches Strahlsystem zugehört, mithin kein Kreissystem vorkommen kann.

Wir haben vorhin eines Kreises erwähnt, welcher über der Strecke $x\xi$ als Durchmesser beschrieben werden kann; da nun das Punktenpaar $x\xi$ ein ganzes Punktsystem durchläuft, so bilden alle diese Kreise eine Kreisschaar, deren Centrale eine Kegelschnittaxe ist. Beschreiben wir anderseits auch über $x^1\xi^1$ als Durchmesser einen Kreis, so erhalten wir eine zweite Kreisschaar, welche die andere Kegelschnittaxe zur Centrale hat; diese beiden Kreisschaaren sind konjugirte Kreisschaaren, d. h. jeder Kreis der einen Schaar schneidet jeden der andern rechtwinklig,

denn diejenigen beiden Kreise, welche (Fig. 51) über $x\xi$ und $x^1\xi^1$ als Durchmesser beschrieben werden, haben den Punkt $A$ gemein und die von den Mittelpunkten dieser beiden Kreise nach $A$ hin gehenden Radien stehen offenbar senkrecht auf einander. Jede dieser beiden Kreisschaaren hat die Centrale der andern zur Potenzlinie*) (gemeinschaftlichen Sekante), und zwar die eine eine ideelle, die andere eine reelle gemeinschaftliche Sekante, d. h. die Kreise der einen Schaar ($x$, $\xi$) treffen die Potenzlinie nicht, die Kreise der andern Schaar ($x^1$ $\xi^1$) gehen sämmtlich durch dieselben beiden festen Punkte $F$ und $F_1$, welches die „Grenzpunkte" der ersten Kreisschaar sind, und haben also $FF_1$ zur reellen gemeinschaftlichen Sekante. Hiernach können wir den Satz aussprechen:

Die beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts und die Schnittpunkte von Tangente und Normale in irgend einem Kegelschnittpunkte mit derjenigen Axe, auf welcher die Brennpunkte nicht liegen, befinden sich allemal auf einem Kreise; woraus denn auch eine Konstruktion der Brennpunkte sich ergiebt. Bei der Parabel geht die eine der beiden konjugirten Kreisschaaren in eine Schaar concentrischer Kreise über und die andere Kreisschaar zerfällt.

Anmerkung. Wir können in gewissem Sinne von drei Axen eines Kegelschnitts sprechen, indem wir zu den beiden eigentlichen Axen die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$ hinzufügen und also das Tripel konjugirter Strahlen, deren zwei die eigentlichen Axen des Kegelschnitts sind, vervollständigen; dann würde also der Kegelschnitt drei Mittelpunkte haben, von denen zwei im Unendlichen liegen und sechs Brennpunkte, nämlich die Doppelpunkte der drei Punktsysteme ($x$, $\xi$) auf den drei Axen; von diesen Punktsystemen, welche entstehen durch die Schnittpunkte ($x$, $\xi$) sämmtlicher Axenpaare aller dem Kegelschnitt zugehörigen Strahlsysteme in der Ebene, sind aber immer zwei elliptisch und nur eines hyperbolisch, also von den sechs Brennpunkten nur zwei reell. Wir erwähnen diese Auffassung, weil sie bei manchen geometrischen Untersuchungen zur Aufklärung von Paradoxen dient, die sonst nicht erklärt werden können. Beim sphärischen Kegel-

*) Siehe Steiner: Einige geometrische Betrachtungen, Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik., Bd. I S. 161 ff.

schnitt z. B. treten diese drei Axen, weil das Operationsfeld der Kugel keine unendlich-entfernten Punkte besitzt, ganz bestimmt hervor. — Wir können uns auch auf der unendlich-entfernten Geraden ein Punktsystem denken, welches ihr in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; dies wird bestimmt durch das dem Mittelpunkte des Kegelschnitts zugehörige Strahlsystem (der konjugirten Durchmesser) und ist elliptisch, wenn der Kegelschnitt Ellipse, hyperbolisch, wenn er Hyperbel ist, wo dann die Asymptoten des Kegelschnitts durch die Asymptotenpunkte jenes Punktsystems auf $G_\infty$ gehen. Da insbesondere beim Kreise das System der konjugirten Durchmesser ein Kreissystem ist, d. h. aus lauter Paaren rechtwinkliger Strahlen besteht, so wird für jeden Kreis in der Ebene auf $G_\infty$ dasselbe Punktsystem bestimmt; da nun die Asymptotenpunkte dieses Punktsystems immer die Schnittpunkte der $G_\infty$ mit dem Kegelschnitt sind, so können wir in gewissem Sinne sagen: Alle Kreise der Ebene gehen durch dieselben beiden imaginären Punkte der unendlich-entfernten Geraden, d. h. für uns nichts anderes als: Das der unendlich-entfernten Geraden für alle Kreise der Ebene zugehörige Punktsystem ist identisch dasselbe, elliptische. Die beiden imaginären Kreispunkte auf der unendlich-entfernten Geraden werden in neuerer Zeit häufig bei geometrischen Untersuchungen benutzt und gewähren auch bei analytischer Behandlung einen wesentlichen Nutzen; sie sind aufzufassen als die imaginären Asymptotenpunkte des ein für alle Mal fest bestimmten Punktsystems auf der unendlich-entfernten Geraden, welches von allen unendlich-entfernten Punktenpaaren gebildet wird, die in je zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen. Nach der obigen Erweiterung sind also die beiden imaginären Kreispunkte auf der unendlich-entfernten Geraden als ein Paar imaginäre Brennpunkte für jeden beliebigen Kegelschnitt in der Ebene aufzufassen.

## § 36. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte, welche sich auf ihre Brennpunkte beziehen.

Die eigenthümliche Beschaffenheit der Brennpunkte führt zu sehr einfachen Eigenschaften der Kegelschnitte, welche zu den ältesten und bekanntesten gehören. Wir wollen die hauptsächlichsten derselben hier nur kurz aus unserer Definition der Brenn-

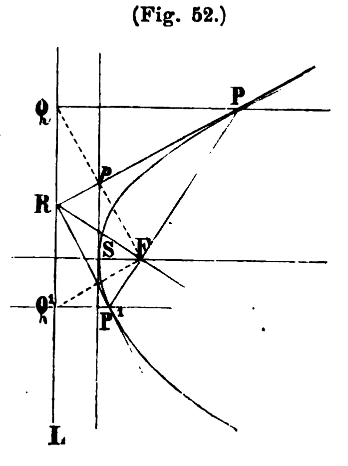
punkte ableiten. Da das Punktsystem ($x$, $\xi$), dessen Asymptotenpunkte die Brennpunkte $FF_1$ des Kegelschnitts sind, durch Tangente und Normale sämmtlicher Kegelschnittpunkte $P$ auf der Axe, welche die Brennpunkte enthält, fixirt wird, so bilden die Tangente und Normale irgend eines Punktes $P$ des Kegelschnitts und die beiden Strahlen $PF$, $PF_1$ nach den Brennpunkten hin vier harmonische Strahlen, und da Tangente und Normale als zugeordnete Strahlen auf einander senkrecht stehen, so halbiren sie (§ 8) die Winkel zwischen den Strahlen $PF$ und $PF_1$, also erhalten wir den Satz:

Die Tangente (und Normale) in jedem Punkte des Kegelschnitts bildet gleiche Winkel mit den beiden Strahlen, welche von diesem Punkte nach den Brennpunkten des Kegelschnitts gehen.

Hieraus erklärt sich (wenigstens für Ellipse und Parabel) der Name Brennpunkte, indem nach dem bekannten Reflexionsgesetz die von einem Brennpunkte des Kegelschnitts ausgehenden Strahlen, welche an der Peripherie des Kegelschnitts reflektirt werden, in dem andern sich wieder vereinigen. Bei der Parabel werden alle von dem (endlichen) Brennpunkte ausgehende Strahlen durch dieselbe parallel zur Axe reflektirt, weil der zweite Brennpunkt im Unendlichen liegt. Ueberhaupt gestalten sich die Fokaleigenschaften bei der Parabel am einfachsten und wir wollen sie daher zuerst kurz ableiten. Das dem Brennpunkte zugehörige Strahlsystem der Parabel ist ein Kreissystem; bestimmen wir die Polare des Brennpunktes, welche Leitlinie (Direktrix) der Parabel heisst und um ein gleiches Stück, wie der Brennpunkt von dem Scheitel der Parabel nach entgegengesetzter Seite hin absteht (weil das der Axe zugehörige Punktsystem auch ein hyperbolisch-gleichseitiges ist), ausserdem in diesem Punkte senkrecht auf der Axe steht, so wird die Verbindungslinie irgend eines Punktes $R$ der Leitlinie mit dem Brennpunkt $F$ senkrecht stehen auf der durch $F$ gehenden Polare von $R$; diese schneidet aber die Parabel in zwei reellen Punkten $P$ und $P^1$, weil der Brennpunkt $F$ innerhalb der Parabel liegt, und $RP$ und $RP^1$ sind die Tangenten in diesen Parabelpunkten. Ziehen wir durch $P$ eine Parallele zur Axe und schneidet dieselbe die Leitlinie in $Q$ (Fig. 52), so halbirt nach dem Vorigen die Tangente $PR$ den Winkel $FPQ$; $PQ$ steht aber senkrecht auf der Leitlinie $L$, folg-

lich sind die beiden Dreiecke $RPQ$ und $RPF$, weil sie alle Winkel gleich haben und eine Seite $RP$ gemeinschaftlich, kongruent; mithin ist $PF = PQ$; dasselbe gilt vom Punkte $P^1$ und überhaupt von allen Punkten der Parabel, da wir $R$ auf der Leitlinie fortrücken können. Hieraus ergiebt sich die bekannte Entstehungsweise der Parabel:

(Fig. 52.)




Alle Punkte der Ebene, welche von einem festen Punkte $F$ und einer festen Geraden $L$ gleich weit abstehen, liegen auf einer Parabel, welche $F$ zum Brennpunkt und $L$ zur Leitlinie hat.

Da ferner $RF = RQ = Q^1R$ und $FQ$ senkrecht auf $RP$ steht und durch diese Gerade halbirt wird in $p$, wie aus der Figur hervorgeht, so wird bei der Bewegung von $R$, weil $Q$ auf der festen Geraden $L$ sich bewegt und immer $Fp = \frac{1}{2} FQ$ ist, der Punkt $p$ sich auf einer mit $L$ parallelen Geraden, welche den Abstand des Brennpunktes $F$ von $L$ halbirt, fortbewegen; diese Gerade ist die Tangente im Scheitel $S$ der Parabel und $p$ der Fusspunkt eines vom Brennpunkte auf eine beliebige Tangente gefällten Perpendikels, also:

Die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf sämmtliche Tangenten der Parabel gefällten Perpendikel liegen auf einer Geraden, der Tangente im Scheitel, oder:

Wenn ein rechter Winkel sich so in der Ebene bewegt, dass sein Scheitel auf einer festen Geraden fortrückt und der eine Schenkel durch einen festen Punkt läuft, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel.

Hieraus ergeben sich einfache Konstruktionen der Punkte und Tangenten der Parabel, sobald dieselbe durch Brennpunkt und Leitlinie gegeben ist, auf deren Ausführung wir hier nicht eingehen wollen.

Da ferner $\angle\, QRP = \angle\, PRF$ und ebenso $\angle\, Q^1RP^1 = \angle P^1RF$ und $QRQ^1$ in gerader Linie liegen, so ist $\angle\, PRP^1 = 90^0$, also die Leitlinie der Parabel ist der Ort des Schnittpunktes aller rechtwinkligen Tangentenpaare derselben (§ 34).

Die Konstruktion des Tangentenpaares aus einem beliebigen Punkte $O$ an die Parabel ergiebt sich leicht aus dem Vorigen, weil irgend ein Punkt einer Tangente gleich weit absteht vom Brennpunkte wie vom Fusspunkte des aus dem Berührungspunkte auf die Leitlinie herabgelassenen Perpendikels; ein um $O$ mit der Entfernung $OF$ geschlagener Kreis trifft mithin die Leitlinie im Allgemeinen in zwei Punkten $Q$ und $Q^1$ und die beiden Perpendikel aus $O$ auf die Geraden $QF$ und $Q^1F$ sind also die Tangenten aus $O$ an die Parabel. Die mannichfachen Folgerungen hieraus und die Eigenschaften der Parabel, welche sich aus der Gleichheit der in der Figur auftretenden Winkel ergeben, wollen wir hier gleichfalls übergehen, zumal die wesentlichsten, bei Ellipse und Hyperbel ganz gleich lautenden dort noch kurz angeführt werden sollen; es liegt überhaupt nicht in unserer Absicht, diesen ganz elementaren Weg für die Ableitung der Eigenschaften der Kegelschnitte weiter zu verfolgen, sondern nur die Brücke herzustellen, welche von den allgemeinsten Eigenschaften des Kegelschnitts aus zu diesen besonderen hinüberführt.

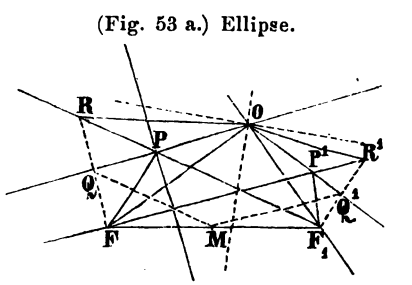
Seien $F$ und $F_1$ die beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts (Ellipse oder Hyperbel) und $P$ irgend ein Punkt desselben, so müssen, wie wir gesehen haben, die Tangente und Normale in $P$ die Winkel zwischen den Radien-vektoren nach den Brennpunkten hin $PF$ und $PF_1$ halbiren; es bleibt aber zweifelhaft, welche von den beiden Halbirungslinien Tangente und welche Normale ist. Diese beiden Halbirungslinien unterscheiden sich wegen der bekannten Eigenschaft von vier harmonischen Strahlen dadurch von einander, dass die eine zwischen $F$ und $F_1$ hindurchgeht, die andere beide Brennpunkte auf derselben Seite von sich hat. Fassen wir denjenigen Halbirungsstrahl, welcher zwischen $F$ und $F_1$ hindurchgeht, als Tangente auf, den andern als Normale, so ist der Kegelschnitt nothwendig Hyperbel, weil jede Tangente der Hyperbel die reelle Axe zwischen ihren beiden Scheiteln trifft, mithin a fortiori auch zwischen den Brennpunkten; im andern Falle ist der Kegelschnitt nothwendig Ellipse, weil jede Tangente

derselben die Axe ausserhalb ihrer beiden Scheitel trifft, mithin a fortiori auch ausserhalb der beiden Brennpunkte. In dem einen, wie im andern Falle ist der Kegelschnitt vollständig und eindeutig bestimmt, wie wir sogleich sehen werden; also:

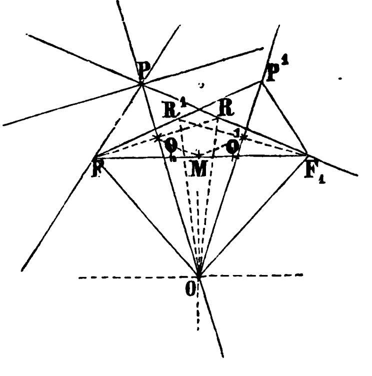
Es giebt zwei Kegelschnitte, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und dieselben gegebenen Brennpunkte haben; diese beiden Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig in dem gegebenen Punkte und der eine ist Hyperbel, der andere Ellipse (oder beide Parabeln, wenn ein Brennpunkt im Unendlichen liegt), woraus wir allgemein schliessen: Alle Kegelschnitte, welche dieselben Brennpunkte haben (konfokal sind), schneiden sich in denjenigen Punkten, in welchen sie sich treffen, rechtwinklig.

Wir wollen nun in Fig. 53a und Fig. 53b die beiden Fälle der Ellipse und Hyperbel von einander trennen. In der ersten Figur ist also die Halbirungslinie des Winkels $FPF_1$, welche zwischen $FF_1$ hindurchgeht, die Normale, die Halbirungslinie des Nebenwinkels die Tangente der Ellipse. Fällen wir von $F$ ein Perpendikel $FQ$ auf die Tangente, welches in $R$ den Strahl $PF_1$ trifft, so ist $PF = PR$ wegen der Kongruenz der Dreiecke $PFQ$ und $PRQ$; jeder Punkt der Tangente steht gleich weit von $F$ und $R$ ab. Nehmen wir einen beliebigen Punkt $O$ der Tangente, so ist die andere durch ihn gehende Tangente vollkommen bestimmt, denn das dem Punkte $O$ zugehörige Strahlsystem in Bezug auf den Kegelschnitt hat zu seinen Asymptoten das Tangentenpaar aus $O$, die Axen dieses Strahlsystems sind aber die Halbirungslinien der Winkel zwischen den Tangenten und diese Axen treffen,

(Fig. 53 a.) Ellipse.




(Fig. 53 b.) Hyperbel.



wie wir allgemein eingesehen haben, immer in einem solchen Punktenpaar $(x, \xi)$ die Kegelschnittsaxe, welches mit den Brennpunkten $FF_1$ harmonisch liegt; folglich sind die Axen des Strahlsystems $O$ mit den beiden Strahlen $OF$ und $OF_1$ harmonisch gelegen, und da jene senkrecht auf einander stehen, so sind es die Halbirungslinien der Winkel zwischen den Strahlen $OF$ und $OF_1$, also: Die Halbirungslinien der Winkel des von einem beliebigen Punkte $O$ an den Kegelschnitt gelegten Tangentenpaars und die Halbirungslinien der Winkel des von $O$ nach den Brennpunkten $FF_1$ hingehenden Strahlenpaares fallen zusammen. Stellen wir also diese Halbirungslinien her, so ist die andere durch $O$ gehende Tangente unzweideutig bestimmt; sie bildet denselben Winkel mit $OF_1$, wie die erste mit $OF$ und liegt natürlich so, dass sie wieder $F$ und $F_1$ auf derselben Seite von sich hat; um den Berührungspunkt $P^1$ auf ihr zu ermitteln, haben wir einen solchen Punkt derselben zu suchen, dass $P^1F$ und $P^1F_1$ gleiche Winkel mit ihr bilden, d. h. wir fällen aus $F_1$ das Perpendikel $F_1Q^1$ auf die Tangente, verlängern es über $Q^1$ um sich selbst bis $R^1$, ziehen $FR^1$ und suchen den Schnittpunkt $P^1$ der letzten Geraden mit der Tangente auf, so ist er offenbar der gesuchte Berührungspunkt. Verändern wir nun den willkührlichen Punkt $O$ auf der als gegeben angenommenen ersten Tangente, so erhalten wir sämmtliche Tangenten und sämmtliche Punkte derselben durch diese Konstruktion unzweideutig bestimmt; also der Kegelschnitt ist vollständig und eindeutig bestimmt durch seine beiden Brennpunkte und eine Tangente, was denn auch a priori vorauszusehen war, weil jeder Brennpunkt, dessen dem Kegelschnitt zugehöriges Strahlsystem ein Kreissystem (also bekannt) ist, und zu seinen imaginären Asymptoten das Tangentenpaar an den Kegelschnitt hat, die Stelle von zwei gegebenen Tangenten vertritt und bekanntlich fünf Tangenten den Kegelschnitt eindeutig bestimmen (§ 20).

Halten wir nun die erste als gegeben angenommene Tangente fest und verändern den Punkt $O$ auf ihr, so ergeben sich viele bekannte Eigenschaften des Kegelschnitts; zunächst weil $OF = OR$ und $OF_1 = OR^1$, ferner $\angle ROF_1 = \angle FOR^1$, sind die Dreiecke $ROF_1$ und $FOR^1$ kongruent, also $RF_1 = FR^1$, d. h. weil $RP = FP$ und $R^1P^1 = F_1P^1$ in Fig. 53a, haben wir:

$$FP + F_1P = FP^1 + F_1P^1,$$

wenn wir also den Punkt $O$ auf der ersten Tangente verändern, so bleibt die Summe der Radienvektoren aller Punkte der Ellipse $(P^1)$ nach den beiden Brennpunkten hin konstant; diese Summe ist nun, wenn der Ellipsenpunkt insbesondere einer der Scheitel wird, $= 2a$, der grösseren Axe der Ellipse, folglich:

Der Ort aller solcher Punkte in der Ebene, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten $F$ und $F_1$ denselben Werth hat, ist eine Ellipse, deren beide Brennpunkte $F$ und $F_1$ und deren grosse Axe gleich der konstanten Summe ist.

Etwas anders gestaltet sich diese Eigenschaft bei der Hyperbel (Fig. 53b) wegen der Lage der Tangenten, welche alle zwischen $F$ und $F_1$ hindurchgehen. Auch hier sind in gleicher Weise die Dreiecke $ROF_1$ und $FOR^1$ kongruent, folglich $FR^1 = RF_1$, d. h. hier $PF_1 - PF = P^1F - P^1F_1$, also

$$P^1F - P^1F_1 = \text{const.}$$

Der Ort aller derjenigen Punkte in der Ebene, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten $F$ und $F_1$ denselben (absoluten) Werth hat, ist eine Hyperbel, deren beide Brennpunkte $F$ und $F_1$ sind und deren reelle Axe gleich der konstanten Differenz ist. Die beiden Zweige der Hyperbel unterscheiden sich dadurch von einander, dass für die Punkte des einen der Werth der konstanten Differenz entgegengesetzt ist dem für die Punkte des andern Zweiges.

Die konstante Summe oder Differenz ist durch die Länge $RF_1 = FR^1 = 2a$ gegeben; da $Q$ die Mitte von $RF$ und $M$ die Mitte von $FF_1$, so ist $MQ = MQ^1 = a$; $Q$ und $Q^1$ sind die Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten herabgelassenen Perpendikel; wir erhalten daher den für Ellipse und Hyperbel gleichlautenden Satz:

Die Fusspunkte der aus den Brennpunkten auf die Tangenten eines Kegelschnitts herabgelassenen Perpendikel liegen auf einem Kreise, welcher die grosse Axe der Ellipse oder die reelle Axe der Hyperbel zu seinem Durchmesser hat, also den Kegelschnitt in zweien seiner Scheitel berührt (Fusspunktskreis).

Bei der Parabel geht der Fusspunktskreis in die Tangente am

Scheitel über. Bei Ellipse und Hyperbel liefert diese Eigenschaft des Fusspunktskreises ein bequemes Mittel zur Zeichnung dieser Kurven, da sie sich so aussprechen lässt:

Bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einem Kreise und läuft der eine Schenkel desselben durch einen festen Punkt, so umhüllt der andere Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, und dieser Punkt ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts.

Fällen wir aus $F_1$ ein Perpendikel auf die Tangente in $P$, so liegt sein Fusspunkt, wie leicht zu erkennen, auf demselben Kreise und das Rechteck aus diesen beiden Perpendikeln ist konstant, weil es der Potenz des einen (oder andern) Brennpunktes in Bezug auf den Fusspunktskreis gleich ist; diese Potenz ist für die Hyperbel $= c^2 - a^2 = b^2$ positiv, weil die Brennpunkte ausserhalb des Fusspunktskreises liegen, für die Ellipse $c^2 - a^2 = -b^2$ negativ, weil die Brennpunkte innerhalb des Fusspunktskreises liegen; abgesehen von der Lage können wir den Satz so aussprechen:

Das Rechteck aus den Abständen der Brennpunkte von einer Tangente des Kegelschnitts ist von konstantem Inhalt für alle Lagen der Tangente.

Aus der Kongruenz der Dreiecke $ROF_1$ und $FOR^1$ folgt auch die Gleichheit der Winkel $ORF_1$ und $OFR^1$ oder $OFP$ und $OFP^1$, d. h.

Von einem Brennpunkt des Kegelschnitts aus gesehen erscheinen die Stücke auf zwei Tangenten von ihrem Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten unter gleichem Winkel (oder Nebenwinkel), oder anders ausgesprochen: Der Strahl von einem Brennpunkt nach dem Schnittpunkt eines Tangentenpaares ist immer ein Halbirungsstrahl der Winkel zwischen den beiden von demselben Brennpunkte nach den Berührungspunkten hingehenden Strahlen.

**Hieraus folgt**, wenn wir eine dritte veränderliche Tangente das feste Tangentenpaar durchschneiden lassen und für jeden der beiden Schnittpunkte den vorigen Satz in Anwendung bringen, der allgemeinere Satz:

Das von zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts

auf einer veränderlichen dritten abgeschnittene Stück erscheint, von einem Brennpunkt aus gesehen, immer unter demselben Winkel (oder Nebenwinkel). Dieser Winkel ist insbesondere gleich demjenigen, unter welchem die Stücke auf den beiden festen Tangenten vom Schnittpunkt bis zu den Berührungspunkten, aus demselben Brennpunkte gesehen, erscheinen. Denken wir uns umgekehrt die beiden festen Tangenten, den Brennpunkt und die Grösse des konstanten Winkels gegeben, so ist der Kegelschnitt vollständig und eindeutig dadurch bestimmt und wir können den vorigen Satz so umkehren:

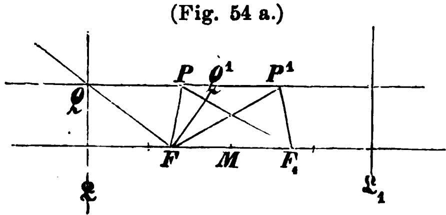
Dreht sich ein Winkel von unveränderlicher Grösse um seinen festen Scheitel $F$ und begegnen die Schenkel $x x_1$ zwei festen Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ resp. in den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, so hüllt die Verbindungslinie $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ einen Kegelschnitt ein, welcher die beiden Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ berührt und den Punkt $F$ zu einem seiner Brennpunkte hat.

Hieraus folgt die Bestätigung einer früher (§ 20, Anmerkung) ausgesprochenen Behauptung; seien $B$ und $B_1$ zwei projektivische Strahlbüschel in perspektivischer Lage, $e$ und $e_1$ die in der Verbindungslinie der Mittelpunkte vereinigten Strahlen und $\mathfrak{A}$ der perspektivische Durchschnitt, auf welchem sich je zwei entsprechende Strahlen $x x_1$ treffen; denken wir uns nun die so hergestellte projektivische Beziehung der beiden Strahlbüschel $B B_1$ ungeändert, halten die Mittelpunkte $B B_1$ selbst fest und drehen die beiden in sich festen Strahlbüschel der Art um ihre Mittelpunkte, dass wir nach einander andere und andere entsprechende Strahlenpaare auf der Verbindungslinie $B B_1$ vereinigen, wodurch immer neue perspektivische Lagen derselben beiden Strahlbüschel hervorgerufen werden; fragen wir nach dem Ort, welchen der jedesmalige perspektivische Durchschnitt umhüllt? Um diese Frage zu beantworten, fixiren wir zwei beliebige Strahlenpaare $a a_1$ und $b b_1$ der beiden Strahlbüschel und suchen den Ort des Schnittpunktes $(a, a_1)$ und ebenso $(b, b_1)$ bei der beschriebenen eigenthümlichen Drehung. Vereinigen wir $x$ und $x_1$ auf der Verbindungslinie $B B_1$, so möge $a$ in $a^1$ und $a_1$ in ${}^{\prime}a_1{}^1$ übergehen, also sind die Winkel $(x, a)$ und $(e, a^1)$ gleich; während also $x$ sich verändert, beschreibt $a^1$ ein gleiches Strahlbüschel, ebenso ist $(x_1, a_1) = (e_1, a_1{}^1)$, also beschreibt $a_1{}^1$ ein mit $x_1$ gleiches Strahlbüschel; da $x$ und $x_1$ zwei perspektivische

Strahlbüschel beschreiben, so sind die von $a^1$ und $a_1{}^1$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch und liegen perspektivisch, weil, wenn $x$ nach $e$ kommt, auch $x_1$ auf $e_1$ fällt, also in $ee_1$ oder $BB_1$ zwei entsprechende $a^1 a_1{}^1$ zusammenfallen; der Ort des Schnittpunktes $(a^1 a_1{}^1)$ ist also eine bestimmte Gerade $\mathfrak{A}^1$. In gleicher Weise ist der Ort des Schnittpunktes $(b^1 b^1)$ eine bestimmte Gerade $\mathfrak{B}^1$; die Verbindungslinie zweier solcher Schnittpunkte $(a^1 a_1{}^1)$ und $(b^1 b_1{}^1)$ ist jederzeit einer der gesuchten perspektivischen Durchschnitte; wo also die festen Geraden $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{B}^1$ resp. von den Schenkeln des festen um $B$ sich drehenden Winkels $(ab)$ getroffen werden, haben wir zwei Punkte, deren Verbindungslinie den gesuchten Ort umhüllt. Nach dem obigen Satze ist dieser Ort ein Kegelschnitt, welcher $B$ (und ebenso $B_1$) zum Brennpunkte hat.

Wir unterlassen es, auf die mannichfachen Beziehungen hier einzugehen, welche aus der Gleichheit der Winkel an den Brennpunkten gefolgert werden können, und wollen nur noch eine allgemeine Eigenschaft des Kegelschnitts angeben, welche aus der Grundeigenschaft der Brennpunkte hervorgeht und eine analoge Entstehungsweise von Ellipse und Hyperbel liefert, wie wir sie bei der Parabel durch Brennpunkt und Leitlinie gefunden haben. Konstruiren wir nämlich auch hier die Polaren der beiden Brennpunkte und nennen jede die dem Brennpunkt zugehörige Leitlinie des Kegelschnitts, so stehen dieselben, wenn $FF_1$ die Brennpunkte und $M$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts ist, in denjenigen beiden Punkten senkrecht auf der Axe, deren Abstand von $M$ gleich $\frac{a^2}{c}$ ist; also bei der Ellipse $(a > c)$ treffen sie die Axe auserhalb der beiden Brennpunkte, bei der Hyperbel $(a < c)$ zwischen den beiden Brennpunkten. Nehmen wir im Fall der Ellipse (Fig. 54a) einen beliebigen Punkt $P$ derselben und ziehen eine Parallele zur Axe $MF$, welche die dem Brennpunkt $F$ zugehörige Leitlinie $\mathfrak{L}$ in $Q$ treffen möge, so wird, weil das dem Brennpunkt $F$ zugehörige

(Fig. 54 a.)




Strahlsystem ein Kreissystem ist, der konjugirte Strahl zu $FQ$ senk-

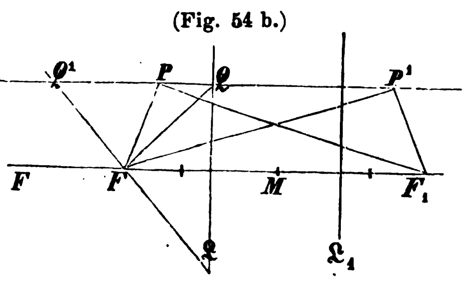
recht auf diesem stehen; er treffe in $Q^1$ die Parallele $PQ$, dann sind $Q$ und $Q^1$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt; die Gerade $PQ$ trifft den Kegelschnitt noch in einem zweiten Punkte $P^1$, welcher offenbar symmetrisch zu der durch $M$ gehenden zweiten Kegelschnittaxe liegt, weil $PQ$ parallel der ersten läuft, und die vier Punkte $PP^1QQ^1$ sind harmonisch, weil $Q$ und $Q^1$ konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind. Die vier von $F$ nach $PP^1QQ^1$ gehenden Strahlen sind also auch harmonisch, und da zwei zugeordnete $FQ$ und $FQ^1$ auf einander rechtwinklig stehen, so halbiren sie die Winkel zwischen den Strahlen $FP$ und $FP^1$; folglich gilt nach bekannten elementaren Sätzen des Dreiecks $PFP^1$ die Beziehung:

$$\frac{FP}{FP^1} = \frac{QP}{QP^1} = \frac{PQ^1}{Q^1P^1} \text{ für die Ellipse (Fig. 54 a),}$$

$$= \frac{PQ}{QP^1} = \frac{Q^1P}{Q^1P^1} \text{ für die Hyperbel (Fig. 54 b),}$$

weil im ersten Fall $FQ$ den Nebenwinkel und $FQ^1$ den eigentlichen Winkel $PFP^1$ halbirt, im andern Fall gerade umgekehrt, wie sich aus der Lage der Leitlinie zu den Kegelschnittspunkten und Brennpunkten ergiebt. Nun ist aber $FP^1$ der Symmetrie wegen gleich $F_1P$, also

(Fig. 54 b.)




$$\frac{FP}{F_1P} = \frac{QP}{QP^1} \text{ für die Ellipse,}$$

und da $FP + F_1P = 2a$, also

$$\frac{FP + F_1P}{FP} = \frac{QP + QP^1}{QP}$$

$QP + QP^1$ ist gleich dem Abstand der beiden Leitlinien $= 2\frac{a^2}{c}$,

also

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{c}{a} = \text{const. } (< 1).$$

$$\frac{FP}{F_1P} = \frac{PQ}{QP^1} \text{ für die Hyperbel,}$$

$$PF_1 - PF = 2a,$$

$$\frac{PF_1 - PF}{PF} = \frac{QP^1 - PQ}{PQ}$$

$QP^1 - PQ$ ist gleich dem Abstand der beiden Leitlinien $= 2\frac{a^2}{c}$,

also

$$\frac{PF}{PQ} = \frac{c}{a} = \text{const. } (> 1).$$

Für alle Punkte des Kegelschnitts ist also das Verhältniss ihrer Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leit-

linie konstant $(=\frac{c}{a})$, und zwar für die Ellipse $< 1$ und für die Hyperbel $> 1$, für die Parabel, wie wir vorhin gesehen haben, $= 1$; wir können daher folgende allemein gültige Eigenschaft aller drei Kegelschnittsgattungen aussprechen:

Der Ort aller derjenigen Punkte in der Ebene, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem gegebenen unveränderlichen Verhältnisse zu einander stehen, ist ein Kegelschnitt, welcher den Punkt zu einem Brennpunkt und die Gerade zu der ihm zugehörigen Leitline hat; der Kegelschnitt ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Werth des gegebenen Verhältnisses $> 1$, $= 1$ oder $< 1$ ist.

## § 37. Der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte.

Obwohl die Bestimmung des Krümmungshalbmessers eigentlich nicht in das Gebiet von Untersuchungen deskriptiver Art, mit denen wir es vorzugsweise zu thun haben, gehört, so glauben wir doch eine von Steiner angegebene Konstruktion des Krümmungshalbmessers für den Kegelschnitt nicht unterdrücken zu dürfen, weil dieselbe zu den einfachsten und elegantesten gehört und wesentlich auf der Entstehung des Kegelschnitts durch projektivische Gebilde, insbesondere auf der Erzeugung der Parabel durch projektivisch-ähnliche Punktreihen beruht.

Unter Krümmungshalbmesser versteht man bekanntlich diejenige Strecke auf der Normale einer Kurve, welche von ihrem Fusspunkte bis zu dem Schnittpunkt der unendlich-nahen Normale reicht, und die Grenzlage des Schnittpunkts zweier unendlich-naher Normalen heisst der Krümmungsmittelpunkt; der um ihn mit dem Krümmungshalbmesser als Radius beschriebene Kreis der Krümmungskreis; er ist unter allen Kreisen, welche in dem Punkte der Kurve dieselbe Tangente haben, derjenige, welcher sich ihr am nächsten anschliesst, sie in diesem Punkte zugleich berührt und schneidet oder durch drei unendlich-nahe Punkte der Kurve geht. Der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers heisst die Krümmung der Kurve und dient als Maass für dieselbe.

Für den Kegelschnitt sind aus dieser allgemeinen Definition verschiedene Konstruktionen des Krümmungshalbmessers abgeleitet

worden; diejenige, welche hier mitgetheilt werden soll, ist für Ellipse und Hyperbel ganz gleichartig und modificirt sich nur wenig für den Fall der Parabel; wir fassen zunächst den ersten Fall auf: Nach § 33 (1) trifft die Normale eines Punktes $A$ der Ellipse die beiden Axen in zwei solchen Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, dass das Verhältniss der Abschnitte $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{b^2}{a^2}$ konstant ist und die beiden Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf derselben Seite von $A$ liegen; bei der Hyperbel liegen die beiden Schnittpunkte auf entgegengesetzten Seiten vom Hyperbelpunkte und das Verhältniss der Abschnitte $\frac{\mathfrak{A}A}{A\mathfrak{B}} = \frac{b^2}{a^2}$ ist ebenfalls konstant (1'). Diese Eigenschaft der Normale zeigt unmittelbar in dem einen wie in dem andern Fall, dass, wenn wir in zwei beliebigen Punkten $A$ und $A^1$ die Normalen konstruiren, welche die Axen des Kegelschnitts in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^1$ treffen, allemal $\frac{A\mathfrak{A}}{A\mathfrak{B}} = \frac{A^1\mathfrak{A}^1}{A^1\mathfrak{B}^1}$ sein muss, dass also die beiden Normalen durch die Sehne $AA^1$ und die Kegelschnittaxen projektivisch-ähnlich geschnitten werden, und hieraus folgt:

Die Normalen in zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnitts, die Sehne derselben und die beiden Axen sind allemal fünf Tangenten einer Parabel.

Dies ist schon eine Eigenschaft der Parabel, welche durch vier Tangenten vollständig bestimmt wird; die unendlich-entfernte Gerade nämlich, welche Tangente jeder Parabel ist, darf als fünfte ein für alle Mal gegebene Tangente angesehen werden und fünf Tangenten bestimmen den Kegelschnitt. Aus diesem Satze folgt nun, wenn wir den einen Kegelschnittpunkt $A$ festhalten und mit dem andern allmählich in ihn hineinrücken, wobei die Sehne $AA^1$ in die Tangente für $A$ übergeht, und die beiden zusammenfallenden Normalen zu ihrem Schnittpunkt den Berührungspunkt mit derjenigen Parabel haben, welche Tangente und Normale, sowie die beiden Kegelschnittaxen berührt, folgender Satz:

Hat man in einem Punkte des Kegelschnitts Tangente und Normale konstruirt, so giebt es eine bestimmte Parabel, welche dieselben und die beiden Kegelschnittaxen berührt; der Berührungspunkt mit der Normale ist der Krümmungsmittelpunkt für den angenommenen Punkt des Kegelschnitts.

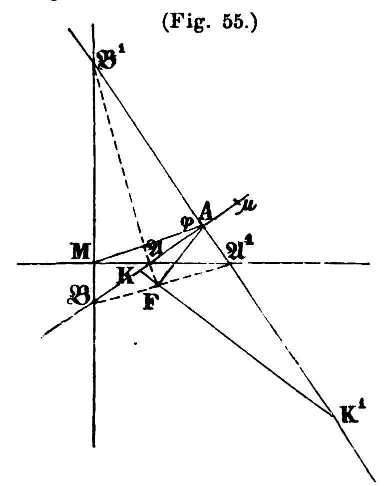
Hieraus ergiebt sich nun eine sehr einfache Konstruktion

des Krümmungsmittelpunktes, denn Tangente und Normale in $A$ sind ein Paar rechtwinklige Tangenten dieser Parabel und die beiden Kegelschnittsaxen, welche sich im Mittelpunkte $M$ schneiden, sind ebenfalls ein Paar rechtwinklige Tangenten, folglich ist $MA$ die Leitlinie der Parabel und ihr Pol in Bezug auf die Parabel der Brennpunkt derselben; da aber $MA$ eine Diagonale des von den vier Tangenten der Parabel gebildeten Vierseits ist, so ist ihr Pol bekanntlich der Schnittpunkt der beiden andern Diagonalen, d. h. $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^1, \mathfrak{A}^1\mathfrak{B})$; bezeichnen wir diesen Schnittpunkt mit $F$, so ist jetzt der Krümmungsmittelpunkt leicht zu finden, da die Polare von $A$ durch $F$ geht und senkrecht auf $AF$ stehen muss, zugleich aber die Normale des Kegelschnitts in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte (dem Berührungspunkte der Parabel) trifft; wir haben hiernach folgende Konstruktion:

Treffen Tangente und Normale eines Punktes $A$ des Kegelschnitts die eine Axe desselben in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^1$, die andere in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^1$, verbindet man sodann den Schnittpunkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^1, \mathfrak{A}^1\mathfrak{B}) = F$$

mit $A$ und errichtet in $F$ eine Senkrechte auf dieser Verbindungslinie, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkte.



(Fig. 55.)

Die in $F$ auf $FA$ errichtete Senkrechte (Fig. 55) trifft $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in $K$ und $A\mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^1$ in $K^1$; liegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ auf derselben Seite von $A$, so ist der Kegelschnitt Ellipse und $K$ der Krümmungsmittelpunkt derselben auf der in $A$ errichteten Normalen $A\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Liegen dagegen die beiden Schnittpunkte der Normale mit den Kegelschnittsaxen auf entgegengesetzten Seiten von $A$, wie hier $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{B}^1$, so ist der Kegelschnitt Hyperbel und $K^1$ der Krümmungsmittelpunkt derselben. Zugleich folgt hieraus ein einfacher Ausdruck für den Werth des Krümmungshalbmessers; die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^1\mathfrak{B}^1$

liegen nämlich so, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern bestimmten Dreiecks ist, und die drei Punkte $AMF$ sind die Fusspunkte der Höhen oder die drei Diagonalpunkte jenes vollständigen Vierecks; aus der Gleichheit der Winkel folgt daher die Aehnlichkeit der Dreiecke $AF\mathfrak{A}$ und $A\mathfrak{B}M$, mithin:

$$\frac{A\mathfrak{A}}{AF} = \frac{AM}{A\mathfrak{B}} \quad \text{oder} \quad A\mathfrak{A} \,.\, A\mathfrak{B} = AM \,.\, AF.$$

Nun ist, wenn wir den Halbmesser $MA = A$ setzen und die Länge des konjugirten Halbmessers mit $B$ bezeichnen: (§ 33)

$$A\mathfrak{A} \,.\, A\mathfrak{B} = B^2,$$

also

$$FA = \frac{B^2}{A}.$$

Da aber $FK$ senkrecht auf $FA$ steht und der Winkel $AKF$ gleich ist dem Winkel zwischen den beiden konjugirten Halbmessern $A$ und $B$, welchen wir mit $\varphi$ bezeichnen wollen, so folgt der Krümmungshalbmesser $r$ im Punkte $A$:

$$r \,.\, \sin \varphi = \frac{B^2}{A}.$$

Benutzen wir die Relation (I.) § 33 für die konjugirten Durchmesser $AB \,.\, \sin \varphi = ab$, so können wir den Krümmungshalbmesser auch so ausdrücken:

$$r = \frac{B^3}{a.b},$$

und hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Die Krümmungshalbmesser für zwei solche Punkte der Ellipse, welche Endpunkte zweier konjugirten Durchmesser sind, verhalten sich umgekehrt wie die Kuben der diesen Punkten zugehörigen Durchmesser.

Die Werthe für die Krümmungshalbmesser in den Scheiteln der Ellipse sind, da $\varphi = 90^0$ wird, $\frac{b^2}{a}$ und $\frac{a^2}{b}$.

Die Benutzung der zweiten Relation für die konjugirten Durchmesser der Ellipse $A^2 + B^2 = a^2 + b^2$ (§ 33) führt zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft des Krümmungshalbmessers. Der Winkel $\varphi$ ist derjenige, welchen der Halbmesser $MA$ mit der Tangente in $A$ bildet; dieser Halbmesser bildet mit der Normale die Winkel $90^0 - \varphi$ und $90^0 + \varphi$ und zwar ersteren

mit dem Theil der Normale, welcher den Krümmungsmittelpunkt enthält, und letzteren mit dem nach aussen verlängerten Theil der Normale; nun ist:

$$A^2 + A \, . \, r \sin \varphi = a^2 + b^2 = A^2 - 2 A \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos (90^0 + \varphi);$$

denken wir uns mithin auf das nach aussen verlängerte Stück der Normale eine Strecke $A\mu = \frac{r}{2}$ aufgetragen, so ist:

$$M\mu^2 = MA^2 + A\mu^2 - 2 \, MA \, . \, A\mu \, . \cos (90^0 + \varphi), \quad \text{also}$$

$$M\mu^2 - \frac{r^2}{4} = a^2 + b^2 \quad \text{oder}$$

$$M\mu^2 = a^2 + b^2 + \frac{r^2}{4}.$$

Nun ist (§ 34) $\sqrt{a^2 + b^2}$ gleich dem Radius desjenigen Kreises, welcher der Ort der Scheitel aller der Ellipse umschriebenen rechten Winkel ist; es muss daher derjenige Kreis, welcher um $\mu$ mit dem halben Krümmungshalbmesser als Radius beschrieben wird, jenen Ortskreis um $M$ rechtwinklig schneiden, weil die Summe der Quadrate ihrer Radien gleich dem Quadrate des Abstandes ihrer Mittelpunkte ist; wir erhalten hiernach folgende Eigenschaft des Krümmungshalbmessers:

Wenn man die Krümmungsradien eines gegebenen Kegelschnitts, jeden nach entgegengesetzter Seite hin um sich selbst verlängert und über den Verlängerungen, als Durchmesser, Kreise beschreibt, so schneiden alle diese Kreise jenen Ortskreis rechtwinklig, welcher die Scheitel sämmtlicher dem Kegelschnitt umschriebenen rechten Winkel enthält.*)

Dass diese für die Ellipse nachgewiesene Eigenschaft in ganz gleicher Weise bei der Hyperbel stattfindet, braucht nicht erst erläutert zu werden; den Fall der Parabel behandeln wir nachträglich.

Bezeichnen wir den Ortskreis der Scheitel aller dem Kegelschnitt umschriebenen rechten Winkel mit $K^{(2)}$, so kommt es hiernach, um den Krümmungsradius für einen gegebenen Punkt $A$ des Kegelschnitts zu finden, nur darauf an, einen Kreis zu kon-

*) Steiner: „Ueber eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte", Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XXX S. 271.

struiren, welcher den Kegelschnitt in $A$ berührt und den Ortskreis $K^{(2)}$ rechtwinklig schneidet; der Durchmesser eines solchen Kreises wird gleich dem Krümmungshalbmesser für den Punkt $A$ sein, und wenn man den Durchmesser dieses Kreises über $A$ hinaus um sich selbst verlängert, so erhält man den Krümmungshalbmesser seiner Grösse und Lage nach. Diese Aufgabe ist aber ganz elementar; bezeichnen wir mit $R$ den Radius des Ortskreises $K^{(2)}$, so ist nach dem Obigen

$$\mu M^2 - \mu A^2 = R^2,$$

fällen wir aus $\mu$ ein Perpendikel auf $MA$, dessen Fusspunkt $\mu^1$ sei, so ist auch

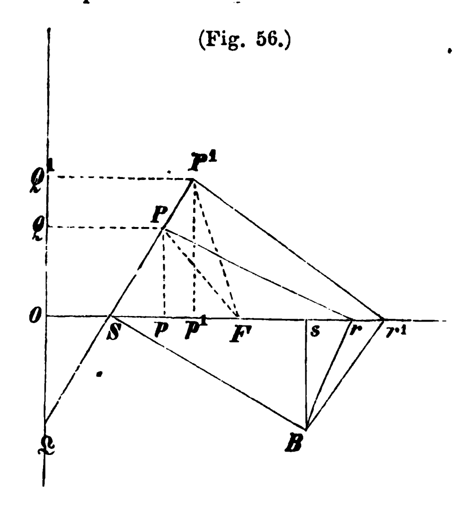
$$(\mu^1 M)^2 - (\mu^1 A)^2 = R^2 \quad \text{also}$$
$$(\mu^1 M + R)\,(\mu^1 M - R) = (\mu^1 A)^2,$$

also $\mu^1$ die Mitte zwischen dem Punkte $A$ und dem Fusspunkt seiner Polare in Bezug auf den Kreis $K^{(2)}$; die Polare selbst steht senkrecht auf $MA$, steht doppelt so weit von $A$ ab, wie $\mu^1$, trifft also $A\mu$ in einem Punkte $B$, für welchen $AB = 2A\mu$, d. h. der Krümmungshalbmesser ist. Mithin erhalten wir folgende Konstruktion für den Krümmungshalbmesser:

In dem Punkte $A$ des Kegelschnitts errichte man die Normale, konstruire die Polare von $A$ in Bezug auf den Ortskreis $K^{(2)}$; sie treffe die Normale in $B$, dann ist $AB$ gleich der Länge des Krümmungshalbmessers und die nach der entgegengesetzten Seite hin abgetragene Strecke $AK = AB$ hat zu ihrem Endpunkt den Krümmungsmittelpunkt.

Wir übergehen die geringe Modifikation, welche eintritt, wenn für den Fall der Hyperbel der Ortskreis $K^{(2)}$ imaginär ist, (wo man sich dann des Ortskreises der konjugirten Hyperbel zu bedienen und einen Kreis zu suchen hat, welcher von diesem im Durchmesser geschnitten wird) und wollen nur noch für die Parabel die analoge Konstruktion des Krümmungshalbmessers ableiten. Hier lässt uns die Eigenschaft der Normale, dass das Verhältniss ihrer Abschnitte durch die Axen konstant bleibt, im Stich, weil eine der Axen im Unendlichen liegt. An die Stelle tritt eine andere Eigenschaft der Normale einer Parabel, welche unmittelbar aus der Entstehung derselben durch Brennpunkt und Leitlinie hervorgeht.

Sei $P$ ein beliebiger Punkt der Parabel (Fig. 56), deren Brennpunkt $F$ und Leitlinie $\mathfrak{L}$ ist, sei $Q$ der Fusspunkt des aus $P$ auf die Leitlinie gefällten Perpendikels, also




(Fig. 56.)

$$PQ = PF,$$

so halbirt die Tangente in $P$ die Strecke $FQ$ und steht auf ihr senkrecht; folglich wird die Normale in $P$ parallel $FQ$ sein; trifft daher diese Normale die Parabelaxe in $r$, so muss $Fr = QP$, oder wenn wir aus $P$ das Perpendikel $Pp$ auf die Axe der Parabel fällen und mit $O$ den Punkt der Leitlinie bezeichnen, in welchem die Axe sie trifft, $Op = Fr$; hieraus folgt, wenn wir das Stück $pF$ auf beiden Seiten hinzufügen, $OF = pr =$ const., d. h.

Das aus einem Punkte der Parabel auf die Axe gefällte Perpendikel und die Normale dieses Parabelpunktes schneiden auf der Axe immer dasselbe Stück aus, welches gleich dem Abstande des Brennpunktes von der Leitlinie ist.

Konstruiren wir für einen zweiten Punkt $P^1$ der Parabel die Normale $P^1r^1$ und das Perpendikel auf die Axe $P^1p^1$, so ist also $pr = p^1r^1$, oder $pp^1 = rr^1$; trifft nun die Parabelsehne $PP^1$ die Axe in $S$ und wir denken uns um das Dreieck $PSr$ einen Kreis beschrieben, bestimmen den dem Punkte $P$ diametral gegenüberliegenden Punkt $B$ dieses Kreises, so wird das aus $B$ auf die Axe gefällte Perpendikel dieselbe in $s$ treffen, so dass $Sp = sr$ ist; der dem $P$ diametral gegenüberliegende Punkt $B$ wird nun erhalten, indem wir in $S$ auf $SP$ und in $r$ auf $rP$ Perpendikel errichten, die sich in $B$ schneiden, und das aus $B$ auf die Axe gefällte Perpendikel trifft sie in demjenigen Punkte $s$, für welchen $sr = Sp$ der Grösse und Lage nach wird. Hieraus schliessen wir umgekehrt, dass, wenn wir denjenigen Punkt $s$ auf der Axe bestimmen, für welchen der Grösse und Lage nach $sr = Sp$ ist,

sodann in $s$ auf der Axe und in $S$ auf $SP$ ein Perpendikel errichten, der Schnittpunkt $B$ derselben auch in demjenigen Perpendikel liegen muss, welches in $r$ auf $rP$ errichtet wird. Da nun $pp^1 = rr^1$, also $Sp^1 = sr^1$, so folgt aus dem Vorigen, dass auch das in $r^1$ auf $r^1P^1$ errichtete Perpendikel durch denselben Punkt $B$ gehen muss. Es finden sich also die vier Scheitel von rechten Winkeln $Ssrr^1$ in einer Geraden und von den Schenkelpaaren läuft je einer durch den festen Punkt $B$; die vier andern umhüllen daher (§ 36) eine Parabel, welche $B$ zum Brennpunkte und die Gerade $Ss$ zur Tangente im Scheitel $s$ hat; wir haben demnach folgenden Satz:

Die Normalen in zwei beliebigen Punkten einer Parabel, die Parabelsehne zwischen denselben und die Parabelaxe sind vier Tangenten einer bestimmten neuen Parabel, welche die Axe der ersten zur Tangente am Scheitel, ihren unendlich-entfernten Punkt also in einer rechtwinkligen Richtung zu derjenigen hat, in welcher der unendlich-entfernte Punkt der gegebenen Parabel liegt.

Dieser Satz ist vollkommen gleichlaufend zu dem oben für Ellipse und Hyperbel aufgestellten; aus ihm geht die Konstruktion des Krümmungshalbmessers für einen Punkt der Parabel hervor, wenn wir jetzt die beiden Normalen einander unendlich-nahe rücken. Die Parabelsehne geht dann in die Tangente über und der Schnittpunkt der beiden unendlich nahen Normalen, d. h. der Berührungspunkt mit der neuen Parabel wird der Krümmungsmittelpunkt, also:

Hat man in einem Punkte der Parabel Tangente und Normale konstruirt, so giebt es eine völlig bestimmte neue Parabel, welche diese beiden Geraden berührt und die Parabelaxe zu ihrer Tangente am Scheitel hat; diese zweite Parabel berührt die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

Dass die Parabel in der That vollständig und eindeutig bestimmt ist, sobald von ihr die Tangente am Scheitel und zwei beliebige andere Tangenten gegeben sind, die Tangente am Scheitel also die Stelle von zwei Tangenten vertritt, geht daraus hervor, dass durch die Tangente am Scheitel zugleich der unendlich-entfernte Punkt der Parabel gegeben und dieser der

Berührungspunkt auf der unendlich-entfernten Geraden ist; es geht aber auch daraus hervor, dass das in dem Schnittpunkte jeder Tangente mit der Scheiteltangente auf der ersteren errichtete Perpendikel durch den Brennpunkt geht und durch zwei solche Perpendikel der Brennpunkt bestimmt wird. Die Konstruktion des Krümmungsradius für einen Punkt der Parabel ergiebt sich aus dem letzten Satze sehr einfach: Da nämlich die Tangente und Normale des gegebenen Parabelpunktes $A$ ein Paar rechtwinklige Tangenten der Hülfsparabel sind, so liegt $A$ in der Leitlinie derselben, und da die in den Schnittpunkten von Tangente und Normale mit der Axe der gegebenen Parabel auf jenen errichteten Perpendikel sich in dem Brennpunkte $B$ der Hülfsparabel schneiden, so wird $AB$ durch die Axe der gegebenen Parabel halbirt; der Halbirungspunkt ist aber, wie leicht zu erkennen, nichts anderes, als der Brennpunkt $F$ der Parabel, weil er auch das Stück der Axe halbirt, welches durch Tangente und Normale ausgeschnitten wird; das in $B$ auf $BA$ errichtete Perpendikel trifft die Normale in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt, dessen Konstruktion sich also folgendermassen gestaltet:

Um für einen Punkt $A$ einer Parabel den Krümmungshalbmesser zu finden, konstruire man die Normale in $A$, verbinde $A$ mit dem Brennpunkt $F$ und verlängere $AF$ über $F$ hinaus um sich selbst bis $B$, errichte in $B$ auf $AB$ ein Perpendikel, welches in $K$ der Normale begegnet, dann ist $K$ der Krümmungsmittelpunkt und $AK$ der Krümmungshalbmesser für den Parabelpunkt $A$.

Das in $F$ auf $AF$ errichtete Perpendikel halbirt offenbar die Strecke $AK$; verlängern wir daher die Normale bis zum Schnittpunkt mit der Leitlinie und berücksichtigen die Eigenschaft der Parabel, dass $AF$ gleich dem Abstande des Parabelpunktes $A$ von der Leitlinie ist, sowie die Gleichheit der Winkel, welche die Normale mit dem Strahl nach dem Brennpunkte $AF$ und der Axe der Parabel oder einer zu ihr Parallelen bildet, so folgt:

Der Krümmungshalbmesser für einen Punkt $A$ der Parabel ist doppelt so gross, als das Stück, welches auf der Normale von $A$ aus durch die Leitlinie abgeschnitten wird.

Dies steht in vollkommener Uebereinstimmung mit der oben

angegebenen Eigenschaft des Krümmungshalbmessers für Ellipse und Hyperbel, indem der dort mit $K^{(2)}$ bezeichnete Ortskreis für den Fall der Parabel in die Leitlinie derselben übergeht und der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Parabel in $A$ berührt und zu seinem Radius den halben Krümmungshalbmesser hat, der von $A$ aus auf der Normale ausserhalb der Parabel abgetragen wird, in der Leitlinie selbst liegen muss; dieser Kreis schneidet aber natürlich die Leitlinie rechtwinklig.

# Dritter Abschnitt.

## Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

---

### § 38. Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel.

Die in § 23 geführte Untersuchung der Beziehung zwischen einem von vier Punkten eines Kegelschnitts gebildeten Viereck und dem von den vier Tangenten in diesen Punkten gebildeten Vierseit und eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes in § 27 lassen erkennen, wenn wir die vier Punkte festhalten und die Tangenten, von denen eine willkührlich angenommen werden kann, verändern, dass durch vier Punkte unendlich viele Kegelschnitte gehen, deren Gesammtheit gleich mächtig ist mit den sämmtlichen Strahlen, welche durch einen Punkt gehen; denn jeder durch einen der vier Punkte gehende Strahl als Tangente des Kegelschnitts aufgefasst, bestimmt denselben vollständig und eindeutig; die Tangenten in den andern drei Punkten sind dadurch (§ 23) mitbestimmt und es giebt daher so viel Kegelschnitte durch vier Punkte, als es Strahlen durch einen Punkt giebt. Die Gesammtheit der durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte soll ein Kegelschnittbüschel heissen und die vier Punkte selbst die Mittelpunkte (Grundpunkte) des Büschels. Das Kegelschnittbüschel ist daher ein Gebilde von einfacher Unendlichkeit; hiergegen spricht scheinbar, dass durch einen in der Ebene der vier Mittelpunkte willkührlich gewählten Punkt ein Kegelschnitt des Büschels vollständig und eindeutig bestimmt wird und die Ebene selbst ein doppelt-unendliches Gebiet von Punkten enthält; dies erledigt sich dadurch, dass ein solcher durch fünf Punkte bestimmter Kegelschnitt zugleich unendlich viele andere Punkte enthält und jeder derselben anstatt des fünften gewählt immer

wieder denselben Kegelschnitt hervorruft. Bei der Bewegung des fünften Punktes durch das ganze doppelt-unendliche Gebiet der Ebene tritt also jeder Kegelschnitt des Büschels selbst unendlich oft auf und die sämmtlichen von einander verschiedenen Kegelschnitte des Büschels umfassen also nur eine Mannichfaltigkeit von einfacher Unendlichkeit. Seien $ABCD$ die vier Mittelpunkte des Büschels und ein beliebiger durch $A$ gehender Strahl 𝔄 die Tangente eines dem Büschel angehörigen Kegelschnitts, welcher hierdurch vollständig bestimmt ist, so erhalten wir nach § 23 die Tangenten in $BCD$, indem wir die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $ABCD$ bestimmen:

$$(AB, CD) = x \quad (AC, BD) = y \quad (AD, BC) = z$$

und die Seiten dieses Diagonaldreiecks:

$$(y, z) = X \quad (z, x) = Y \quad (x, y) = Z$$

und bemerken, dass die Tangenten in $A$ und $B$ sich auf $X$ schneiden müssen; die Diagonale $X$ trifft also 𝔄 in einem Punkte, dessen Verbindungslinie mit $B$ die Tangente in $B$ ist; ebenso trifft sie $Y$ in einem andern Punkte, dessen Verbindungslinie mit $C$ die Tangente in $C$ ist und endlich giebt die Verbindungslinie des Schnittpunktes von 𝔄 und $Z$ mit $D$ die Tangente in $D$. Drehen wir also den Strahl 𝔄 um $A$, wodurch wir sämmtliche Kegelschnitte des Büschels erhalten, so drehen sich auch die Tangenten 𝔅ℭ𝔇 um die resp. Punkte $B, C, D$ und beschreiben Strahlbüschel, welche perspektivisch liegen mit demjenigen, welches 𝔄 beschreibt; die perspektivischen Durchschnitte sind die drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Mittelpunkte des Büschels. Wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Die Tangenten an einem Kegelschnitte des Büschels in irgend zweien der vier Mittelpunkte beschreiben, wenn der Kegelschnitt das ganze Büschel durchläuft, zwei projektivische Strahlbüschel, welche perspektivisch liegen und zu ihrem perspektivischen Durchschnitt eine der drei Diagonalen des vollständigen Vierecks der vier Mittelpunkte haben.

Hierdurch werden wir in den Stand gesetzt, das Kegelschnittbüschel selbst als ein neues Gebilde einfacher Unendlichkeit mit irgend einem andern, z. B. einem ebenen Strahlbüschel, einer

geraden Punktreihe oder einem andern Kegelschnittbüschel in projektivische Beziehung zu setzen, so dass die Elemente der beiden Gebilde sich eindeutig entsprechen, indem wir zur Herstellung dieser Beziehung ein Strahlbüschel verwenden, welches von den Tangenten des Kegelschnittbüschels in irgend einem der vier Mittelpunkte gebildet wird, und für jede Tangente dann den Kegelschnitt des Büschels substituiren, welcher durch dieselbe eindeutig bestimmt ist. Wir gelangen durch Einführung dieses neuen Gebildes zu der projektivischen Erzeugung der allgemeinen Kurven dritten und vierten Grades ebenso, wie wir durch die projektivische Beziehung zweier Strahlbüschel zum Kegelschnitt gelangten. (Chasles, comptes rendus 1853.)

Die gleiche Mächtigkeit des Kegelschnittbüschels und des Strahlbüschels deutet darauf hin, dass das erste aus dem letzteren unmittelbar hervorgehen könnte, und in der That führt folgende ebenso sinnreiche, als nützliche Betrachtung Steiner's zu diesem Ziel.*)

Denken wir uns $B$ und $B_1$ als die Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ zu ihrem perspektivischen Durchschnitt haben, so ist die projektivische Beziehung derselben vollständig bestimmt durch die Lage von $\mathfrak{A}$; die Verbindungslinie der Mittelpunkte $BB_1$ enthält zwei zusammenfallende entsprechende Strahlen $e$ und $e_1$ für diese Beziehung. Verändern wir nun die Lage des perspektivischen Durchschnitts $\mathfrak{A}$, indem wir denselben um einen festen Punkt $P$ drehen, so können wir uns für jede neue Lage von $\mathfrak{A}$ eine neue Beziehung zweier Strahlbüschel mit denselben Mittelpunkten $BB_1$ hergestellt denken und es haben die beiden neuen Strahlbüschel alsdann die Strahlen $e$ und $e_1$ ebenfalls zu entsprechenden; das Strahlenpaar, welches von $B$ und $B_1$ nach dem unveränderten Punkte $P$ der Geraden $\mathfrak{A}$ geht, $p$ und $p_1$, ist für die alte Beziehung wie für die neue ebenfalls ein Paar entsprechender Strahlen. Bei der Bewegung von $\mathfrak{A}$ beschreibt nun diese Gerade selbst ein Strahlbüschel, dessen Strahlen, nach einander als die perspektivischen Durchschnitte je

*) Steiner pflegte in humoristischer Weise diese Betrachtung mit dem Worte „Dampfmaschine" zu bezeichnen und bediente sich dieses Ausdrucks sowohl im persönlichen Verkehr mit wissenschaftlichen Freunden, als auch in seinen Manuskripten zur Abkürzung.

zweier Strahlbüschel mit den festen Mittelpunkten $B$ und $B_1$ aufgefasst, unendlich viele Paare von projektivischen Strahlbüscheln, die gewissermassen in $B$ und $B_1$ über einander liegen, hervorrufen. Werden diese projektivischen Beziehungen festgehalten, aber die perspektivische Lage aufgehoben etwa dadurch, dass das eine oder beide Systeme von Strahlbüscheln um ihre Mittelpunkte $B$ und $B_1$ beliebig gedreht oder in der Ebene verschoben und gedreht werden, so wird aus jeder Geraden $\mathfrak{A}$ nunmehr ein Kegelschnitt, den die beiden nicht mehr perspektivisch liegenden aber projektivischen Strahlbüschel erzeugen; alle diese Kegelschnitte haben zunächst die Punkte $B$ und $B_1$ (die Mittelpunkte der erzeugenden Strahlbüschel) gemein, ferner einen Punkt $\mathfrak{e}$, den Schnittpunkt der beiden Strahlen $e$ und $e_1$ nach Aufhebung der perspektivischen Lage, weil diese beiden Strahlen für jede der vorigen Beziehungen entsprechende waren, und endlich auch den Punkt $\mathfrak{p}$, den Schnittpunkt der Strahlen $p$ und $p_1$ nach Aufhebung der perspektivischen Lage aus demselben Grunde. Die sämmtlichen auf diese Weise erzeugten Kegelschnitte gehen also durch vier feste Punkte $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$, d. h. sie bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier Mittelpunkten und dieses ist unmittelbar aus dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen Strahlbüschel hervorgegangen, indem jeder Strahl desselben zu einem Kegelschnitt des Büschels wurde. Beide Gebilde sind also von gleicher Mächtigkeit und das Strahlbüschel ist eigentlich nur ein besonderer Fall des Kegelschnittbüschels, welcher gewissermaassen der perspektivischen Lage entspricht. Wir erkennen ferner, wenn wir die Bedingung, dass der perspektivische Durchschnitt $\mathfrak{A}$ durch einen festen Punkt $P$ gehen solle, aufheben und ihn das ganze doppelt-unendliche Gebiet der Ebene durchstreifen lassen, dass aus den sämmtlichen Geraden der Ebene nach Aufhebung der perspektivischen Lage eben so viel Kegelschnitte werden, die durch drei feste Punkte gehen, dass diese also ein Gebilde von doppelter Unendlichkeit (Schaar-Schaar) ausmachen. Es leuchtet die Nützlichkeit dieser Betrachtung augenscheinlich ein, weil nun umgekehrt jedes Kegelschnittbüschel mit vier Mittelpunkten durch eine passende Drehung in ein Strahlbüschel verwandelt werden kann und hiedurch die Untersuchung der Eigenschaften des Kegelschnittbüschels wesentlich vereinfacht wird. Suchen wir zunächst zu ermitteln, wie sich die verschiedenen Gattungen von Kegelschnitten: Ellipsen, Hyperbeln, Para-

beln in dem Büschel vertheilen. Um die Begriffe zu fixiren, denken wir uns die Punkte $B$ und $B_1$ fest bleibend, aber das ganze System von Strahlbüscheln in $B$ um einen beliebigen Winkel $\delta$ und das ganze System von Strahlbüscheln in $B_1$ um einen Winkel in $\delta^1$ gedreht, wo $\delta$ und $\delta^1$ ihrer Grösse und Drehrichtung nach gegeben sind; alsdann entsteht durch diese beiden Drehungen (von denen auch eine z. B. $\delta^1 = o$ sein könnte) aus dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen Strahlbüschel um $P$ ein Kegelschnittbüschel mit den vier Mittelpunkten $B B_1 \mathfrak{e} \mathfrak{p}$. Es ist zuvörderst ersichtlich, dass in dem Kegelschnittbüschel drei Linienpaare (besondere Hyperbeln) vorkommen; denn unter den durch $P$ gehenden Strahlen $\mathfrak{A}$ befindet sich einmal auch der Strahl $PB$; die beiden perspektivischen Strahlbüschel in $B$ und $B_1$, welche ihn zum perspektivischen Durchschnitt haben, befinden sich in der eigenthümlichen Lage, welche wir die parabolische (§ 19 $a$) genannt haben, indem allen Strahlen des Strahlbüschels in $B_1$ der einzige Strahl $BP$ in dem Strahlbüschel $B$ und allen Strahlen des Strahlbüschels $B$ der einzige Strahl $B_1 B$ des Strahlbüschels $B_1$ entspricht; nach der Drehung um die Winkel $\delta$ und $\delta^1$ werden diese beiden besonderen Strahlbüschel einen Kegelschnitt erzeugen, dessen Punkte auf den beiden Geraden $B\mathfrak{p}$ und $B_1\mathfrak{e}$ liegen, also ein Linienpaar; in gleicher Weise wird aus dem besonderen durch $B_1$ gehenden Strahl $\mathfrak{A}$ ein Kegelschnitt, welcher sich in das Linienpaar $B_1\mathfrak{p}$ und $B\mathfrak{e}$ auflöst. Bemerken wir endlich, dass vor der Drehung um die Winkel $\delta$ und $\delta^1$ zwei besondere Strahlen, welche mit der Verbindungslinie $BB_1$ in entgegengesetztem Drehungssinne die resp. Winkel $\delta$ und $\delta^1$ bildeten und sich in einem Punkte $\varepsilon$ trafen, nach der Drehung auf einander fallen müssen; wir sehen hieraus, dass aus demjenigen Strahl $\mathfrak{A}$, welcher durch $\varepsilon$ geht, also $P\varepsilon$, ein Kegelschnitt wird, der wiederum in ein Linienpaar zerfällt, weil die beiden ihn erzeugenden projektivischen Strahlbüschel auch nach der Drehung perspektivisch werden; folglich enthält das Kegelschnittbüschel noch ein drittes Linienpaar $BB_1$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{e}$. Aus allen übrigen Geraden $\mathfrak{A}$ werden aber Kegelschnitte im eigentlichen Sinne des Wortes und wir wollen nachsehen, wie viel Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen unter ihnen vorkommen. Hierzu müssen wir diejenigen Punkte in der Ebene aufsuchen, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen; alle Punkte im Unendlichen der Ebene liegen auf der

Geraden $G_\infty$ oder sind die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen zweier projektivisch-gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel, welche sich in perspektivischer Lage befinden (§ 19); vor der Drehung müssen zwei solche in $B$ und $B_1$ placirte Strahlbüschel einen Kreis erzeugen (§ 24); alle Punkte dieses Kreises gehen also nach der Drehung in die Unendlichkeit oder vielmehr die beiden diesen Kreis erzeugenden Strahlbüschel werden nach der Drehung perspektivisch, erzeugen also ein Linienpaar, dessen einer Theil $BB_1$ und dessen anderer Theil $G_\infty$ ist. Dieser Kreis, welchen wir kurzweg den „Drehkreis" nennen wollen, ist unschwer zu ermitteln; er wird offenbar durch die drei Punkte $BB_1$ und $\varepsilon$ gehen und durch dieselben bestimmt sein; $\varepsilon$ ist aber derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch $B$ und $B_1$ schneiden, welche nach der Drehung auf $BB_1$ zusammenfallen, die also um die Winkel $\delta$ und $\delta^1$ zurückgedreht erscheinen und $\mathfrak{e}$ ist derjenige Punkt, in welchem sich zwei Strahlen durch $B$ und $B_1$ nach der Drehung treffen, welche vor der Drehung in dem Strahle $BB_1$ vereinigt waren; daher liegen $\mathfrak{e}$ und $\varepsilon$ symmetrisch zu der Geraden $BB_1$. Ist der Drehkreis ermittelt, so wird aus einem solchen Strahle $\mathfrak{A}$, welcher ihn in zwei reellen Punkten schneidet, eine Hyperbel, weil die beiden Schnittpunkte nach der Drehung in die Unendlichkeit fallen, aus denjenigen Strahlen $\mathfrak{A}$, welche den Drehkreis berühren, je eine Parabel und aus allen Strahlen $\mathfrak{A}$, welche ihn nicht treffen, Ellipsen; ferner kommt unter den Strahlen $\mathfrak{A}$ ein einziger vor, der durch den Mittelpunkt des Drehkreises geht; aus diesem wird eine gleichseitige Hyperbel, weil die unendlich entfernten Punkte derselben unter einem rechten Winkel erscheinen. Liegt daher der Punkt $P$ ausserhalb des Drehkreises, so giebt es unter dem Büschel von Kegelschnitten unendlich viele Ellipsen, unendlich viele Hyperbeln und nur zwei Parabeln, welche diese beiden Gruppen von einander trennen; unter den Hyperbeln kommt nur eine einzige gleichseitige vor. Wir bemerken noch einen besondern Fall: Da nämlich alle Punkte, die im Unendlichen liegen, in $B$ und $B_1$ zwei gleiche und gleichlaufende projektivische Strahlbüschel hervorrufen, also nach der Drehung Punkte eines bestimmten Kreises werden, welcher zu dem Drehkreise symmetrisch liegt in Bezug auf die Axe $BB_1$, so folgt, dass, wenn $P$ im Unendlichen liegt, allemal die vier Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels auf einem

Kreise liegen müssen; wenn aber $P$ im Unendlichen liegt, so sind die beiden aus ihm an den Drehkreis zu legenden Tangenten parallel, ihre Berührungspunkte erscheinen also von $B$ (oder $B_1$) aus unter einem rechten Winkel. Aus diesen beiden Tangenten werden nach der Drehung zwei Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, und dies Verhalten findet auch umgekehrt statt: Wenn die Berührungspunkte zweier Tangenten des Drehkreises unter rechtem Winkel von $B$ (oder $B_1$) aus erscheinen, so liegt ihr Schnittpunkt im Unendlichen. Wir schliessen also:

Wenn in einem Kegelschnittbüschel von vier Punkten zwei Parabeln vorkommen, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so liegen allemal die vier Mittelpunkte des Büschels auf einem Kreise. Oder:

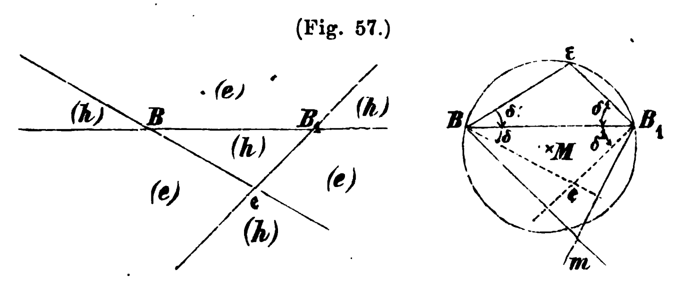
Legt man durch drei Punkte zwei Parabeln, deren Axen auf einander rechtwinklig stehen, so schneiden sich dieselben noch in einem vierten Punkte, welcher mit den drei gegebenen auf einem Kreise liegt. Oder:

Zwei Parabeln, deren Axen auf einander senkrecht stehen, treffen sich im Allgemeinen in vier Punkten, welche auf einem Kreise liegen.

Liegt nun anderseits $P$ innerhalb des Drehkreises, so besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln, unter denen sich nur eine gleichseitige findet; weil in diesem Falle alle durch $P$ gezogenen Strahlen $\mathfrak{A}$ den Drehkreis in zwei reellen Punkten treffen. Liegt endlich $P$ auf dem Drehkreise selbst, so kommt in dem Büschel nur eine einzige Parabel vor, alle übrigen Kegelschnitte desselben sind Hyperbeln. Ist insbesondere der Punkt $P$ gerade der Mittelpunkt des Drehkreises, so werden alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln; es giebt also ein besonderes Kegelschnittbüschel, welches aus lauter gleichseitigen Hperbeln besteht. Suchen wir die gewonnenen Resultate nun in der Weise umzugestalten, dass wir von dem Drehkreise abstrahiren können und nur die das Kegelschnittbüschel bestimmenden vier Mittelpunkte als gegeben annehmen. Lassen wir zu diesem Behuf den Punkt $P$ alle möglichen Lagen innerhalb des Drehkreises annehmen, so sehen

wir, weil die Kreisfläche durch das Dreieck $BB_1\varepsilon$ (Fig. 57) in

(Fig. 57.)




vier Stücke zerschnitten wird, nämlich das Dreieck und die drei Segmente über den Seiten desselben, dass 1) wenn $P$ innerhalb der Dreiecksfläche $BB_1\varepsilon$ liegt, nach der Drehung der Punkt $\mathfrak{p}$ in das Dreieck $BB_1\mathfrak{e}$ hineinfallen muss, weil er beständig der symmetrisch liegende zur Linie $BB_1$ sein wird; 2) wenn dagegen $P$ in dem Kreissegmente über $B\varepsilon$ liegt, so wird der Punkt $\mathfrak{p}$ nach der Drehung in demjenigen Scheitelraume liegen, welchen die Geraden $B_1B$ und $B_1\mathfrak{e}$ begrenzen und der ausserhalb des Dreiecks $BB_1\mathfrak{e}$ liegt, denn von zwei Strahlen $B_1P$ und $BP$, welche nach einem in diesem Kreissegmente liegenden Punkt $P$ hingehen, fällt nach der Drehung der erste nothwendig in diesen Winkelraum und der zweite in den Winkelraum, welchen die Geraden $BB_1$ und die Tangente in $B$ nach der Drehung begrenzen; die letztere wird aber parallel $B_1\mathfrak{e}$; beide Winkelräume haben nun gemeinsam denjenigen Scheitelraum des Winkels $BB_1\mathfrak{e}$, welcher ausserhalb des Dreiecks liegt; 3) wenn $P$ in dem Kreissegmente über $B_1\varepsilon$ liegt, so fällt nach der Drehung aus gleichem Grunde $\mathfrak{p}$ in denjenigen Scheitelraum des Winkels $B_1B\mathfrak{e}$, welcher ausserhalb dieses Dreiecks liegt, und endlich 4) wenn $P$ in dem Kreissegmente über $BB_1$ angenommen wird, so muss nach der Drehung $\mathfrak{p}$ nothwendig in denjenigen Scheitelraum des Winkels $B\mathfrak{e}B_1$ hineinfallen, welcher ausserhalb dieses Dreiecks liegt, weil die Tangenten in $B$ und $B_1$ nach der Drehung mit $B_1\mathfrak{e}$ und $B\mathfrak{e}$ parallel werden. Liegt daher $P$ überhaupt innerhalb des Drehkreises, so muss nach der Drehung $\mathfrak{p}$ in einen der vier mit $(h)$ in der Figur bezeichneten Räume, nämlich die Dreiecksfläche $BB_1\mathfrak{e}$ und die drei unendlichen Winkelräume an den Ecken des Dreiecks hineinfallen; liegt dagegen $P$ ausserhalb des Drehkreises, so muss $\mathfrak{p}$ in einen der drei übrigen mit $(e)$ bezeichneten, den Dreiecks-

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreieck umschrieben sind, gehen gleichzeitig durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks.

Hieraus folgt beiläufig eine Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, welche eine gewisse Analogie mit der bekannten Grundeigenschaft des Kreises darbietet:

Begegnet von zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen, welche sich in $o$ schneiden, der eine einer gleichseitigen Hyperbel in den Punkten $a$ und $a^1$, der andere in $b$ und $b^1$, so ist immer

$$oa \,.\, oa^1 + ob \,.\, ob^1 = o,$$

d. h. es ist das Produkt der Abschnitte auf dem einen Schenkel des rechten Winkels gleich dem Produkt der Abschnitte auf dem andern; aber die Schnittpunkte liegen so, dass zwei auf derselben Seite von $o$ sich finden und die beiden andern auf entgegengesetzten Seiten von $o$; denn die vier Punkte $aa^1bb^1$ liegen immer so, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist.

Das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind und zugleich durch den Höhenpunkt des Dreiecks gehen, besitzt unter andern folgende bemerkenswerthe Eigenschaft, welche, als besonderer Fall einer später zu erweisenden allgemeinen Eigenschaft, schon hier vorausgeschickt werden mag:

Das von den drei Ecken des Dreiecks und dem Höhenpunkt gebildete vollständige Viereck hat zu seinem Diagonaldreiek $xyz$, das von den drei Fusspunkten der Höhen gebildete Dreieck, weil jede Seite und die darauf senkrecht stehende Höhe ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks ist. Dieses Dreieck $xyz$ ist aber ein Tripel konjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels (§ 30); denken wir uns um dasselbe einen Kreis gelegt, so muss dieser (§ 34) alle Kreise rechtwinklig schneiden, welche die Ortskreise der Scheitel der den Kegelschnitten des Büschels umschriebenen rechten Winkel sind; und da alle Kegelschnitte des Büschels gleichseitige Hyperbeln sind, für deren jede jener Ortskreis sich auf einen Punkt, den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel reducirt, so muss der um $xyz$ gelegte Kreis die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln des Büschels enthalten.

Er geht also insbesondere auch durch die Mitten der sechs Seiten unseres vollständigen Vierecks oder durch die Mitten der Seiten des Dreiecks und die Mitten der oberen Abschnitte der Höhen (Verbindungslinien des Höhenpunkts mit jeder Ecke); also:

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben werden können, liegen auf einem Kreise, der durch die Fusspunkte der Höhen, die Mitten der Seiten und die Mitten der drei oberen Abschnitte auf den Höhen hindurchgeht (Kreis der neun Punkte). Die Eigenschaft, dass die genannten neun Punkte auf einem Kreise liegen, ist aus den Elementen bekannt und leicht auf elementarem Wege zu beweisen. (Vergl. „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines festen Kreises“ von J. Steiner, Seite 53.)

Der schon vorhin erwähnte Fall, dass $P$ auf der Peripherie des Drehkreises liegt, führt zu einem Büschel von lauter Hyperbeln, welches nur eine einzige Parabel enthält, denn in diesem Falle geht der Punkt $\mathfrak{p}$, einer der vier Mittelpunkte, in die Unendlichkeit und durch vier Punkte, von denen einer im Unendlichen liegt, ist nur eine einzige Parabel möglich, weil die unendlich-entfernte Gerade Tangente der Parabel ist; alle übrigen Kegelschnitte eines solchen Büschels sind aber offenbar Hyperbeln und die Gruppe Ellipsen verschwindet in diesem Falle.

## § 39. Charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels und einige Folgerungen aus derselben.

Die in dem vorigen Paragraphen gezeigte Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels führt zu einer charakteristischen Eigenschaft desselben, welche häufig benutzt wird; denken wir uns nämlich eine beliebige gerade Linie (Transversale) in der Ebene des Kegelschnittbüschels, so wird dieselbe von jedem Kegelschnitt des Büschels im Allgemeinen in zwei Punkten $x$, $\mathfrak{x}$ getroffen, welche ein Punktsystem bilden. In der That, seien $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$ die vier Mittelpunkte des Büschels und $\mathfrak{L}$ die gegebene Transversale, so können wir uns in $B$ und $B_1$ zwei perspektivische Strahlbüschel denken, welche $\mathfrak{L}$ zu ihrem perspektivischen Durchschnitt haben und ausserdem in $B$ und $B_1$ die Mittelpunkte je zweier projektivischer Strahlbüschel, welche allemal einen Kegelschnitt des Büschels erzeugen. Denken wir uns dann die ganze Gruppe von

Strahlbüschelpaaren in $B$ und $B_1$ so um die Mittelpunkte $BB_1$ herumgedreht, dass $B\mathfrak{e}$ und $B_1\mathfrak{e}$ zusammenfallen, so wird aus dem Kegelschnittbüschel ein einfaches Strahlbüschel ($\mathfrak{A}$) um den Mittelpunkt $P$; aus der Geraden $\mathfrak{L}$ wird aber ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, da die beiden vor der Drehung perspektivischen Strahlbüschel, welche $\mathfrak{L}$ erzeugten, jetzt im Allgemeinen nicht mehr perspektivisch liegen werden; die beiden Schnittpunkte $x$ und $\xi$ irgend eines Kegelschnitts $K$ des Büschels mit der Transversale $\mathfrak{L}$ gehen daher in die Schnittpunkte $x^1 \xi^1$ eines Strahles $\mathfrak{A}$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ über; lässt man nun $\mathfrak{A}$ das ganze Strahlbüschel um $P$ durchlaufen, so werden nach einem im § 31 gefundenen Satze $Bx^1$ und $B\xi^1$ (oder auch $B_1 x^1$ und $B_1 \xi^1$) ein Strahlsystem beschreiben, welches also auch vor der Drehung ein Strahlsystem gewesen sein muss; die Punkte $x$ und $\xi$ bilden daher ein Punktsystem und wir erhalten den allgemeinen Satz:

Jede Gerade in der Ebene eines Kegelschnittbüschels wird von den Kegelschnitten desselben in Punktenpaaren getroffen, welche die konjugirten Punkte eines Punktsystems sind.

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir bereits in § 18 bewiesen; wir erhalten denselben, wenn wir aus dem Kegelschnittbüschel die drei Linienpaare herausnehmen; die dort aufgesuchte Bedingung, wann das Punktsystem elliptisch und wann es hyperbolisch ist, kommt uns hier zu Statten:

Sobald von den vier Mittelpunkten des Büschels eine ungerade Anzahl zu beiden Seiten von der Transversale liegt, ist das Punktsystem auf derselben elliptisch; liegt eine gerade Anzahl zu beiden Seiten, so ist das Punktsystem hyperbolisch, falls nämlich die vier Mittelpunkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet. Liegen dagegen die vier Mittelpunkte so, dass einer von ihnen in dem von den drei andern gebildeten Dreieck enthalten ist, so findet das Umgekehrte statt: Das Punktsystem auf der Transversale ist hyperbolisch, wenn eine ungerade Anzahl von den vier Mittelpunkten des Büschels, dagegen elliptisch, wenn eine gerade Anzahl zu beiden Seiten der Transversale liegt.

Diese Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Transversale in einem Punktsystem geschnitten zu werden, charakterisirt dasselbe und unterscheidet es von andern Gruppen von Kegelschnitten; sie lässt sich auch so umkehren:

Alle Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte und ausserdem durch je zwei konjugirte Punkte eines gegebenen Punktsystems gehen, laufen noch durch einen festen vierten Punkt und bilden also ein Kegelschnittbüschel.

Denken wir uns nämlich diese Kegelschnitte durch Paare von Strahlbüscheln erzeugt, welche in zwei von den drei festen Punkten $B B_1$ und $\mathfrak{e}$, nämlich in $B$ und $B_1$, ihre Mittelpunkte haben, und auch die Gerade $\mathfrak{L}$, welche der Träger des gegebenen Punktsystems ist, durch zwei perspektivische Strahlbüschel in $B$ und $B_1$ hervorgerufen, und drehen das ganze Gebilde so, dass $B\mathfrak{e}$ und $B_1 \mathfrak{e}_1$ auf einander fallen, so werden aus sämmtlichen Kegelschnitten Gerade und aus $\mathfrak{L}$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; diese Geraden müssen aber sämmtlich durch einen festen Punkt laufen, weil die Strahlenpaare von $B$ (oder $B_1$) nach den Schnittpunkten jeder solchen Geraden mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein Strahlsystem bilden (§ 31); folglich müssen denn auch, wenn wir wieder zurück drehen, die Kegelschnitte durch einen vierten festen Punkt laufen.

Die obige Eigenschaft des Kegelschnittbüschels führt uns zur Lösung der Aufgabe: „Einen Kegelschnitt zu konstruiren, welcher durch vier gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade zur Tangente hat“; da nämlich alle durch die vier Punkte gelegten Kegelschnitte auf der Geraden Paare konjugirter Punkte eines Punktsystems bestimmen und, falls die Gerade Tangente sein soll, die beiden Schnittpunkte zusammenfallen müssen, so werden die Asymptotenpunkte dieses Punktsystems die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte sein, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Die Aufgabe lässt also im Allgemeinen zwei Lösungen zu und wir sind im Stande, nicht allein aus der Lage der vier Punkte zu der Geraden über die Realität dieser Lösungen zu entscheiden (je nachdem eine gerade oder ungerade Anzahl von Punkten zu beiden Seiten der Geraden liegt, giebt es zwei reelle Lösungen der Aufgabe oder keine), sondern auch die beiden Kegelschnitte, wenn

sie reell vorhanden sind, selbst zu konstruiren, indem wir die Asymptotenpunkte eines bekannten Punktsystems ermitteln.

Das Punktsystem wird bestimmt durch die Schnittpunkte zweier Seitenpaare des von den vier gegebenen Punkten gebildeten vollständigen Vierecks. Die Asymptotenpunkte zu finden, kommt dann auf eine (§ 14 und 15) allgemein gelöste Aufgabe hinaus.

Hieran knüpft sich die aus derselben Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleitende Lösung der Aufgabe: „Einen Kegelschnitt zu konstruiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht und zwei gegebene Gerade zu Tangenten hat"; lässt man nämlich von den vier Mittelpunkten eines Kegelschnittbüschels zwei zusammenfallen und die beiden andern auch zusammenfallen, so erhält man ein Büschel, dessen Kegelschnitte sich alle in denselben beiden festen Punkten berühren; die Tangenten in diesen beiden gemeinschaftlichen Berührungspunkten nehmen die Stelle eines der drei Linienpaare aus dem Büschel ein, die beiden andern Linienpaare fallen zusammen in die gemeinschaftliche Berührungssehne sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels; ein so eigenthümlich gestaltetes Büschel wird nun auch von einer beliebigen Transversale in einem Punktsystem geschnitten und dies muss immer ein hyperbolisches sein, wie aus der besonderen Lage der vier Mittelpunkte hervorgeht; wir können auch sofort einen Asymptotenpunkt desselben bestimmen; ein solcher ist nämlich der Schnittpunkt der Transversale mit der Berührungssehne, weil diese als ein zusammengefallenes Linienpaar anzusehen ist oder als ein besonderer Kegelschnitt, dessen beide Schnittpunkte mit der Transversale vereinigt sind; dies ist daher ein Asymptotenpunkt des Punktsystems, das gemeinschaftliche Tangentenpaar trifft ausserdem die Transversale in zwei konjugirten Punkten desselben Punktsystems und wir schliessen hieraus den Satz: Ein beliebiges Tangentenpaar eines Kegelschnitts und die Berührungssehne desselben treffen irgend eine Transversale in der Ebene in einem Punktenpaar $a\alpha$ und einem Punkte $g$; die Transversale trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten $b\beta$; alsdann ist immer $g$ ein Asymptotenpunkt desjenigen Punktsystems, von welchem $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paar konjugirte Punkte sind. Diese allerdings auch unmittelbar aus den Polarbeziehungen des Kegelschnitts hervorgehende Eigenschaft löst nun die vorgelegte Frage;

seien nämlich $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ die beiden gegebenen Geraden, welche der gesuchte Kegelschnitt berühren, und $ABC$ die drei Punkte, durch welche er gehen soll, so ziehe man $AB$, merke die Schnittpunkte $\gamma\gamma_1$ dieser Geraden mit der gegebenen $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$; durch die Paare $AB$ und $\gamma\gamma_1$ als konjugirte Punkte wird ein Punktsystem bestimmt, dessen Asymptotenpunkte ermittelt werden müssen; sie seien $g$ und $h$; ebenso ziehe man zweitens $AC$, merke die Schnittpunkte $\beta\beta_1$ dieser Geraden mit den beiden gegebenen $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$; betrachte $AC$ und $\beta\beta_1$ als zwei Paar konjugirte Punkte eines Punktsystems und bestimme dessen Asymptotenpunkte $g'h'$. Zieht man nun eine Verbindungslinie zweier solcher Asymptotenpunkte aus dem einen und dem andern Paar, so muss dieselbe jede der beiden Geraden $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ in zwei solchen Punkten treffen, welche die Berührungspunkte eines durch $ABC$ gehenden und $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ berührenden Kegelschnitts sind; da aber die vier Punkte $gh$ und $g'h'$ ausser durch die beiden Geraden $AB$ und $AC$ auf vier Arten verbunden werden können, nämlich durch die Geraden $gg'$, $hh'$, $gh'$, $hg'$, so giebt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche durch drei gegebene Punkte gehen und zwei gegebene Gerade berühren. Zögen wir noch $BC$, bestimmten die Schnittpunkte $\alpha\alpha_1$ mit den Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ und ermittelten die Asymptotenpunkte $g''h''$ des durch die Punktenpaare $BC$ und $\alpha\alpha_1$ bestimmten Punktsystems, so müssten dieselben auf den vorhin gefundenen vier Geraden liegen, weil der gesuchte Kegelschnitt durch jene schon vollkommen bestimmt ist; also die 6 Punkte $g\,h\,g'\,h'\,g''\,h''$ können sich nur auf vier Geraden schneiden, sind daher die Ecken eines vollständigen Vierseits; es muss also $g'' = (gg', hh')$, $h'' = (gh', hg')$ sein und es ist $A = (gh, g'h')$ $B = (gh, g''h'')$ $C = (g'h', g''h'')$, d. h. $ABC$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits, was denn wieder einen Satz giebt, den wir nicht weiter ausführen wollen. Zunächst geht aus der im Vorigen enthaltenen Lösung hervor, dass entweder alle vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen, reell vorhanden sind oder keiner, dass ersteres nur stattfindet, wenn von den auf $AB$, $AC$, $BC$ bestimmten Punktsystemen zwei, folglich auch das dritte hyperbolisch sind, letzteres dagegen, wenn eines dieser Punktsysteme elliptisch ist, woraus zugleich hervorgeht, dass noch ein zweites elliptisch sein muss, denn wären die beiden andern hyperbolisch, so müsste auch das erstere hyperbolisch sein. Die Betrachtung aller mög-

lichen Lagen der Punkte $ABC$ zu den beiden Geraden $\mathfrak{L}\mathfrak{L}_1$ zeigt, dass von den drei Punktsystemen auf den Geraden $AB$, $AC$, $BC$ entweder alle drei hyperbolisch oder eines hyperbolisch und zwei elliptisch sein müssen; im ersten Falle sind die vier Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen, reell, im zweiten imaginär.

Die beiden noch übrigen Fälle, wenn zur Konstruktion eines Kegelschnitts gegeben sind: a) drei Tangenten und zwei Punkte, b) vier Tangenten und ein Punkt, werden durch die polare Nebenbetrachtung in gleicher Weise, wie die beiden oben behandelten, gelöst und es finden sich im Allgemeinen bei a) vier Lösungen, bei b) zwei Lösungen der Aufgabe; die nähere Ausführung darf füglich unterbleiben, weil sie der obigen ohne jede Schwierigkeit nachgebildet werden kann. Auch die Lösung der mitunter sich darbietenden Aufgabe: „Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten drei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, den vierten zu finden", ergiebt sich leicht aus dem Vorigen; seien $abc$ die drei bekannten gemeinschaftlichen Punkte und ausserdem $de$ zwei Punkte des einen Kegelshnitts $K$, welche denselben bestimmen, $d_1 e_1$ zwei Punkte des andern Kegelschnitts $K_1$, so ziehe man die Verbindungslinie $dd_1$ und bestimme auf ihr die beiden übrigen Schnittpunkte $\delta\delta_1$ der gegebenen Kegelschnitte $KK_1$ in bekannter Weise; die Paare $d$, $\delta$; $d_1$, $\delta_1$ bestimmen ein Punktsystem, welches von sämmtlichen Kegelschnitten desjenigen Büschels, dem $K$ und $K_1$ angehören, auf diesem Träger ausgeschnitten wird; also auch die Linienpaare dieses Büschels treffen in konjugirten Punkten jenes Punktsystems; trifft also $bc$ die Verbindungslinie $dd_1$ in $\xi$ und ist der konjugirte Punkt von $\xi$ in dem bekannten Punktsystem $x$, so ist $cx$ eine gemeinschaftliche Sekante beider Kegelschnitte; trifft $ca$ die Gerade $dd_1$ in $\eta$ und ist der konjugirte Punkt des Punktsystems $y$, so ist auch $by$ eine gemeinschaftliche Sekante, folglich der Schnittpunkt $(ax, by)$ der gesuchte vierte gemeinschaftliche Punkt beider Kegelschnitte; dieser könnte auch dadurch gefunden werden, dass wir den andern Schnittpunkt eines der beiden Kegelschnitte $K$ (oder $K_1$) mit der Geraden $ax$ bestimmen; suchen wir noch den Schnittpunkt $\zeta$ von $ab$ und $dd_1$ und seinen konjugirten $z$, so geht auch $cz$ durch den gesuchten vierten gemeinschaftlichen Punkt beider Kegelschnitte, worin ein Satz enthalten ist. (Sind von den Punkten $abc$ zwei imaginär, so tritt eine Modification in die Auf-

lösung der Aufgabe, welche nach der in § 30 gemachten Bemerkung leicht zu finden ist.)

Auf derselben charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels beruht die Lösung der Aufgabe: Wenn von zwei in der Ebene gegebenen Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche Punkte bekannt sind, die beiden übrigen zu finden. Seien $ab$ die bekannten gemeinschaftlichen Punkte der beiden Kegelschnitte $KK_1$ und ausserdem vom ersten drei Punkte $cde$, vom andern $c_1 d_1 e_1$ zu seiner Bestimmung gegeben; dann ziehe man $cc_1$, bestimme die Schnittpunkte $\gamma\gamma_1$ der Kegelschnitte $KK_1$ mit der Geraden $cc_1$; die Punktenpaare $c, \gamma$; $c_1, \gamma_1$ bestimmen das Punktsystem des Büschels $(K, K_1)$; in gleicher Weise ziehe man $dd_1$ und bestimme die übrigen Schnittpunkte $\delta\delta_1$ mit den Kegelschnitten $KK_1$; die Paare $d, \delta$; $d_1, \delta_1$ bestimmen ein zweites Punktsystem auf $dd_1$; trifft nun die Gerade $ab$ die $cc_1$ in $\xi$ und $dd_1$ in $\eta$ und sind $x$ und $y$ die konjugirten Punkte in den bekannten Punktsystemen, so ist $xy$ eine gemeinschaftliche Sekante der Kegelschnitte $KK_1$ und ihre Schnittpunkte mit einem derselben sind mithin die gesuchten gemeinschaftlichen Punkte beider Kegelschnitte.

Dieselbe Betrachtung, welche im Anfange dieses Paragraphen zu der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, von jeder Transversale in einem Punktsystem geschnitten zu werden, geführt hat, lässt sich ein wenig erweitern; denken wir uns nämlich einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ oder zwei Punkte $B$ und $B_1$ als die Mittelpunkte zweier ihn erzeugenden projektivischen Strahlbüschel, ausserdem ein beliebiges Strahlbüschel $(P)$ in der Ebene, dessen Strahlen $\mathfrak{A}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in zwei Punkten treffen, welche mit $B$ verbunden ein Strahlsystem in dem Punkte $B$ liefern (§ 31); fassen wir endlich den Strahl $\mathfrak{A}$ als den perspektivischen Durchschnitt zweier projektivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten $B$ und $B_1$ auf und drehen nun das ganze System von Strahlbüschelpaaren in $B$ und $B_1$ um beliebige Drehwinkel, so wird aus dem Strahlbüschel $(P)$ ein Kegelschnittbüschel von vier Punkten $BB_1\mathfrak{e}\mathfrak{p}$, aus dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein gewisser anderer Kegelschnitt $\mathfrak{K}^1$ (vorhin drehten wir dergestalt, dass $\mathfrak{K}^1$ in ein Linienpaar zerfiel); jeder Kegelschnitt $K$ des Büschels wird von $\mathfrak{K}^1$ in zwei Punkten geschnitten, welche vor der Drehung die Schnittpunkte des Strahles $\mathfrak{A}$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ waren; da

diese mit $B$ verbunden zwei Strahlen gaben, welche ein Strahlsystem bilden, so wird dasselbe auch nach der Drehung stattfinden müssen; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}^1$ geht nun selbst durch den Punkt $B$ (und $B_1$); das Strahlsystem in $B$ trifft ihn daher in Punktenpaaren, welche (§ 31) durch einen festen Punkt laufen müssen; wir erhalten also folgenden Satz:

Legt man durch zwei von den vier Mittelpunkten eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen Kegelschnitt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels im Allgemeinen noch zwei Punkte gemein, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt läuft; dieser feste Punkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden übrigen Mittelpunkte des Büschels.

Ein besonderer Fall dieses Satzes verdient noch bemerkt zu werden; wenn nämlich der Kegelschnitt, welcher durch zwei Mittelpunkte des Büschel gelegt wird, insbesondere ein Linienpaar ist (was jederzeit eintritt, sobald der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus zwei Geraden besteht, deren eine durch $B$, die andere durch $B_1$ geht, wo dann die beiden diesen Kegelschnitt erzeugenden Strahlbüschel in dem sogenannten parabolischen Fall projektivischer Beziehung sich befinden, § 19 a), so wird die eine durch $B$ gehende Gerade das Kegelschnittbüschel in einer Punktreihe treffen, welche projektivisch ist mit derjenigen Punktreihe, in welcher die andere durch $B_1$ gehende Gerade von dem Kegelschnittbüschel getroffen wird, und diese beiden Punktreihen müssen perspektivisch liegen. Also: Jede Gerade, welche durch einen der vier Mittelpunkte eines Kegelschnittbüschels hindurchgeht, wird von den Kegelschnitten des Büschels (ausserdem) in einer Punktreihe getroffen; irgend zwei solcher Punktreihen sind allemal projektivisch rücksichtlich derjenigen Schnittpunkte, welche derselbe Kegelschnitt auf ihnen bestimmt, und sie liegen perspektivisch, wenn die Träger derselben durch verschiedene Mittelpunkte des Büschels laufen. Alle diese Punktreihen sind projektivisch mit demjenigen Strahlbüschel ($P$), aus welchem das Kegelschnittbüschel entstanden gedacht werden kann, und auch projektivisch mit jedem der vier Strahlbüschel, welche von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Mittelpunkte gebildet werden; denn letztere sind, wie leicht zu sehen

ist, mit dem Strahlbüschel ($P$) projektivisch (indem wir berücksichtigen, dass die Tangenten in $B$ diejenigen Strahlen sind, welche dem gemeinsamen Strahl $B_1 B$ für alle Beziehungen entsprechen).

Gehen zwei Gerade durch denselben Mittelpunkt $B$ des Büschels, so sind die durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte des Büschels auf ihnen fixirten Punktreihen offenbar auch projektivisch, liegen aber nicht mehr perspektivisch, weil ein Kegelschnitt des Büschels, welcher die erste Gerade in $B$ berührt, nicht gleichzeitig die andere berühren kann, also in dem Schnittpunkte der beiden Geraden nicht zwei entsprechende Punkte vereinigt sind. Die Verbindungsstrahlen aller entsprechenden Punkte werden daher einen Kegelschnitt umhüllen, welcher ausser den Trägern der beiden Punktreihen, wie leicht einzusehen ist, die drei Seiten desjenigen Dreiecks zu Tangenten haben muss, welches von den drei übrigen Mittelpunkten des Büschels gebildet wird; mithin haben wir den Satz:

Zieht man durch einen der vier Mittelpunkte des Büschels irgend zwei Gerade, so treffen alle Kegelschnitte des Büschels dieselben in je zwei Punkten, deren Verbindungslinie einen Kegelschnitt umhüllt. Dieser Kegelschnitt berührt die beiden angenommenen Geraden selbst und ist ausserdem dem Dreiecke einbeschrieben, welches von den drei übrigen Mittelpunkten des Büschels gebildet wird.

Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall eines allgemeineren, zu welchem wir gelangen, wenn wir nur durch einen der vier Mittelpunkte des Büschels einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ anstatt des Linienpaares hindurchlegen. Obgleich dieser Satz später aus allgemeineren Betrachtungen unmittelbar hervortritt, so lässt er sich auch hier in folgender Art erweisen:

Seien $PABC$ die vier Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels und durch einen derselben $P$ ein beliebiger aber fester Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegt; möge irgend ein Kegelschnitt $K$ des Büschels den $\mathfrak{K}$ in den vier Punkten $Pxyz$ treffen, so kann ich $Pxyz$ als die vier Mittelpunkte eines neuen Büschels auffassen, von welchem $K$ und $\mathfrak{K}$ zwei Individuen sind. Die Verbindungslinie $AB$ wird von diesem neuen Büschel in einem Punktsystem geschnitten, von welchem $AB$ ein Paar konjugirte Punkte, die bei-

den Schnittpunkte $cy$ der Geraden $AB$ mit dem festen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein zweites Paar konjugirte Punkte sind, und da durch diese beiden Paare das ganze Punktsystem bestimmt ist, so bleibt es unverändert dasselbe, wenn wir den Kegelschnitt $K$ des gegebenen Büschels verändern; ein drittes Punktenpaar ist nun dasjenige Paar Schnittpunkte, welches von den Geraden $Px$ und $yz$ auf $AB$ ausgeschnitten wird. Verändern wir aber den Kegelschnitt $K$ in dem gegebenen Büschel, so verändert sich dies dritte Paar und durchläuft mithin sämmtliche Paare konjugirter Punkte eines festen Punktsystems auf $AB$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(Px, AB) = x_1$ und $(yz, AB) = \xi_1$, so sind $x_1 \xi_1$ ein Paar konjugirte Punkte eines bekannten Punktsystems und durchlaufen also bei der Veränderuug von $K$ zwei zu einander projektivische Punktreihen (§ 16) auf derselben Geraden $AB$. Nehmen wir anderseits die Gerade $AC$, so gilt für sie ganz dieselbe Betrachtung; wird also der Schnittpunkt $(Px, AC) = x_2$ und $(yz, AC) = \xi_2$ bezeichnet, so durchlaufen auch $x_2$ und $\xi_2$ zwei projektivische Punktreihen auf dem Träger $AC$, weil es konjugirte Punkte eines bestimmten festen Punktsystems sind; da nun die Punktreihen $x_1$ und $x_2$ perspektivisch liegen in dem von $Px$ beschriebenen Strahlbüschel, so müssen die von $\xi_1$ und $\xi_2$ durchlaufenen Punktreihen projektivisch sein, also ihre Verbindungslinie, d. h. $yz$ einen Kegelschnitt umhüllen, welcher zugleich die Geraden $AB$ und $AC$ berührt; derselbe Kegelschnitt wird aber auch von den Verbindungslinien $xz$ und $xy$ umhüllt, denn die Strahlen $Py$ und $xz$ treffen $AB$ in zwei konjugirten Punkten desselben oben ermittelten Punktsystems auf $AB$ und auch $AC$ in zwei konjugirten Punkten des zweiten auf $AC$ festen Punktsystems; es trifft also auch $xz$ die Träger $AB$ und $AC$ in zwei entsprechenden Punkten der beiden auf ihnen befindlichen Punktreihen $\xi_1$ und $\xi_2$ und dasselbe gilt von $xy$. Die Seiten des mit dem Kegelschnitt $K$ veränderlichen Dreiecks $xyz$ umhüllen daher ein und denselben Kegelschnitt, welcher, wie unmittelbar einleuchtet, nicht nur $AB$ und $AC$, sondern auch $BC$ berührt (weil die sechs Seiten zweier einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecke selbst einen andern Kegelschnitt berühren, § 28). Wir haben hiernach folgenden Satz:

Wenn man durch einen der vier Mittelpunkte eines Kegelschnittbüschels einen beliebigen (festen) Kegel-

schnitt hindurchlegt, so hat derselbe mit jedem Kegelschnitte des Büschels im Allgemeinen noch drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die Seiten dieser sämmtlichen Dreiecke umhüllen einen und denselben neuen Kegelschnitt, welcher zugleich demjenigen Dreieck einbeschrieben ist, das von den drei übrigen Mittelpunkten des Büschels gebildet wird.

Dieser Satz, welcher in dem besonderen Fall, dass der durch einen der vier Mittelpunkte gelegte Kegelschnitt in ein Linienpaar zerfällt, auf den vorhin bewiesenen zurückkommt, lässt sich auch in etwas anderer Form so aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte einen Punkt gemein haben, so haben je zwei derselben im Allgemeinen noch drei andere Punkte gemein, welche ein Dreieck bilden; die neun Seiten der hierdurch erhaltenen drei Dreiecke berühren denselben Kegelschnitt. Oder umgekehrt:

Wenn einem Kegelschnitt drei Dreiecke umschrieben werden, so liegen die sechs Ecken je zweier derselben allemal auf einem Kegelschnitt (§ 28); die auf diese Weise erhaltenen drei neuen Kegelschnitte laufen durch einen und denselben Punkt.

Die Richtigkeit dieser Umkehrung ist ohne Schwierigkeit einzusehen. Der allgemeinste Satz, welcher aus der Verbindung eines Kegelschnittbüschels mit einem beliebig liegenden Kegelschnitt hervorgeht, kann erst später aufgesucht werden (§ 62).

Anmerkung. Es ist in den vorigen Sätzen stillschweigend vorausgesetzt worden, dass zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Schnittpunkte haben; es ist nun zwar umgekehrt nachgewiesen, dass durch vier Punkte der Ebene zwei Kegelschnitte (und zugleich ein ganzes Büschel) gehen; auch ist es an sich klar, dass zwei Kegelschnitte nicht mehr als vier gemeinschaftliche Punkte haben können, denn hätten sie fünf Punkte gemein, so würden sie identisch zusammenfallen, weil fünf Punkte den Kegelschnitt vollständig und eindeutig bestimmen (§ 22); es ist aber eine Frage, ob zwei Kegelschnitte immer vier reelle Schnittpunkte haben? Diese Frage wird im Folgenden erledigt werden, wo es sich zeigen wird, dass zwei Kegelschnitte entweder vier

oder zwei oder keine reellen Schnittpunkte haben; trotzdem sagen wir, zwei Kegelschnitte haben im Allgemeinen vier Schnittpunkte, von denen zwei oder auch alle vier imaginär sein können (§ 53 und 61).

## §. 40. Andere Entstehungsart des Kegelschnittbüschels.

Denken wir uns von einem Kegelschnittbüschel mit den vier Mittelpunkten $A\ B\ C\ D$ ein beliebiges Individuum $K^{(2)}$ durch zwei Strahlbüschel erzeugt, deren eines seinen Mittelpunkt in $B$ und das andere seinen Mittelpunkt in einem beliebigen Punkte $X$ des Kegelschnitts $K^{(2)}$ hat, so haben wir drei Paar entsprechende Strahlen dieser beiden erzeugenden Strahlbüschel: $BC$ und $XC$, $BD$ und $XD$, $BA$ und $XA$. Halten wir nun die Gerade $XA$ fest, verändern aber $X$ auf ihr, so entstehen successive sämmtliche Kegelschnitte des Büschels und von den beiden projektivischen Strahlbüscheln, welche jeden solchen Kegelschnitt erzeugen, ist das eine $B$ absolut unverändert, das andere verändert seinen Mittelpunkt auf einer festen Geraden $AX$, geht aber beständig durch eine feste Punktreihe auf der Geraden $CD$ welche mit dem Strahlbüschel in $B$ projektivisch ist; die drei oben angegebenen Strahlenpaare bestimmen nämlich die projektivische Beziehung jenes Strahlbüschels mit dieser Punktreihe und diese drei Paar entsprechende Elemente bleiben bei der Bewegung von $X$ unverändert. Wir können also umgekehrt folgende neue Entstehungsweise des Kegelschnittbüschels aussprechen:

Ist in der Ebene ein festes Strahlbüschel

$$B\ (a,\ b,\ c,\ ..\ x\ ..)$$

und eine Gerade $\mathfrak{A}$ als Träger einer festen mit dem Strahlbüschel projektivischen Punktreihe $(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ ...\ \mathfrak{x}\ ..)$ gegeben und bewegt sich ein veränderlicher Punkt $X$ auf einer gegebenen Geraden $\mathfrak{G}$ als Mittelpunkt eines mit der Punktreihe perspektivischen Strahlbüschels $X\,(\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ ..\ \mathfrak{x}\ ..)$, so wird jedes Mal von den beiden projektivischen Strahlbüscheln $(B)$ und $(X)$ ein Kegelschnitt erzeugt; alle diese Kegelschnitte laufen durch vier feste Punkte und bilden also ein Kegelschnittbüschel.

Die Richtigkeit erhellt unmittelbar aus der Umkehrung der vorigen Betrachtung, denn die in der angegebenen Weise kon-

struirten Kegelschnitte gehen zunächst sämmtlich durch den festen Punkt $B$, sodann durch die beiden Doppelpunkte $C$ und $D$ derjenigen beiden auf dem Träger $\mathfrak{A}$ befindlichen projektivischen Punktreihen, deren eine die gegebene ($\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{x} \ldots$) ist und deren andere durch das feste Strahlbüschel $B$ ($a\ b\ c \ldots x \ldots$) auf $\mathfrak{A}$ fixirt wird, endlich noch durch einen vierten festen Punkt $A$, denjenigen nämlich, in welchem die Gerade $\mathfrak{G}$ von einem Strahle des Strahlbüschels ($B$) getroffen wird, welcher entsprechend ist dem einzigen Punkte der Punktreihe auf $\mathfrak{A}$, der zugleich auf $\mathfrak{G}$ liegt. Diese reelle Konstruktion der sämmtlichen Kegelschnitte eines Büschels liefert nicht nur das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Mittelpunkten, wie die frühere (§ 38), sondern auch ein Kegelschnittbüschel, von dem nur zwei Mittelpunkte reell und die beiden andern imaginär sind. Die Mittelpunkte $A$ und $B$ sind nämlich der Natur der Konstruktion zufolge immer reell vorhanden; die Punkte $C$ und $D$ sind aber die Doppelpunkte zweier auf einander liegender projektivischer Punktreihen auf dem Träger $\mathfrak{A}$, deren eine die gegebene ($\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c} \ldots \mathfrak{x} \ldots$) ist und die andere durch das gegebene Strahlbüschel $B$ ($a\ b\ c \ldots x \ldots$) auf $\mathfrak{A}$ fixirt wird. Ob diese beiden zusammenliegenden projektivischen Punktreihen reelle Doppelpunkte haben oder nicht, hängt von der Natur ihrer projektivischen Beziehung ab (§ 14). Wir können die das Kegelschnittbüschel bestimmenden Gebilde offenbar so annehmen, dass einmal die Doppelpunkte reell werden, das andere Mal nicht, und beide Gruppen von Kegelschnitten werden denselben Namen des Kegelschnittbüschels beanspruchen können, denn alle Eigenschaften, welche dem einen zukommen, müssen, unter der Modalität, dass gewisse Elemente imaginär werden können, in gleicher Weise auch dem andern zukommen.

Wir begnügen uns hier damit, aus der neuen Entstehungsart des Kegelschnittbüschels, welche also auch zu einem Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten führt, die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels herzuleiten, dass jede Transversale der Ebene in einem Punktsysteme geschnitten wird. Denken wir uns nämlich eine beliebige Transversale $T$ in der Ebene und werde dieselbe von dem Strahlbüschel $B$ ($a\ b\ c \ldots x \ldots$) längs einer Punktreihe $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1 \ldots \mathfrak{x}_1 \ldots$ geschnitten, so sind die beiden Punktreihen auf $T$ und $\mathfrak{A}$ projektivisch und die Verbindungslinie $\mathfrak{x}\ \mathfrak{x}_1$

wird daher einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umhüllen, welcher selbst $T$ und $\mathfrak{A}$ berührt. Um nun die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnitts $K^{(2)}$ des Büschels mit der Transversale $T$ zu ermitteln, haben wir solche zwei Strahlen $X\mathfrak{x}$ und $x$ zu ermitteln, welche sich auf $T$ schneiden, d. h. wir haben aus $X$ an den eben ermittelten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine Tangente oder das Tangentenpaar zu legen; die Schnittpunkte dieser beiden Tangenten mit der Transversale $T$ werden zugleich die Schnittpunkte derselben mit dem Kegelschnitt $K^{(2)}$ sein; nun ist aber $T$ selbst eine Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ und es gilt der Satz (§ 31), dass, wenn man aus den Punkten $X$ einer Geraden $G$ die Tangentenpaare an einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ legt, irgend eine feste Tangente $T$ desselben allemal in den Punktenpaaren eines Punktsystems von jenen Tangentenpaaren getroffen wird; folglich wird die beliebige Transversale $T$ von den Kegelschnitten $K^{(2)}$ des Büschels in Punktenpaaren getroffen, welche die Paare konjugirter Punkte eines Punktsystems sind, was zu beweisen war. Diese Eigenschaft findet jetzt also ganz unabhängig davon statt, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle Mittelpunkte hat oder zwei reelle und zwei imaginäre.

Sobald das Kegelschnittbüschel vier reelle Mittelpunkte hat, kommen, wie wir bereits von anderer Seite her wissen, drei Linienpaare unter den Kegelschnitten des Büschels vor; dasselbe zeigt sich auch hier; denn seien $C$ und $D$ die beiden reellen Doppelpunkte der in $\mathfrak{A}$ auf einander liegenden projektivischen Punktreihen, so leuchtet ein, dass für einen solchen Punkt $X_0$ auf $G$, welcher in der Linie $BC$ sich befindet, die beiden den Kegelschnitt des Büschels erzeugenden Strahlbüschel perspektivisch werden, der Kegelschnitt selbst also in ein Linienpaar zerfällt; dasselbe gilt für denjenigen Punkt $X'_0$, in welchem $BD$ die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft. Diese beiden Linienpaare existiren aber nicht, wenn die Doppelpunkte $C$ und $D$ der beiden in $\mathfrak{A}$ zusammenliegenden projektivischen Punktreihen imaginär sind. Nun kommt noch ein drittes Linienpaar vor, welches derjenigen Lage $X_0''$ entspricht, welche der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A}$ ist. In diesem Falle tritt die schon oft gefundene parabolische Lage ein und der Kegelschnitt löst sich in die beiden Geraden $BA$ und $\mathfrak{A}$ auf. Dieses Linienpaar bleibt bestehen, auch wenn die Doppelpunkte auf dem Träger $\mathfrak{A}$ nicht reell sind. Wir schliessen hieraus: In

einem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten giebt es nur ein reelles Linienpaar und dasselbe besteht aus der Verbindungslinie der beiden reellen Mittelpunkte und einer bestimmten anderen Geraden $\mathfrak{A}$, welche als die Verbindungslinie der beiden imaginären Mittelpunkte aufgefasst werden kann und ideelle gemeinschaftliche Sekante genannt wird. Nimmt man irgend zwei Kegelschnitte des Büschels $K$ und $K^1$ als gegeben an und haben dieselben die beiden reellen Punkte $A$ und $B$ gemein, so sind wir im Stande, die andere gemeinschaftliche Sekante, d. h. den andern Theil des Linienpaares, dessen einer die reelle gemeinschaftliche Sekante $AB$ ist, zu konstruiren unabhängig davon, ob diese eine reelle oder ideelle gemeinschaftliche Sekante ist; denn wegen der charakteristischen Eigenschaft des Punktsystems haben wir nur nöthig, auf einer beliebigen Transversale $T$ die Schnittpunktenpaare $a$ und $\alpha$, $a^1$ und $\alpha^1$ der Kegelschnitte $K$ und $K^1$ zu merken und in dem Punktsystem, welches durch die beiden Paare konjugirter Punkte $a\alpha$ und $a^1\alpha^1$ bestimmt wird, denjenigen Punkt $\sigma$ zu bestimmen, welcher dem Schnittpunkte $s$ der Geraden $AB$ mit $T$ konjugirt ist; alle Punkte $\sigma$, welche wir auf diese Weise konstruiren, müssen auf einer bestimmten Geraden $\mathfrak{A}$ liegen, welche die gesuchte ist; die Konstruktion eines Punktes $\sigma$ geht aus § 16 unzweideutig hervor entweder vermittelst der Gleichheit der Doppelverhältnisse oder der bekannten Relationen für die Involution von sechs Punkten. Wir können uns aber auch anstatt der Transversale $T$ eines beliebigen Kegelschnitts bedienen, welcher nur durch $A$ und $B$ geht. Sei $\mathfrak{K}$ ein solcher Kegelschnitt, welcher durch $A$ und $B$ geht, übrigens aber ganz willkührlich ist; möge er den Kegelschnitt $K$ in zwei Punkten treffen, deren Verbindungslinie $\mathfrak{B}$ sei, und $K^1$ in zwei Punkten, deren Verbindungslinie $\mathfrak{B}^1$ sei, so wird der Schnittpunkt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^1)$ auf der Geraden $\mathfrak{A}$ liegen; denn bezeichnen wir ihn mit $\sigma$ und ziehen durch $\sigma$ eine Transversale $T$, welche $K$ in $a$ und $\alpha$, $K^1$ in $a^1$ und $\alpha^1$ trifft und die Gerade $AB$ in $s$, endlich den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in $b$ und $\beta$, so sind erstens $a\alpha$, $b\beta$ und $s\sigma$ drei Punktenpaare eines Punktsystems, zweitens auch $a^1\alpha^1$, $b\beta$ und $s\sigma$; beide Punktsysteme müssen identisch sein, weil zwei Paar konjugirte Punkte dieselben sind: $b\beta$ und $s\sigma$; folglich sind auch $a\alpha$, $a^1\alpha^1$ und $s\sigma$ drei Paar konjugirte Punkte dieses Punktsystems; also liegt $\sigma$ auf

der andern gemeinschaftlichen Sekante 𝔄 der beiden Kegelschnitte $K$ und $K^1$; wir können mithin folgenden Satz aussprechen:

**Haben irgend drei Kegelschnitte zwei reelle Punkte gemeinschaftlich oder eine reelle gemeinschaftliche Sekante, so haben je zwei derselben allemal noch eine zweite (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Sekante (die Verbindungslinie der beiden übrigen Schnittpunkte); die auf diese Weise erhaltenen drei geraden Linien laufen durch einen Punkt.**

Hierdurch ist ein einfaches Mittel gegeben, die ideelle gemeinschaftliche Sekante zweier Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, zu konstruiren; sind nämlich $K$ und $K^1$ die beiden gegebenen Kegelschnitte, welche die reellen Schnittpunkte $A$ und $B$ haben, so lege man durch $A$ und $B$ einen beliebigen Kegelschnitt 𝔎, der $K$ in zwei andern Punkten trifft und $K^1$ ebenfalls; die beiden Verbindungslinien dieser je zwei Punkte treffen sich in einem Punkte $\sigma$ derjenigen Geraden 𝔄, welche die gesuchte (ideelle) gemeinschaftliche Sekante der gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K^1$ ist; es reicht also hin, einen zweiten Punkt $\sigma$ vermittelst eines andern Kegelschnitts 𝔎 zu konstruiren, um die Gerade 𝔄 zu erhalten. Halten wir den Kegelschnitt 𝔎 fest und verändern $K$, indem wir ihn sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durchlaufen lassen, so bleibt der Punkt $\sigma$ fest und wir erkennen hieraus die Gültigkeit eines in § 39 für den Fall eines Kegelschnittbüschels mit vier reellen Mittelpunkten bewiesenen Satzes auch in dem Falle, dass nur zwei Mittelpunkte reell und die beiden andern imaginär sind.

Die Bestimmung der Gattung der einzelnen Kegelschnitte, welche in dem Büschel vorkommen, ist bei der hier zu Grunde gelegten Entstehungsart nicht schwieriger, wie bei der in § 38 gegebenen. Um zu entscheiden, ob ein Kegelschnitt des Büschels Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, haben wir nur nachzusehen, wie oft in den beiden projektivischen Strahlbüscheln, welche ihn erzeugen, zwei entsprechende Strahlen parallel laufen: denken wir uns daher zu jedem Strahl $x$ des festen Strahlbüschels $(B)$ eine Parallele durch den entsprechenden Punkt 𝔵 der gegebenen Punktreihe (𝔄) gezogen, so wird diese Parallele die Gerade 𝔊 in einem solchen Punkte $X$ treffen, dass $X$𝔵 und $x$ zwei entsprechende parallele Strahlen sind, also der Kegelschnitt, welcher

dieser Lage von $X$ entspricht, einen unendlich-entfernten Punkt hat. Nun umhüllen aber alle diese Parallelen, welche durch die Punkte $\mathfrak{x}$ den Strahlen $x$ parallel gezogen werden, eine bestimmte Parabel $P^{(2)}$, wie leicht zu erkennen ist, denn die Strahlen $x$ des Strahlbüschels $(B)$ treffen die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ in einer Punktreihe, welche mit der vom Punkte $\mathfrak{x}$ beschriebenen projektivisch ist; die durch $\mathfrak{x}$ parallel dem Strahle $x$ gezogene Gerade verbindet mithin entsprechende Punkte zweier projektivischer Punktreihen und umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente hat, folglich eine Parabel ist. Es ist auch auf andere Weise leicht einzusehen, dass die durch die Punkte einer Punktreihe zu den entsprechenden Strahlen eines mit ihr projektivischen Strahlbüschels gezogenen Parallelen eine Parabel umhüllen, indem man aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse und den durch den Parallelismus gegebenen Proportionen nachweist, dass der gesuchte Ort das Erzeugniss zweier projektivisch-ähnlichen Punktreihen ist. Denken wir uns diese Parabel $P^{(2)}$ hergestellt, so können zwei Fälle eintreten: 1) Die Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet die Parabel $P^{(2)}$ nicht; alsdann sind sämmtliche Kegelschnitte des Büschels Hyperbeln, weil durch jeden Punkt $X$ der Geraden $\mathfrak{G}$ ein Tangentenpaar an die Parabel geht, also der dem Punkte $X$ zugehörige Kegelschnitt des Büschels zwei unendlich-entfernte Punkte hat; oder 2) die Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet die Parabel $P^{(2)}$ in zwei reellen Punkten; alsdann giebt es in dem Kegelschnittbüschel eine Gruppe von Hyperbeln und eine Gruppe von Ellipsen, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; die letzteren gehören denjenigen beiden Punkten $X$ der Geraden $\mathfrak{G}$ zu, in welchen dieselbe von der Parabel $P^{(2)}$ geschnitten wird; die zwischen den beiden Schnittpunkten liegenden Punkte $X$ können nur Ellipsen hervorrufen, da durch sie keine Tangenten der Parabel $P^{(2)}$ gehen; die ausserhalb jener beiden Schnittpunkte, d. h. ausserhalb der Parabel $P^{(2)}$ liegenden Punkte $X$ der Geraden $\mathfrak{G}$ liefern nur Hyperbeln. Im ersten wie im zweiten Falle giebt es nur eine gleichseitige Hyperpel in dem Kegelschnittbüschel; diese entspricht dem Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Leitlinie der Parabel $P^{(2)}$, weil die Leitlinie der Ort aller rechtwinkligen Tangentenpaare an die Parabel ist; in dem besonderen Falle, dass die Gerade $\mathfrak{G}$ die Leitlinie selbst ist, besteht das Büschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, und in dem besonderen Falle, dass

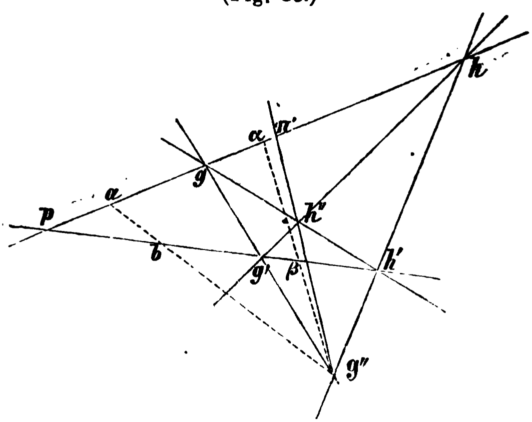
die Gerade 𝔊 die Parabel $P^{(2)}$ berührt, findet sich in dem Büschel, welches aus lauter Hyperbeln besteht, nur eine einzige Parabel vor und die Gruppe von Ellipsen geht vollständig fort. Die Parabel $P^{(2)}$ entscheidet auch darüber, ob das Kegelschnittbüschel vier reelle oder nur zwei reelle und zwei imaginäre Mittelpunkte hat, denn das aus $B$ an diese Parabel gelegte Tangentenpaar trifft die Gerade 𝔄 offenbar in den beiden festen Punkten $C$ und $D$, durch welche sämmtliche Kegelschnitte des Büschels gehen; liegt also der Punkt $B$ ausserhalb der Parabel $P^{(2)}$, so hat das Büschel vier reelle Mittelpunkte, liegt $B$ innerhalb der Parabel, so hat es zwei reelle und zwei imaginäre Mittelpunkte. Wir könnten endlich für den Fall von vier reellen Mittelpunkten auch aus der neuen Entstehungsweise ohne Schwierigkeit das Kriterium herleiten, welches wir in § 38 gefunden haben und wonach aus der relativen Lage der vier Mittelpunkte sofort zu entscheiden ist, welcher der beiden Fälle 1) oder 2), die nach dem Obigen eintreten können, wirklich stattfindet. Doch ist diese Herleitung überflüssig.

## § 41. Erzeugung des Kegelschnittbüschels vermittelst zweier Punktsysteme.

Wir haben im Vorigen zwei Kegelschnittbüschel kennen gelernt, die in ihren charakteristischen Eigenschaften übereinstimmen, aber in den sie bestimmenden Elementen verschieden sind, nämlich das Kegelschnittbüschel mit vier reellen Mittelpunkten und das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten. Die sämmtlichen Kegelschnitte des einen, wie des anderen Büschels haben wir auf reellem Wege konstruiren gelehrt und uns aus diesen Konstruktionen von der Uebereinstimmung der wesentlichen Eigenschaften beider Büschel überzeugt; es giebt nun noch ein drittes Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten und es kommt darauf an, auch für diesen Fall die sämmtlichen Kegelschnitte eines solchen Büschels auf reellem Wege zu konstruiren. Diese Konstruktion muss auch die beiden vorigen Fälle involviren und wir gelangen zu ihr am kürzesten, indem wir von dem Fall, dass die vier Mittelpunkte des Büschels reell sind, ausgehen. Seien $g' h' g'' h''$ vier beliebige Punkte in der Ebene als die Mittelpunkte eines

Kegelschnittbüschels (Fig. 58) gewählt und mögen sich die Seitenpaare $g'g''$ und $h'h''$ in $g$, $g'h''$ und $h'g''$ in $h$ treffen, so wird

(Fig. 58.)




die Gerade $gh$ von sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels, dessen vier Mittelpunkte $g'h'g''h''$ sind, in den konjugirten Punktenpaaren $a\alpha$ eines Punktsystems getroffen, dessen Asymptotenpunkte $g$ und $h$ sind, so dass also immer $a\alpha$ zugeordnete harmonische Punkte zu $g$ und $h$ sind; insbesondere trifft auch das Linienpaar $g'h'$ und $g''h''$ in zwei konjugirten Punkten $p$ und $\pi$ desselben Punktsystems. Wir können also irgend zwei konjugirte Punkte $a\alpha$ dieses Punktsystems als die Mittelpunkte zweier projektivischen Strahlbüschel annehmen, welche einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels erzeugen, und die projektivische Beziehung dieser beiden Strahlbüschel ist vollständig bestimmt, da der Kegelschnitt durch die vier gemeinschaftlichen Mittelpunkte $g'h'g''h''$ gehen soll. Diese beiden den Kegelschnitt erzeugenden projektivischen Strahlbüschel mit den Mittelpunkten $a$ und $\alpha$ treffen nun die Gerade $g'h'$ in zwei projektivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte $g'$ und $h'$ sind; die beiden sich entsprechenden Strahlen $ag''$ und $\alpha g''$ treffen in $b$ und $\beta$ die Gerade $g'h'$ und die Punkte $b\beta$ sind zugeordnet harmonisch zu $g'h'$, weil $a\alpha$ zu $gh$ harmonisch liegen. Hierdurch sind schon drei Paare entsprechender Punkte der beiden projektivischen Punktreihen auf $g'h'$ bekannt, nämlich der Doppelpunkt $g'$, der Doppelpunkt $h'$ und das Punktenpaar $b\beta$, also die ganze projektivische Beziehung ist vollständig bestimmt. Sämmtliche Paare entsprechender Punkte dieser beiden

auf einander liegenden projektivischen Punktreihen bilden, wie leicht zu erkennen ist, ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte $g'h'$ sind; denn umgekehrt besteht ein solches Punktsystem aus zwei auf einander liegenden projektivischen Punktreihen, deren Doppelpunkte die Asymptotenpunkte $g'h'$ sind, und von denen zwei entsprechende Punkte $b\beta$ zugeordnet harmonisch liegen zu $g'h'$. Dieses durch die beiden festen Mittelpunkte $g'h'$ unveränderlich gegebene Punktsystem auf $g'h'$ bestimmt also die projektivische Beziehung zweier Strahlbüschel, die ihre Mittelpunkte in $a$ und $\alpha$ haben und einen Kegelschnitt des Büschels erzeugen; verändern wir das Punktenpaar $a\alpha$ in dem ersten Punktsysteme, dessen Asymptotenpunkte $gh$ sind, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte des Büschels und wir gelangen daher zu folgender neuen Konstruktion derselben, welche allgemein aufgefasst unabhängig davon ist, ob die Mittelpunkte des Büschels reell oder imaginär sind:

Sind auf zwei geraden Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Punktsysteme $(a, \alpha)$ und $(b, \beta)$ beliebig gegeben und man nimmt irgend ein Paar konjugirter Punkte $a\alpha$ des ersten Punktsystems zu Mittelpunkten zweier Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen nach allen Paaren konjugirter Punkte $b\beta$ des andern Punktsystems hingehen, so erzeugen diese beiden Strahlbüschel einen Kegelschnitt $K$, den Ort des Schnittpunktes $(ab, \alpha\beta)$ oder auch $(a\beta, \alpha b)$. Verändert man das Punktenpaar $a\alpha$ auf dem ersten Träger $\mathfrak{A}$, so gehören sämmtliche Kegelschnitte $K$ einem Kegelschnittbüschel an.

In der That, da zwei konjugirte Punkte eines Punktsystems immer zwei entsprechende Punkte zweier auf einander liegender projektivischer Punktreihen sind, so ist der Ort des Schnittpunktes $(ab, \alpha\beta)$ das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel $(a)$ und $(\alpha)$, also ein Kegelschnitt $K$; weil aber beim Punktsystem alle Paare entsprechender gleicher Strecken verkehrt auf einander fallen (§ 16), so ist der Ort des Schnittpunktes $(a\beta, \alpha b)$ derselbe Kegelschnitt $K$. Dieser geht offenbar durch die beiden Asymptotenpunkte $g'h'$ des auf dem Träger $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsystems, wenn dasselbe hyperbolisch ist, und alle Kegelschnitte $K$, die wir bei der Veränderung von $a\alpha$ erhalten, gehen

durch dieselben beiden festen Punkte $g' h'$, welche reell vorhanden sind, sobald das gegebene Punktsystem auf $\mathfrak{B}$ hyperbolisch, dagegen imaginär sind, sobald dasselbe elliptisch ist. Sei ferner in dem Schnittpunkte der beiden Träger ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) ein Punkt $p$ des ersten Punktsystems auf $\mathfrak{A}$ und ein Punkt $\bar{\omega}$ des andern Punktsystems auf $\mathfrak{B}$ vereinigt und seien die zu diesem konjugirten Punkte in dem einen und andern Punktsystem $\pi$ und $o$, so ziehen wir $o\pi = \mathfrak{E}$ eine Gerade, die natürlich immer reell vorhanden sein muss. Nehmen wir jetzt irgend ein Punktenpaar $a\alpha$ des ersten und ein beliebiges Punktenpaar $b\beta$ des zweiten Punktsystems heraus und möge die Gerade $\mathfrak{E}$ von $ab$ in $c$ und von $\alpha\beta$ in $\gamma$ getroffen werden (Fig. 59), so werden, wenn wir zunächst $a$ und $\alpha$ festhalten, aber $b\beta$ bewegen, die Punkte $c$ und $\gamma$ zwei auf einander liegende projektivische Punktreihen durchlaufen und überdies ein Punktsystem bilden, denn ebenso wie dem Punkt $c$ der ersten Punktreihe der Punkt $\gamma$ der zweiten entspricht, muss auch dem Punkt $\gamma$ der ersten Punktreihe der Punkt $c$ der zweiten entsprechen; ziehen wir nämlich $a\gamma$ und $\alpha c$, so treffen dieselben die Gerade $\mathfrak{B}$ in den Punkten $b'\beta'$ eines Paares konjugirter Punkte des auf $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsystems, weil die drei Seitenpaare des Vierecks $a\alpha c\gamma$ die Transversale $\mathfrak{B}$ in drei Punktenpaaren eines Punktsystems treffen müssen, welche sind $b\beta$, $o\bar{\omega}$, $b'\beta'$. Wir sehen also, dass bei den von $c$ und $\gamma$ beschriebenen projektivischen Punktreihen zwei entsprechende gleiche Strecken verkehrt auf einander fallen, mithin $c\gamma$ die konjugirten Punkte eines Punktsystems sind; diesem Punktsystem gehört auch $o$ und $\pi$ als ein Paar konjugirter Punkte und ebenso diejenigen Punkte $c'\gamma'$ an, in welchen $\mathfrak{E}$ von $a\beta$ und $b\alpha$ ge-

(Fig. 59.)

troffen wird. Wenn daher irgend ein auf die oben angegebene Weise konstruirter Kegelschnitt $K$ als das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel aufgefasst wird, welche in einem Paare $a\alpha$ ihre Mittelpunkte haben, so treffen zwei entsprechende Strahlen die Gerade $\mathfrak{C}$ immer in zwei konjugirten Punkten $c\gamma$ eines Punktsystems; es zeigt sich ferner, dass dieses Punktsystem für alle Kegelschnitte $K$ dasselbe bleibt. Denken wir uns nämlich für den Augenblick ein Paar $b\beta$ fest und verändern $a\alpha$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$, so werden $ba$ und $\beta\alpha$ in zwei konjugirten Punkten $c$ und $\gamma$ eines Punktsystems die Gerade $\mathfrak{C}$ treffen, weil $\mathfrak{C}$ durch den Punkt $\pi$ geht, der dem im Schnittpunkte $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ liegenden $p$ konjugirt ist und also auch $b\gamma$ und $\beta c$ in einem Paar konjugirter Punkte $a'\alpha'$ die Gerade $\mathfrak{A}$ treffen müssen; es folgt daraus, dass dieses neue Punktsystem $(c, \gamma)$, welches wir bei Festhaltung von $b$ und $\beta$ auf $\mathfrak{C}$ erhalten, mit dem vorigen identisch ist, weil ein Paar $c\gamma$ und das Paar $o\pi$, welche zur Bestimmung ausreichen, coincidiren. Nehmen wir nun irgend zwei Paare konjugirter Punkte $x\xi$ und $y\eta$ der beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme willkührlich heraus, so werden, weil $ba$ und $\beta\alpha$ in einem Paar konjugirter Punkte $c\gamma$ des eben bestimmten Punktsystems die Gerade $\mathfrak{C}$ treffen, auch $bx$ und $\beta\xi$ in einem andern Paare desselben treffen, und weil $xb$ und $\xi\beta$ in einem solchen Paare treffen, auch $xy$ und $\xi\eta$ in einem neuen Paar konjugirter Punkte. Wir erhalten mithin auf der Geraden $\mathfrak{C}$ ein festes durch die beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme mitbestimmtes Punktsystem $(c, \gamma)$ und sehen, dass, wenn die Verbindungslinie irgend zweier Punkte $x$ und $y$ auf den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die dritte $\mathfrak{C}$ in $z$ trifft, die Verbindungslinie der beiden zu $x$ und $y$ konjugirten Punkte $\xi$ und $\eta$ die Gerade $\mathfrak{C}$ in dem zu $z$ konjugirten Punkte $\zeta$ trifft, so dass $z$ und $\zeta$ ein Punktenpaar des dritten Punktsystems sind. Die drei Punktsysteme $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$ auf den Trägern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ stehen noch in der allgemeineren Beziehung zu einander, dass, wenn man aus jedem derselben ein beliebiges Paar konjugirter Punkte herausnimmt, diese drei Punktenpaare $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$ immer sechs Punkte eines Kegelschnitts sind, wovon die vorige Eigenschaft, dass, wenn $xyz$ in einer Geraden liegen, auch die drei konjugirten $\xi\eta\zeta$ in einer Geraden liegen müssen, nur ein specieller Fall ist. Der allgemeine Fall lässt sich aber so erweisen: Seien $x, \xi$; $y, \eta$; $z, \zeta$

die drei Paar willkührlich gewählten Paare konjugirter Punkte auf 𝔄, 𝔅, ℭ, so treffen $xy$ und $\eta\xi$ die Gerade ℭ in zwei konjugirten Punkten des auf ℭ bekannten Punktsystems; ein zweites Paar konjugirter Punkte sind die Schnittpunkte von $x\xi$ und $y\eta$ mit ℭ, ein drittes Paar endlich $z$ und $\zeta$, folglich gilt die Gleichheit der Doppelverhältnisse der Strahlbüschel:

$$x(\xi, y, z, \zeta) = \eta(y, \xi, \zeta, z)$$

und da nach § 6 identisch:

$$\eta(y, \xi, \zeta, z) = \eta(\xi, y, z, \zeta), \quad \text{also}$$

$$x(\xi, y, z, \zeta) = \eta(\xi, y, z, \zeta),$$

so liegen die sechs Punkte $x\xi y\eta z\zeta$ auf einem Kegelschnitt (§ 28).

Hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der obigen Behauptung, dass das Punktsystem $c\gamma$ für alle Kegelschnitte $K$ dasselbe bleibt. Ist daher dies Punktsystem auf ℭ ein hyperbolisches, mit den beiden Asymptotenpunkten $g''h''$, so müssen sämmtliche Kegelschnitte $K$ durch diese beiden festen Punkte $g''h''$ und ausserdem durch die beiden vorhin ermittelten Punkte $g'h'$, also durch vier feste Punkte gehen; sie bilden mithin ein Kegelschnittbüschel. Da das Punktsystem auf ℭ von den beiden gegebenen Punktsystemen auf 𝔄 und 𝔅 abhängt, so bleibt nur noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen es elliptisch oder hyperbolisch wird, um zu erkennen, wann die beiden festen Mittelpunkte $g''h''$ des Büschels reell und wann sie imaginär sind. Das immer reell vorhandene von den drei Geraden 𝔄𝔅ℭ gebildete Dreiseit bestimmt für jedes der drei Punktsysteme ein Paar konjugirter Punkte, nämlich die beiden Schnittpunkte jeder der drei Geraden mit den beiden andern; sind also die Ecken dieses Dreiseits (Fig. 59) $o$, $\pi$ und $p$ (oder $\tilde{\omega}$) und wir nehmen irgend zwei Punkte $a$ und $b$ innerhalb der Dreiecksseiten 𝔄𝔅, so wird nach dem bekannten Kriterium (§ 16) das Punktsystem auf 𝔄 elliptisch oder hyperbolisch sein, je nachdem der konjugirte Punkt $\alpha$ auf der Verlängerung der Dreiecksseite 𝔄 oder zwischen $\pi p$ liegt, und dasselbe gilt für das Punktsystem auf 𝔅. Die Verbindungslinie $ab$ trifft nun die dritte Dreiecksseite ℭ in $c$, welches ausserhalb $o\pi$ liegt, die Verbindungslinie $\alpha\beta$ dagegen in dem zu $c$ konjugirten Punkte $\gamma$; wenn daher $\alpha$ zwischen $\pi p$ und $\beta$ zwischen $o\tilde{\omega}$ liegt, so trifft $\alpha\beta$ die ℭ ausserhalb $o\pi$; dasselbe findet auch statt, wenn $\alpha$ ausserhalb $\pi p$ und gleichzeitig $\beta$ ausserhalb $o\tilde{\omega}$ liegt; sind also

die beiden Punktsysteme auf 𝔄 und 𝔅 gleichartig, d. h. beide elliptisch oder beide hyperbolisch, so ist das Punktsystem auf 𝔈 hyperbolisch; sind sie dagegen ungleichartig, d. h. eines elliptisch und das andere hyperbolisch, so ist das dritte Punktsystem auf 𝔈 elliptisch. Wir sehen hieraus, dass von den drei Punktsystemen auf 𝔄𝔅𝔈 nothwendig entweder alle drei hyperbolisch oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein müssen. Wir können daher folgende vier Fälle unterscheiden:

| Punktsystem auf 𝔄: | Punktsystem auf 𝔅: | Das Kegelschnittbüschel hat: |
|---|---|---|
| I. hyperbolisch | hyperbolisch | vier reelle Mittelpunkte $g' h'$ $g'' h''$ |
| II. hyperbolisch | elliptisch | vier imaginäre Mittelpunkte |
| III. elliptisch | hyperbolisch | zwei reelle Mittelpunkte $g'$ $h'$ |
| IV. elliptisch | elliptisch | zwei reelle Mittelpunkte $g''$ $h''$ |

und in diesen vier Fällen ist:

| | das Punktsystem auf 𝔈: |
|---|---|
| I. | hyperbolisch |
| II. | elliptisch |
| III. | elliptisch |
| IV. | hyperbolisch. |

Wir sehen hieraus, dass nur in dem Falle I drei reelle Linienpaare unter den Kegelschnitten des Büschels auftreten, dass aber in jedem der drei übrigen Fälle nur ein und immer ein Linienpaar 𝔅, 𝔈 in dem Büschel vorkommt. Dieses Linienpaar geht nämlich hervor, wenn das besondere Punktenpaar $p\pi$ zu Mittelpunkten zweier erzeugenden Strahlbüschel gewählt wird, wobei dann wieder der parabolische Fall projektivischer Beziehung eintritt (§ 19); sonst kann der Kegelschnitt $K$ auf keine andere Weise in ein Linienpaar zerfallen, als wenn die Mittelpunkte der ihn erzeugenden Strahlbüschel $a$ und $\alpha$ zusammenfallen, also das Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch ist, und auch dann wird ein solches Linienpaar nur reell vorhanden sein, wenn gleichzeitig das Punktsystem auf 𝔅 hyperbolisch ist, also im Falle (I), wie leicht zu erkennen. Zugleich sehen wir, dass in diesem vollständig reellen Falle die sechs Asymptotenpunkte zu je dreien auf vier Geraden liegen, also ein vollständiges Vierseit bilden, dessen drei Diagonalen die Geraden 𝔄𝔅𝔈 sind. Hieraus ergiebt sich

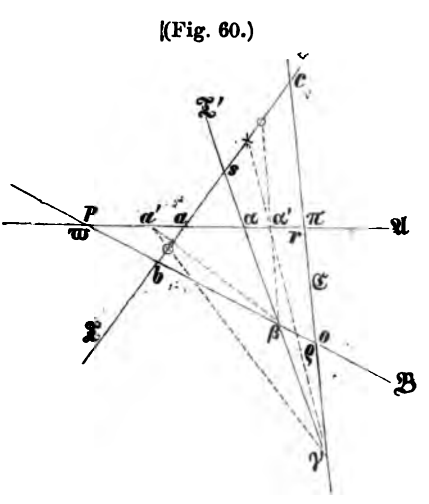
beiläufig der elementare Satz: Sind die drei Gegenecken eines vollständigen Vierseits $gh$, $g'h'$, $g''h''$ und trifft irgend eine Gerade in der Ebene diese drei Diagonalen $gh$, $g'h'$, $g''h''$ beziehlich in den Punkten $ss's''$, so liegen die zugeordneten vierten harmonischen Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ zu jenen, indem jedes Paar Gegenecken das andere Paar zugeordnet-harmonischer Punkte ist, allemal in einer neuen Geraden. (Crelle's Journal Bd. III Seite 212. Aufgabe und Lehrsätze von J. Steiner.)

Das vorhin gefundene Resultat, dass die Kegelschnitte $K$ des Büschels sämmtlich durch die Asymptotenpunkte der auf den Trägern 𝔅 und ℭ befindlichen Punktsysteme $(b, \beta)$ und $(c, \gamma)$ hindurchgehen, falls diese Punktsysteme oder eines von ihnen hyperbolisch sind, lässt sich etwas anders aussprechen und wird dadurch unabhängig von der Natur der beiden Punktsysteme. Es ist ersichtlich, dass die beiden festen Punktsysteme auf 𝔅 und ℭ in Bezug auf jeden Kegelschnitt $K$ des Büschels diejenigen sind, welche diesem Kegelschnitt zugehören (§ 29), d. h. für alle Kegelschnitte $K$ sind $b$ und $\beta$ ein Paar konjugirte Punkte (§ 30) oder die Polare von $b$ geht durch $\beta$ und ebenso ist es mit $c, \gamma$; denn nehmen wir irgend ein Paar Punkte $a\alpha$ auf 𝔄 als Mittelpunkte der den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Strahlbüschel, so sind die Schnittpunkte $(ab, \alpha\beta)$ und $a\beta, \alpha b)$ zwei Punkte dieses Kegelschnitts, der auch durch $a$ und $\alpha$ geht, und das Viereck im Kegelschnitt hat $b$ und $\beta$ zu zwei Diagonalpunkten, folglich sind es konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt (§ 30). Also für sämmtliche Kegelschnitte $K$ des Büschels ist das auf 𝔅 befindliche Punktsystem $(b, \beta)$ und ebenfalls das auf ℭ befindliche Punktsystem $(c, \gamma)$ dasjenige, welches jedem Kegelschnitt zugehört. Diese Eigenschaft involvirt die obige, dass, wenn eines oder beide Punktsysteme hyperbolisch sind, sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durch die Asymptotenpunkte gehen müssen; sie bleibt aber auch bestehen, wenn eines oder beide Punktsysteme elliptisch sind, und ist überhaupt unabhängig von der besonderen Natur dieser Punktsysteme; sie wirft auch ein klareres Licht auf die hier betrachtete Entstehungsart des Kegelschnittbüschels, denn anstatt von den beiden willkührlich angenommenen Punktsystemen $(a, \alpha)$ und $(b, \beta)$ auf den Trägern 𝔄 und 𝔅 auszugehen, können wir die beiden

festen Punktsysteme $(b, \beta)$ und $(c, \gamma)$ auf den Trägern $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ als gegeben ansehen; dadurch ist das Punktsystem $(a, \alpha)$ auf $\mathfrak{A}$ vollständig mitbestimmt, wie aus der vorigen Betrachtung hervorgeht, und beliebig viele Paare konjugirter Punkte sind leicht zu konstruiren. Wir können also folgendes Ergebniss aussprechen: Sind zwei feste Punktsysteme $(b, \beta)$ und $(c, \gamma)$ auf den geraden Trägern $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gegeben, so bilden sämmtliche Kegelschnitte in der Ebene, für welche diese Punktsysteme die ihnen zugehörigen sind (d. h. jedes Paar konjugirter Punkte eines Punktsystems ein Paar konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt), ein Kegelschnittbüschel, und zwar hat dasselbe vier reelle Mittelpunkte, die Asymptotenpunkte der beiden Punktsysteme, sobald dieselben hyperbolisch sind, zwei reelle und zwei imaginäre Mittelpunkte, sobald eines der beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch, das andere elliptisch ist, und vier imaginäre Mittelpunkte, wenn beide Punktsysteme elliptisch sind. Diejenige Gerade $\mathfrak{A}$, welche die konjugirten Punkte zu den in dem Schnittpunkte $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = o$ vereinigten Punkten verbindet, ist die Polare von $o$ für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels; irgend zwei Verbindungslinien $bc$ und $\beta\gamma$ treffen $\mathfrak{A}$ beziehlich in zwei Punkten $a$ und $\alpha$, welche konjugirte Punkte eines und desselben festen Punktsystems $(a, \alpha)$ auf $\mathfrak{A}$ sind, und zwar desjenigen, in welchem das Kegelschnittbüschel die Gerade $\mathfrak{A}$ schneidet; hiernach lassen sich sämmtliche Kegelschnitte des Büschels auf reelle Weise konstruiren, wie oben angegeben ist, mögen die Mittelpunkte des Büschels reell oder imaginär sein. Die Träger $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ selbst bilden ein Linienpaar, welches ein besonderer Kegelschnitt des Büschels ist.

Die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass eine beliebige Transversale in der Ebene desselben von jedem Kegelschnitte des Büschels in je zwei konjugirten Punkten eines Punktsystems getroffen wird, lässt sich nun auch aus dieser neuen Konstruktion des Büschels nachweisen und bleibt also bestehen, ob die Mittelpunkte des Büschels alle vier reell oder nur

zwei oder keiner reell vorhanden ist. Treffe (Fig. 60) eine beliebige gerade Transversale $\mathfrak{T}$ die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in den resp. Punkten $abc$ und seien $\alpha\beta\gamma$ die zu diesen konjugirten Punkte in den drei auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ befindlichen Punktsystemen, so liegen nach dem Vorigen $\alpha\beta\gamma$ in einer neuen Geraden $\mathfrak{T}^1$ und der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}^1$ sei $s$. Nehmen wir nun ein beliebiges Punktenpaar $a^1\alpha^1$ des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems zu Mittelpunkten zweier projektivischen Strahlbüschel, welche einen Kegelschnitt $K$ des Büschels erzeugen, so werden leicht vier Paare entsprechender Strahlen dieser beiden Strahlbüschel anzugeben sein, nämlich die folgenden:


(Fig. 60.)

$$a^1(b,\ \beta,\ c,\ \gamma) \text{ und } \alpha^1(\beta,\ b,\ \gamma,\ c).$$

Die Doppelverhältnisse dieser beiden Strahlbüschel von je vier Strahlen sind also gleich und weil identisch:

$$\alpha^1(\beta,\ b,\ \gamma,\ c) = \alpha^1(b,\ \beta,\ c,\ \gamma) \text{ ist (§ 6, 1),}$$

so folgt:

$$a^1(b,\ \beta,\ c,\ \gamma) = \alpha^1(b,\ \beta,\ c,\ \gamma),$$

d. h. die sechs Punkte $a^1\alpha^1 b\beta c\gamma$ liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ (der offenbar nicht zum Büschel gehört). Fassen wir aber die vier Punkte $a^1\alpha^1\beta\gamma$ dieses Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ auf, so lassen sich durch dieselben drei Linienpaare legen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ selbst und diese drei Linienpaare bestimmen nun auf der Transversale $\mathfrak{T}$ vier Paare konjugirter Punkte eines gewissen Punktsystems (§ 39), nämlich das Paar $bc$, das Paar $as$ und die Schnittpunkte der $\mathfrak{T}$ mit den Linienpaaren $a^1\beta$, $\alpha^1\gamma$ und $a^1\gamma$, $\alpha^1\beta$, welche wir nicht besonders bezeichnen wollen. Diese beiden letzten Punktenpaare, welche das Punktsystem vollständig bestimmen, liegen gleichzeitig mit denjenigen beiden Punkten $xy$ in Involution, in denen der Kegelschnitt $K$ die Transversale $\mathfrak{T}$ trifft, denn wegen der

Projektivität der beiden den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Strahlbüschel müssen die Doppelverhältnisse gleich sein:

$$a^1(b,\ \gamma,\ x,\ y) = \alpha^1(\beta,\ c,\ x,\ y)$$
$$= \alpha^1(c,\ \beta,\ y,\ x) \qquad (\S\ 6,\ 1).$$

Die vier Strahlen $a^1(b\gamma xy)$ treffen also $\mathfrak{T}$ in vier Punkten, deren Doppelverhältniss gleich demjenigen zwischen den vier Punkten ist, in welchen die andern vier Strahlen $\alpha^1(c\beta yx)$ dieselbe treffen, und da zwei entsprechende gleiche Strecken ($xy$ und $yx$) verkehrt auf einander fallen, so erhalten wir auf $\mathfrak{T}$ ein Punktsystem, dessen eines Paar konjugirter Punkte $xy$, ein zweites Paar $bc$ und ein drittes Paar die Schnittpunkte des Linienpaares $a^1\gamma$, $\alpha^1\beta$ sind. Dieses Punktsystem ist identisch mit dem vorhin ermittelten, weil zwei Punktenpaare dieselben sind; in ähnlicher Weise können wir aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$a^1(\beta,\ c,\ x,\ y) = \alpha^1(b,\ \gamma,\ x,\ y) = \alpha^1(\gamma,\ b,\ y,\ x)$$

schliessen, dass $bc$, $xy$ und die Schnittpunkte des Linienpaares $a^1\beta$, $\alpha^1\gamma$ mit $\mathfrak{T}$ sechs Punkte in Involution sind, was übrigens nicht mehr nöthig ist. Wir sehen also, dass die sechs Punkte $bc$, $as$, $xy$ Involution bilden, und verändern wir das Punktenpaar $a^1\alpha^1$, also den Kegelschnitt $K$, so erkennen wir, weil $bc$ und $as$ unverändert bleiben, dass sämmtliche Kegelschnitte $K$ des Büschels die Transversale $\mathfrak{T}$ in Paaren konjugirter Punkte eines Punktsystems schneiden w. z. b. w. Die Schnittpunkte $bc$ entsprechen dem besonderen Kegelschnitt $K$, welcher in das Linienpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ degenerirt, und die Schnittpunkte $as$ demjenigen Kegelschnitt $K$, welcher als das Erzeugniss zweier projektivischer Strahlbüschel auftritt, deren Mittelpunkte $a$ und $\alpha$ sind.

Aus der hierdurch nachgewiesenen Grundeigenschaft des Kegelschnittbüschels ergiebt sich nun auch unabhängig davon, ob dasselbe reelle oder paarweise imaginäre Mittelpunkte hat, die Folgerung, dass durch jeden beliebigen Punkt der Ebene ein und immer nur ein einziger reeller Kegelschnitt geht, welcher dem Büschel angehört; denn ziehen wir durch einen beliebigen Punkt der Ebene $P$ eine Transversale, so fixiren die Kegelschnitte des Büschels auf ihr ein Punktsystem, welches schon durch irgend zwei Paare konjugirter Punkte bestimmt wird. Der dem Punkte $P$ konjugirte Punkt des Punktsystems auf dieser Transversale gehört dem einzigen Kegelschnitt des

Büschels an, welcher durch $P$ geht, und drehen wir die Transversale um $P$, so erhalten wir als Aufeinanderfolge der konjugirten Punkte den ganzen reell vorhandenen Kegelschnitt. Es können aber durch $P$ keine zwei verschiedenen Kegelschnitte des Büschels gehen, denn sonst müsste es in einem Punktsystem zu irgend einem Punkte mehr als einen konjugirten Punkt geben, was der Natur des Punktsystems widerspricht.

Es folgt ferner, dass das Kegelschnittbüschel durch zwei beliebig in der Ebene anzunehmende Kegelschnitte vollständig bestimmt ist, weil durch dieselben auf jeder Transversale das Punktsystem durch zwei Paar konjugirte Punkte bestimmt wird. Aber eine solche Transversale $\mathfrak{T}$ in der Ebene braucht nicht von jedem Kegelschnitte des Büschels getroffen zu werden, oder es kann auch imaginäre Punktenpaare eines Punktsystems geben. Um dieses Verhalten klarer zu übersehen, denken wir uns die beiden Schnittpunkte der Transversale $\mathfrak{T}$ mit einem Kegelschnitte des Büschels als die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $\mathfrak{T}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K$ zugehört (§ 29); ist dieses Punktsystem hyperbolisch, so sind die Schnittpunkte reell, ist es elliptisch, so sind sie imaginär. Für jeden Kegelschnitt $K$ erhalten wir also auf der Transversale $\mathfrak{T}$ ein anderes Punktsystem und alle diese unendlich vielen Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ stehen in dem Zusammenhange mit einander, dass ihre Asymptotenpunkte selbst ein Punktsystem ($x$, $\mathfrak{x}$) bilden, welches von dem Kegelschnittbüschel auf $\mathfrak{T}$ ausgeschnitten wird. Nehmen wir nun einen beliebigen Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ in der Ebene und verlegen in irgend einen Punkt $B$ desselben die Mittelpunkte von Strahlsystemen, welche mit den auf $\mathfrak{T}$ befindlichen unendlich vielen Punktsystemen perspektivisch liegen, so wird, wenn wir ein Strahlsystem der Art bilden, jedes Paar konjugirter Strahlen eine Sehne auf $\mathfrak{K}$ ausschneiden, die durch einen festen Punkt $P$ läuft (§ 31), und wir verwandeln also ein jedes Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ in einen Punkt $P$ oder ein einfaches Strahlbüschel ($P$). Ist das betrachtete Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch, so muss $P$ ausserhalb des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}$ liegen, nämlich der Schnittpunkt der beiden Tangenten sein in denjenigen Punkten, in welchen die Asymptoten des in $B$ befindlichen mit jenem Punktsystem perspektivischen Strahlsystems den $\mathfrak{K}$ treffen. $P$ ist also jedesmal

der Pol derjenigen Geraden, welche die beiden Schnittpunkte des Hülfskegelschnitts mit den Strahlen, welche von $B$ nach den beiden Asymptotenpunkten eines auf $\mathfrak{T}$ befindlichen Punktsystems hinlaufen, verbindet. Da nun diese Asymptotenpunkte selbst ein Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, welches durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, bilden, so laufen die Sehnen alle durch einen festen Punkt $O$ und der Punkt $P$ bewegt sich also auf einer festen Geraden $\mathfrak{L}$, der Polare von $O$ in Bezug auf den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$. Alle Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ sind also in die sämmtlichen Punkte $P$ einer bestimmten Geraden $\mathfrak{L}$ verwandelt, der Art, dass, wenn wir nunmehr von irgend einem Punkte $P$ der Geraden $\mathfrak{L}$ die Polare konstruiren und ihre Schnittpunkte auf $\mathfrak{K}$ mit $B$ verbinden, dieses Strahlenpaar die Transversale $\mathfrak{T}$ in einem Punktenpaar $(x, \mathfrak{x})$ trifft. Hieraus zeigt sich, dass, wenn das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{T}$ elliptisch ist, der Punkt $O$ innerhalb des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}$ liegen muss, also die Gerade $\mathfrak{L}$ denselben gar nicht trifft, mithin alle unendlich vielen Punktsysteme auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch sind, oder was dasselbe sagt: Alle Kegelschnitte des Büschels treffen eine Transversale $\mathfrak{T}$ in reellen Punktenpaaren, sobald das Punktsystem auf $\mathfrak{T}$ elliptisch ist, welches die Schnittpunkte je eines Kegelschnitts des Büschels zu einem Paar konjugirter Punkte hat. Wenn dagegen das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $\mathfrak{T}$ hyperbolisch ist, so liegt $O$ ausserhalb des Hülfskegelschnitts $\mathfrak{K}$, die Gerade $\mathfrak{L}$ schneidet ihn daher in zwei reellen Punkten, welche die beiden Gebiete auf $\mathfrak{L}$ abgrenzen, innerhalb deren solche Punkte $P$ liegen, die reelle Tangentenpaare an $\mathfrak{K}$ zulassen, und solche $P$, durch welche keine Tangente geht. Von den unendlich vielen Punktsystemen auf $\mathfrak{T}$ ist also eine Gruppe hyperbolisch und die andere elliptisch. Den Uebergang bilden zwei parabolische Punktsysteme, welche den Asymptotenpunkten des Punktsystems $(x, \mathfrak{x})$ zugehören, oder es giebt zwei Kegelschnitte des Büschels, welche die Transversale $\mathfrak{T}$ berühren, wie hinlänglich bekannt ist. Ist also das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$, welches von den Kegelschnitten eines Büschels auf einer Transversale $\mathfrak{T}$ ausgeschnitten wird, hyperbolisch, so treffen nicht alle Kegelschnitte desselben die $\mathfrak{T}$ in reellen Punktenpaaren. Das hyperbolische Punktsystem hat also auch imaginäre Paare konjugirter Punkte, was beim elliptischen Punkt-

system nicht der Fall ist. Ist das Punktsystem ($x$, $\mathfrak{x}$) auf der Transversale $\mathfrak{T}$ hyperbolisch und sind $p$ und $q$ die Asymptotenpunkte desselben, so muss jedes reelle Schnittpunktenpaar eines Kegelschnitts des Büschels mit $\mathfrak{T}$ ein Paar zugeordnet-harmonischer Punkte mit $p$ und $q$ sein; diese Eigenschaft hört aber auf, wenn das Schnittpunktenpaar imaginär ist; wir können an ihre Stelle eine allgemeinere Eigenschaft setzen, welche jene nicht nur ersetzt, sondern auch von der Realität der Schnittpunkte unabhängig ist, nämlich folgende: Die Asymptotenpunkte $pq$ des auf der Transversale $\mathfrak{T}$ durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnittenen Punktsystems sind ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt, wenn wir irgend zwei Kegelschnitte des Büschels auffassen, deren jeder auf der Transversale $\mathfrak{T}$ ein bestimmtes ihm zugehöriges Punktsystem inducirt, dass diese beiden Punktsysteme ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte haben, die Asymptotenpunkte des auf $\mathfrak{T}$ durch das Kegelschnittbüschel ausgeschnittenen Punktsystems ($x$, $\mathfrak{x}$), und umgekehrt, sobald zwei das Kegelschnittbüschel bestimmende Kegelschnitte gegeben sind und eine Transversale $\mathfrak{T}$, von welcher nicht erforderlich ist, dass sie die beiden Kegelschnitte in reellen Punkten treffe, so wird das Punktsystem ($x$, $\mathfrak{x}$) auf $\mathfrak{T}$ dadurch gefunden werden können, dass wir das gemeinschaftliche Paar konjugirter Punkte der beiden auf $\mathfrak{T}$ durch die beiden gegebenen Kegelschnitte inducirten Punktsysteme aufsuchen (§ 16); ist dieses $pq$ gefunden, so werden $pq$ die Asymptotenpunkte des Punktsystems ($x$, $\mathfrak{x}$) sein, welches dadurch vollständig bestimmt ist. Das Kegelschnittbüschel besitzt also folgende Eigenschaft: Alle Punktsysteme, welche auf einer beliebigen Transversale als den verschiedenen Kegelschnitten des Büschels zugehörig inducirt werden, haben ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte, nämlich die Asymptotenpunkte des auf der Transversale durch die Kegelschnitte des Büschels ausgeschnittenen Punktsystems ($x$, $\mathfrak{x}$). Diese Eigenschaft wird später bei den Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels noch näher erörtert werden (§ 46). Es drängt sich hiernach die noch zu erledigende Frage auf, ob aus der in diesem Paragraphen angegebenen Erzeugungsweise des Kegelschnittbüschels in allen vier oben unter-

schiedenen Fällen sämmtliche Kegelschnitte hervorgehen, die in dem Büschel enthalten sind. Dies ist nach dem Vorigen evident in den Fällen III und IV, wo das erzeugende Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ elliptisch ist; in den Fällen I und II aber, wo es hyperbolisch ist, fragt es sich, ob für jeden Punkt $s$ der Ebene der durch $s$ gehende einzige Kegelschnitt, welcher zum Büschel gehört, durch zwei projektivische Strahlbüschel erzeugt werden kann, welche ihre Mittelpunkte in einem Paar konjugirter Punkte $a$ und $\alpha$ des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems haben, oder ob durch $s$ zwei solche Strahlen $ab$ und $\alpha\beta$ gehen, deren Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, nämlich $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paar konjugirte Punkte der beiden auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegebenen Punktsysteme sind. Legen wir durch $s$ zwei Strahlsysteme perspektivisch mit $(a, \alpha)$ und $(b, \beta)$, so haben dieselben (nach § 16 und § 31) ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Strahlen, sobald eines der beiden Strahlsysteme elliptisch ist, also immer in den Fällen II, III, IV; sind dagegen beide hyperbolisch, also im Falle I so haben sie nur dann ein gemeinsames Paar, wenn die Asymptoten des einen durch die des andern nicht getrennt werden, im andern Falle keins. Mithin werden in der That durch unsere Konstruktion in dem Falle I nicht sämmtliche Kegelschnitte des Büschels erhalten; dies ist aber gerade der bequemste Fall von vier reellen Mittelpunkten, welcher am einfachsten durch die in § 38 ausgeführte Betrachtung erledigt wird. In dem Falle II eines Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Mittelpunkten, für den die in diesem Paragraphen mitgetheilte Konstruktion die einzige war, zeigt sich also, dass dieselbe sämmtliche (reellen) Kegelschnitte des Büschels liefert; denn es giebt durch irgend einen reellen Punkt $s$ der Ebene nur einen Kegelschnitt des Büschels; dieser ist unter den von uns konstruirten enthalten, weil durch $s$ ein Paar reelle Strahlen $sab$ und $s\alpha\beta$ gehen, wenn (im Falle II) das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, auf $\mathfrak{B}$ elliptisch ist; die Strahlbüschel $(a)$ $(\alpha)$ erzeugen aber diesen Kegelschnitt. Mithin darf ein Kegelschnitt des Büschels, dessen Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ imaginär wären, überhaupt keinen reellen Punkt $s$ haben, muss also ganz imaginär sein. Diese eigenthümliche Erscheinung, dass durch die oben mitgetheilte reelle Konstruktion des Kegelschnittbüschels mit vier imaginären Mittelpunkten sämmtliche reellen Kegelschnitte des Büschels erhalten werden, obwohl das erzeugende Punktsystem

auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch ist, hat ihren Grund in der besonderen Beziehung, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ zu dem Kegelschnittbüschel hat. In diesem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten kommt nämlich ein reelles Linienpaar $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, dessen Schnittpunkt $o$ ist, und zwei imaginäre Linienpaare vor, deren jedes einen reellen (Doppel-) Punkt hat; die letzteren sind die Asymptotenpunkte $g$ und $h$ des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen hyperbolischen Punktsystems; jeder dieser beiden Punkte ist als ein Kegelschnitt (Null-Kegelschnitt, analog den Null-Kreisen oder Grenzpunkten einer Kreisschaar mit ideeller gemeinschaftlicher Sekante), der sich auf einen Punkt zusammengezogen hat, oder als ein imaginäres Linienpaar (§ 25) anzusehen, weil das Strahlsystem $g$ $(b, \beta)$ elliptisch ist, ebenso $h$ $(b, \beta)$. Die Gerade $\mathfrak{A}$ hat also die eigenthümliche Beziehung zum Kegelschnittbüschel, dass sie die beiden Nullkegelschnitte enthält. Sie ist zugleich die Polare des Punktes $o$ für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, weil, wie leicht zu sehen ist aus der angegebenen Konstruktion, die beiden Tangenten in $a$ und $\alpha$ für einen Kegelschnitt des Büschels durch $o$ gehen. Ist das Punktsystem $(a, \alpha)$ auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, was in den Fällen (I) und (II), d. h. bei einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen und bei einem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten eintritt, so sind die beiden Asymptotenpunkte $g$ und $h$ harmonisch zugeordnet zu jedem Schnittpunktenpaar $a\alpha$, also konjugirte Punkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Büschels; da nun $\mathfrak{A}$ die Polare von $o$ ist, so sind die drei Punkte $ogh$ ein Tripel konjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels; also ebenso wie bei dem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Mittelpunkten die drei Diagonalpunkte des von jenen gebildeten vollständigen Vierecks oder die Doppelpunkte der drei reellen in dem Kegelschnittbüschel enthaltenen Linienpaare ein gemeinschaftliches Tripel konjugirter Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels sind, giebt es auch bei dem Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten ein reelles gemeinschaftliches Tripel konjugirter Punkte $(o, g, h)$ für alle Kegelschnitte des Büschels; der eine Tripelpunkt ist der Durchschnittspunkt des einzigen reellen Linienpaares, welches in dem Büschel enthalten ist; die beiden andern Tripelpunkte sind jeder als der Durchschnittspunkt eines imaginären Linienpaares anzusehen. Bei dem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären

Mittelpunkten ist von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Punkt ($o$), der Doppelpunkt des einzigen im Büschel enthaltenen Linienpaars und die Polare von ihm ($\mathfrak{A}$) reell, die beiden andern Tripelpunkte auf ihr ($g$ und $h$) sind imaginär.

## § 42. Ueber die besondere Natur der in einem Büschel enthaltenen Kegelschnitte.

Die Frage, wie viel Hyperbeln, Parabeln, Ellipsen in einem Kegelschnittbüschel vorkommen, ist zwar schon in §§ 38 und 40 für den Fall, dass dasselbe vier oder wenigstens zwei reelle Mittelpunkte besitzt, beantwortet worden, soll aber hier noch einmal unabhängig davon, ob die Mittelpunkte reell oder paarweise imaginär sind, allgemeiner und umfassender erörtert werden, indem wir nur die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass jede geradlinige Transversale dasselbe in einem Punktsystem schneidet, welche oben für alle Fälle erwiesen ist, voraussetzen. Nehmen wir nämlich statt einer solchen willkührlichen Transversale die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$, so wird auch auf ihr durch das Büschel ein bestimmtes Punktsystem ($x$, $\mathfrak{x}$) fixirt. Dieses ist durch zwei Paar konjugirte Punkte vollständig bestimmt; setzen wir die Entstehungsart des Kegelschnittbüschels im vorigen Paragraphen voraus, so können wir zwei reelle Paare konjugirter Punkte des Punktsystems ($x$, $\mathfrak{x}$) auf $G_\infty$ dadurch erhalten, dass wir einmal die beiden unendlich-entfernten Punkte des einen immer reellen Linienpaars ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) als ein Paar nehmen und zweitens den unendlich-entfernten Punkt des Trägers $\mathfrak{A}$ und den unendlich-entfernten Punkt derjenigen Geraden $\mathfrak{M}$ als zweites Paar wählen, welche die Mittelpunkte der drei Punktsysteme auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ enthält; der Mittelpunkt des Punktsystems ($a$, $\alpha$) und sein konjugirter, der unendlich-entfernte auf $\mathfrak{A}$ sind nämlich die Mittelpunkte zweier eine Hyperbel erzeugenden projektivischen Strahlbüschel und der andere unendlich-entfernte Punkt dieser Hyperbel liegt im Unendlichen der Geraden $\mathfrak{M}$, welche die Mittelpunkte der gegebenen Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verbindet. Ist das Punktsystem ($x$, $\mathfrak{x}$) auf $G_\infty$ bekannt, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, so können wir unmittelbar daraus auf die Natur der Kegelschnitte schliessen, welche in dem Büschel enthalten sind; jede Hyperbel des Büschels schneidet nämlich $G_\infty$ in zwei reellen konjugirten Punkten dieses Punktsystems, jede

Ellipse in zwei imaginären und eine Parabel in zwei zusammenfallenden. Es giebt also in dem Kegelschnittbüschel allemal **zwei Parabeln**, sobald das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ hyperbolisch ist; die Asymptotenpunkte desselben sind die Berührungspunkte dieser Parabeln, sie bestimmen die Richtungen ihrer Axen; es giebt dagegen **keine Parabel** in dem Büschel, sobald das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ elliptisch ist; ist es insbesondere parabolisch, d. h. fallen die beiden Asymptotenpunkte zusammen (§ 16), so ist dieser Punkt einer der vier Mittelpunkte des Büschels, welches dann nur eine Parabel enthält. Wir können nun ein genaueres Kriterium dafür ermitteln, wann das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ elliptisch und wann es hyperbolisch ist; da nämlich die Geraden 𝔅 und ℭ ein Paar konjugirte Richtungen und die Geraden 𝔄 und 𝔐 ein zweites Paar konjugirte Richtungen für das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ bestimmen, so ist nachzusehen, ob die ersten beiden Richtungen durch die andern beiden getrennt werden oder nicht; im ersten Falle wird das Punktsystem elliptisch, im zweiten Falle hyperbolisch sein; wir haben also nur durch den Schnittpunkt (𝔅, ℭ) eine Parallele zu 𝔐 zu ziehen und nachzusehen, ob dieselbe zwischen den Punkten $p$ und $\pi$ (Fig. 60) durchgeht oder nicht; im ersten Falle ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, im andern hyperbolisch. Wir werden nun alle vier (§ 41) unterschiedenen Fälle ins Auge zu fassen haben, um die Lage der Geraden 𝔐 zu bestimmen. Fassen wir das von den drei Geraden 𝔄𝔅ℭ gebildete Dreieck auf, dessen Ecken paarweise konjugirte Punkte für jedes der drei Punktsysteme auf 𝔄𝔅ℭ sind, und bezeichnen demgemäss diese Ecken doppelt mit $p$ und $\tilde{\omega}$, $\pi$ und $r$, $\varrho$ und $o$, sodass die Paare $p$ und $\pi$ auf 𝔄, $o$ und $\tilde{\omega}$ auf 𝔅, $r$ und $\varrho$ auf ℭ konjugirte Punkte sind (Fig. 60); bezeichnen wir ferner die drei Mittelpunkte der Punktsysteme, welche in der Geraden 𝔐 liegen, beziehlich mit $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$, $\mathfrak{m}_c$, so wird, wenn das Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch ist, $\mathfrak{m}_a$ ausserhalb $p\pi$ liegen, wenn es elliptisch ist, zwischen $p\pi$ und ebenso bei den beiden andern; von den Asymptotenpunkten liegt aber immer einer zwischen jedem Paar konjugirter und der andere ausserhalb; endlich wird jede Seite des Dreiecks durch die beiden in ihr befindlichen Ecken in ein endliches Stück und zwei unendliche zerlegt, z. B. 𝔄 in die drei Strecken $p$ bis $\infty$, $\pi$ bis $\infty$ und $p$ bis $\pi$. Dies festgehalten, haben wir jetzt:

I. Das Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch, 𝔅 hyperbolisch, ℭ hyperbolisch; das Kegelschnittbüschel hat vier reelle Mittelpunkte, die Asymptotenpunkte auf 𝔅 und ℭ. Die Mittelpunktlinie 𝔐 muss alle drei Dreiecksseiten in ihren Verlängerungen treffen, d. h. 𝔐 trifft entweder

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 𝔅 | in der Strecke | von | $\tilde{\omega}$ | bis | $\infty$ | und | ℭ | von | $\varrho$ | bis | $\infty$ |
| oder 2) | 𝔅 | - | - | $o$ | - | $\infty$ | - | ℭ | - | $r$ | - | $\infty$ |
| - 3) | 𝔅 | - | - | $\tilde{\omega}$ | - | $\infty$ | - | ℭ | - | $r$ | - | $\infty$ |
| - 4) | 𝔅 | - | - | $o$ | - | $\infty$ | - | ℭ | - | $\varrho$ | - | $\infty$; |

in den beiden Fällen 1) und 2) wird eine mit 𝔐 parallel durch $o$ gelegte Gerade zwischen $p\pi$ durchgehen, in den Fällen 3) und 4) ausserhalb; also in 1) und 2) ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, in 3) und 4) hyperbolisch. Die beiden ersten Fälle unterscheiden sich aber von den beiden letzten rücksichtlich der Lage der vier Asymptotenpunkte (der Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels) folgendermassen: In den beiden ersten Fällen trennt die Verbindungslinie zweier die beiden andern, wogegen die Verbindungslinie der letzteren die beiden ersteren nicht trennt; in den Fällen 3) und 4) trennt die Verbindungslinie zweier die beiden andern nicht und auch die Verbindungslinie der letzteren die ersteren nicht, oder es trennt gleichzeitig die Verbindungslinie zweier die beiden andern und die Verbindungslinie der letzteren die beiden ersten. Dies lässt sich auch so aussprechen: In den Fällen 1) und 2) liegen die vier Asymptotenpunkte auf 𝔅 und ℭ (Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels) so, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet, und das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ ist dann elliptisch; in den Fällen 3) und 4) liegen die vier Punkte so, dass jeder ausserhalb des von den drei anderen gebildeten Dreiecks sich befindet, und das Punktsystem $(x, \xi)$ ist dann hyperbolisch. Dies stimmt mit unserem früher (§ 38) gefundenen Kriterium überein.

II. Punktsystem auf 𝔄 hyperbolisch, 𝔅 elliptisch, ℭ elliptisch; das Kegelschnittbüschel hat vier imaginäre Mittelpunkte; die Gerade 𝔐 muss die Dreiecksseiten 𝔅 und ℭ in Punkten treffen, die zwischen den Ecken des Dreiecks liegen; sie selbst, daher auch die durch $o$ zu ihr gezogene Parallele wird nothwendig die dritte Dreiecksseite 𝔄 ausserhalb $p\pi$ treffen, also das zu untersuchende Punktsystem ist hyperbolisch: Ein Kegel-

schnittbüschel mit vier imaginären Mittelpunkten schneidet auf der unendlich-entfernten Geraden ein Punktsystem aus, welches allemal hyperbolisch ist.

III. Punktsystem auf 𝔄 elliptisch, 𝔅 hyperbolisch, ℭ elliptisch; das Kegelschnittbüschel hat zwei reelle Mittelpunkte, die Asymptotenpunkte auf 𝔅 und zwei imaginäre auf ℭ, der ideellen gemeinschaftlichen Sekante oder dem zweiten Theil des reellen Linienpaars, dessen einer Theil die reelle gemeinschaftliche Sekante ist. Die Gerade 𝔐 trifft 𝔄 und ℭ zwischen den Dreiecksecken und 𝔅 ausserhalb; es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 𝔐 trifft entweder

1) 𝔅 in der Strecke von $o$ bis $\infty$
oder 2) 𝔅 - - - - $\tilde{\omega}$ - $\infty$;

im ersten Falle wird die zu 𝔐 gezogene Parallele durch $o$ die Gerade 𝔄 zwischen $p$ und $\pi$ treffen, im zweiten Falle ausserhalb $p\pi$, also im ersten Falle ist das zu untersuchende Punktsystem elliptisch, im zweiten hyperbolisch; wir sehen aber zugleich, dass im ersten Falle die ideelle gemeinschaftliche Sekante zwischen den beiden reellen Mittelpunkten durchgeht, im andern Falle nicht, also:

Ein Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten (auf der ideellen gemeinschaftlichen Sekante) schneidet auf der unendlich-entfernten Geraden ein elliptisches Punktsystem aus, wenn die ideelle gemeinschaftliche Sekante zwischen den beiden reellen Mittelpunkten hindurchgeht, dagegen ein hyperbolisches Punktsystem, wenn dies nicht der Fall ist.

IV. Punktsystem auf 𝔄 elliptisch, 𝔅 elliptisch, ℭ hyperbolisch; das Kegelschnittbüschel hat zwei reelle Mittelpunkte, die Asymptotenpunkte auf ℭ und zwei imaginäre auf 𝔅. In ganz gleicher Weise, wie im Falle III stellt sich hier dasselbe Kriterium heraus.

Die Schnittpunkte eines Kegelschnitts und einer Geraden können wir, ganz abgesehen davon, ob sie reell oder imaginär sind, durch ein immer reelles Gebilde vertreten lassen, nämlich das Punktsystem, welches der Geraden in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört (§ 29); ist dieses hyperbolisch, so sind die Asymptoten-

punkte desselben die reellen Schnittpunkte, ist es elliptisch, so sind die Schnittpunkte imaginär, ist es parabolisch, so berührt die Gerade den Kegelschnitt. Der $G_\infty$ gehört nun in Bezug auf einen Kegelschnitt dasjenige Punktsystem zu, in welchem das System der konjugirten Durchmesser des Kegelschnitts (§ 32) dieselbe trifft; letzteres liegt im Endlichen, während die unendlich-entfernte Gerade sich der Anschauung entzieht; wir fassen daher zweckmässiger die Strahlsysteme der konjugirten Durchmesser für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels ins Auge und ziehen durch irgend einen Punkt $B$ der Ebene Parallele zu den Paaren konjugirter Strahlen dieser sämmtlichen Strahlsysteme oder verschieben dieselben parallel, ohne sie zu drehen, nach irgend einem gemeinschaftlichen Centrum $B$. Dadurch erhalten wir in $B$ unendlich viele auf einander liegende Strahlsysteme, welche die $G_\infty$ in denjenigen Punktsystemen treffen, die ihr in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels zugehören. Diese Strahlsysteme in $B$ haben nun einen leicht zu ermittelnden Zusammenhang mit einander. Legen wir nämlich durch $B$ einen beliebigen Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ und fassen eines jener Strahlsysteme ins Auge, so schneidet jedes Paar konjugirter Strahlen desselben eine Sehne in $\mathfrak{K}$ aus, welche durch einen festen Punkt $P$ geht (§ 31), und umgekehrt bestimmt der Punkt $P$ das ganze Strahlsystem in $B$, indem jede durch $P$ gehende Transversale den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in zwei solchen Punkten trifft, dass ihre Verbindungslinien mit $B$ ein Paar konjugirter Strahlen dieses Strahlsystems sind; das aus $P$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegte Tangentenpaar liefert also, wenn man die Berührungspunkte mit $B$ verbindet, die Asymptoten des Strahlsystems. Jedes von den nach $B$ verlegten Strahlsystemen liefert also einen besimmten Punkt $P$ und der Ort der Punkte $P$ für sämmtliche Strahlsysteme in $B$ kann dadurch bestimmt werden, dass wir $P$ als den Pol derjenigen Sehne des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ auffassen, welche die beiden Asymptoten eines jener Strahlsysteme ausschneiden. Diese Asymptoten bilden aber selbst ein eigenes Strahlsystem, welches nach dem Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $G_\infty$ hingeht. Diese Sehnen laufen daher durch einen festen Punkt $O$ und der Ort des Punktes $P$ ist die Polare von $O$ in Bezug auf den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$, also eine Gerade. Wir haben hiernach zunächst folgenden Satz:

Verschiebt man alle Strahlsysteme der konjugir-

ten Durchmesser sämmtlicher Kegelschnitte eines Büschels mit Beibehaltung der ursprünglichen Richtung ihrer Strahlenpaare nach irgend einem Punkte $B$ der Peripherie eines beliebigen Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ und macht sie concentrisch, so bestimmen die konjugirten Strahlenpaare jedes Strahlsystems für sich solche Sehnen auf $\mathfrak{K}$, die durch einen Punkt $P$ laufen, und alle solche Punkte $P$, die den gesammten Strahlsystemen entsprechen, liegen auf ein und derselben Geraden $\mathfrak{L}$ (und erfüllen dieselbe).

Schneidet die Gerade $\mathfrak{L}$ den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ nicht, so besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln; jedes aus einem Punkte $P$ der Geraden $\mathfrak{L}$ an $\mathfrak{K}$ gelegte Tangentenpaar berührt in zwei Punkten, welche mit $B$ verbunden die Richtungen der Asymptoten dieser Hyperbeln angeben; da der Pol der Geraden $\mathfrak{L}$ in Bezug auf $\mathfrak{K}$ in diesem Fall innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ liegt, so ist das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ elliptisch, oder die durch den Punkt $B$ den Asymptoten sämmtlicher Hyperbeln des Büschels parallel gezogenen Strahlenpaare bilden selbst ein elliptisches Strahlsystem. Berührt die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, so zeigt dies an, dass alle Kegelschnitte des Büschels einen unendlich-entfernten Punkt gemein haben, also einer der vier Mittelpunkte des Büschels im Unendlichen liegt; das Kegelschnittbüschel enthält in diesem Fall eine einzige Parabel und lauter Hyperbeln; das Punktsystem $(x, \xi)$ auf $G_\infty$ ist parabolisch.

Schneidet die Gerade $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in zwei reellen Punkten, so besteht das Kegelschnittbüschel aus einer Gruppe Hyperbeln, einer Gruppe Ellipsen und zwei Parabeln, welche jene beiden Gruppen von einander trennen; denjenigen Punkten $P$ nämlich, welche auf der Geraden $\mathfrak{L}$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ liegen, entsprechen die Hyperbeln des Büschels, denjenigen Punkten $P$, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ liegen, die Ellipsen und den beiden Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{K}$ die beiden Parabeln. In der That, sobald das nach $B$ parallel verlegte System der konjugirten Durchmesser hyperbolisch ist, ist auch der zugehörige Kegelschnitt eine Hyperbel, und sobald es elliptisch ist, eine Ellipse; der Punkt $P$ erzeugt aber, wenn

er ausserhalb $\mathfrak{K}$ liegt, in $B$ ein hyperbolisches Strahlsystem, und wenn er innerhalb $\mathfrak{K}$ liegt, ein elliptisches, daher ist der ihm zugehörige Kegelschnitt des Büschels im ersten Falle Hyperbel, im zweiten Ellipse. Liegt $P$ in einem der beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $K$, so wird das Strahlsystem in $B$ parabolisch, weil die beiden Asymptoten zusammenfallen, und der zugehörige Kegelschnitt des Büschels aus demselben Grunde Parabel, weil seine beiden Schnittpunkte mit $G_\infty$ zusammenfallen; es giebt also zwei Parabeln in dem Büschel. Das Punktsystem $(x, \mathfrak{x})$ auf $G_\infty$ ist hyperbolisch und die beiden Asymptotenpunkte desselben geben die Richtungen der Axen der beiden zum Büschel gehörigen Parabeln an.

Da jeder Punkt $P$ der Geraden $\mathfrak{L}$ dasjenige Strahlsystem in $B$ hervorruft, welches dem konjugirten Durchmesser-Systeme desjenigen Kegelschnitts des Büschels parallel läuft, welcher $P$ entspricht, und da alle Punkte $P$ in derselben Geraden $\mathfrak{L}$ liegen, so haben alle Strahlsysteme in $B$ ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Strahlen, die nach den Schnittpunkten der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ hingehen, denn durch jeden Punkt $P$ geht eben auch die Gerade $\mathfrak{L}$ selbst, welche dies Paar bestimmt, also:

Sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels haben je ein besonderes Paar konjugirter Durchmesser, welches dieselben zwei festen Richtungen hat; diese Richtungen sind die der Axen derjenigen beiden Parabeln, welche in dem Büschel vorkommen; sie sind also mit diesen selbst reell oder imaginär. Hieraus lassen sich die beiden Parabeln eines Büschels finden, sobald dasselbe durch irgend zwei Kegelschnitte gegeben ist. Man verlege in irgend einen Punkt $B$ der Ebene zwei Strahlsysteme, welche resp. parallel laufen den Systemen der konjugirten Durchmesser der beiden gegebeneu Kegelschnitte, und bestimme das gemeinschaftliche Paar konjugirter Strahlen dieser beiden concentrischen Systeme (§ 16); dasselbe ist immer reell, sobald nur einer der beiden Kegelschnitte Ellipse ist, oder falls beide Hyperbeln sind, sobald die beiden Asymptoten der einen in denselben Winkelraum zwischen die Asymptoten der andern ihrer Richtung nach hineinfallen; nur wenn die Asymptoten der einen durch die der andern getrennt werden, giebt es kein reelles gemeinschaftliches Paar konjugirter Strahlen, also auch keine Parabel.

Es ist von besonderem Interesse, den Hülfskegelschnitt dahin zu specialisiren, dass man für ihn einen Kreis annimmt; dann wird ein solcher durch den veränderlichen Punkt $P$ gehender Strahl, welcher Durchmesser des Kreises $\mathfrak{K}$ ist, denselben in zwei Punkten treffen, welche mit $B$ verbunden die Axen des zugehörigen Strahlsystems geben; das Tangentenpaar aus $P$ an den Kreis $\mathfrak{K}$ (falls $P$ ausserhalb liegt) liefert zwei Berührungspunkte, die mit $B$ verbunden die Asymptoten des Strahlsystems geben. Der Asymptotenwinkel einer Hyperbel $\vartheta$ wird aber durch das Verhältniss der Axen bestimmt (§ 34) $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}$; der Winkel des aus $P$ an den Hülfskreis gelegten Tangentenpaars ist aber $180^0 - 2\vartheta$; nehmen wir an, die Gerade $\mathfrak{L}$ (der Ort des Punktes $P$) treffe den Hülfskreis $\mathfrak{K}$ nicht, also das ganze Kegelschnittbüschel bestehe aus Hyperbeln, so verändert sich der Winkel $180^0 - 2\vartheta$, oder sein Nebenwinkel $2\vartheta$, indem er von 0 (für den unendlich-entfernten Punkt) bis zu einem gewissen grössesten Werthe wächst, welcher demjenigen Punkte $\mathfrak{m}$ der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht, der dem Kreise am nächsten liegt, also dem Fusspunkt des aus dem Kreismittelpunkte auf die Gerade $L$ gefällten Perpendikels, und ebenso wieder von diesem Maximumswerthe bis 0 abnimmt, wobei für zwei gleichweit von $\mathfrak{m}$ abstehende Punkte, der Winkel $2\vartheta$, also auch $\vartheta$ denselben Werth annimmt. Zwei Kegelschnitte, für welche das Verhältniss der Axen $\left(\frac{b}{a}\right)$ denselben Werth hat (oder deren Asymptoten denselben Winkel bilden), heissen **ähnlich**. Wir schliessen also:

**Besteht das Kegelschnittbüschel aus lauter Hyperbeln, so kommt unter ihnen eine und (im Allgemeinen) nur eine gleichseitige Hyperbel vor** (sie entspricht dem unendlich-entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{L}$), **ferner eine Hyperbel, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht** (sie entspricht dem Fusspunkte $\mathfrak{m}$ des aus dem Kreismittelpunkte auf $\mathfrak{L}$ herabgelassenen Perpendikels), d. h. **eine solche, für welche das Verhältniss der Axen einen Maximumswerth hat; ausserdem besteht das Büschel aus Hyperbeln, welche paarweise ähnlich sind** (indem je zwei Punkte, welche von $\mathfrak{m}$ gleich weit abstehen, zweien Hyperbeln entsprechen, deren Asymptoten denselben Winkel mit ein-

ander bilden). Ereignet es sich insbesondere, dass die Gerade $\mathfrak{L}$ ganz im Unendlichen liegt, mit $G_\infty$ zusammenfällt, so besteht das ganze Büschel aus gleichseitigen Hyperbeln; die Linienpaare, welche in dem Büschel vorkommen (eines oder drei), müssen je ein Paar rechtwinklige Strahlen sein; also wenn die vier Mittelpunkte reell sind, müssen sie so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist (§ 38).

Nehmen wir anderseits an, die Gerade $\mathfrak{L}$ treffe den Kreis $\mathfrak{K}$ in zwei reellen Punkten, so besteht das Kegelschnittbüschel aus Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln. Einem Punkte $P$ innerhalb des Kreises entspricht eine Ellipse; derjenige Durchmesser des Kreises, welcher durch $P$ geht, schneidet in zwei Punkten, die mit $B$ verbunden die Axen des Strahlsystems geben, welche den Axen des Kegelschnitts parallel laufen; die durch den Punkt $P$ (innerhalb des Kreises) gehende kleinste Sehne des Kreises, welche auf dem Durchmesser senkrecht steht, schneidet in zwei Punkten, die mit $B$ verbunden Strahlen geben, welche den gleichen konjugirten Durchmessern der Ellipse parallel laufen (§ 33), denn die Winkel zwischen den gleichen konjugirten Durchmessern werden halbirt durch die Axen und der Winkel $\vartheta$ zwischen den gleichen konjugirten Durchmessern wird bestimmt durch das Verhältniss der Axen $\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta = \frac{b}{a}\right)$. Zwei Ellipsen, bei denen das Paar gleicher konjugirter Durchmesser denselben Winkel einschliessen, heissen daher ähnlich, weil das Verhältniss der Axen dasselbe ist. Bezeichnen wir nun die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so entsprechen den Punkten zwischen $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ in dem Büschel Ellipsen und unter diesen wird diejenige, welche dem Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ zwischen $\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}$ entspricht, den grössten Werth des Axenverhältnisses liefern, d. h. dem Kreise am nächsten kommen;*) zwei solchen Punkten, die gleichweit von $\mathfrak{m}$ abstehen, entsprechen zwei ähnliche Kegelschnitte; wir schliessen also:

---

*) Vgl. Steiner: Auflösung einer geometrischen Aufgabe, in Crelle's Journal für Mathematik, Bd. II Seite 64, und „Vermischte Sätze und Aufgaben" von J. Steiner im 55. Bde. des Crelle-Borchardt'schen Journals, Seite 372.

Besteht das Kegelschnittbüschel aus einer Gruppe von Ellipsen und einer Gruppe von Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden, so giebt es unter den Ellipsen eine bestimmte, welche sich dem Kreise am meisten nähert; ihre gleichen konjugirten Durchmesser sind parallel demjenigen Paar konjugirter Durchmesser, welches für alle Kegelschnitte des Büschels dieselben Richtungen hat, oder den Axen der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln; sie entspricht der Mitte m der Sehne, welche die Gerade $L$ im Kreise ausschneidet; je zweien Punkten, die gleich weit von m abstehen, entsprechen zwei ähnliche Kegelschnitte des Büschels und zwar zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln, je nachdem jene Punkte innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen, so dass also die Kegelschnitte des Büschels paarweise ähnlich sind, aber nicht ähnlich liegen; in dem Büschel kommt nur eine einzige gleichseitige Hyperbel vor, welche dem unendlich-entfernten Punkte der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht. Geht die Gerade $\mathfrak{L}$ insbesondere durch den Mittelpunkt des Hülfskreises, so befindet sich ein Kreis in dem Büschel, welcher dem Mittelpunkte des Hülfskreises entspricht. Es muss also die eben genannte Bedingung erfüllt werden, damit unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis vorkomme; sind die vier Mittelpunkte des Büschels reell, so kommt sie mit der überein, welche aus den Elementen bekannt ist für die Lage von vier Punkten auf einem Kreise. Sie stimmt mit der in § 38 gefundenen überein: Damit unter den Kegelschnitten eines Büschels ein Kreis vorkomme, müssen die Axen der beiden Parabeln, welche das Büschel enthält, auf einander senkrecht stehen.

Ausser diesem einen Kreise kann in dem Kegelschnittbüschel kein zweiter vorkommen; dies steht im scheinbaren Widerspruch mit dem früheren Ergebniss, dass das Kegelschnittbüschel durch zwei beliebig anzunehmende Kegelschnitte vollständig bestimmt wird; es hindert uns nämlich nichts, zwei Kreise für die das Büschel bestimmenden Kegelschnitte zu wählen. In diesem Falle wird das eine Strahlsystem in $B$ ein Kreissystem (sämmtliche Paare rechtwinkliger Strahlen), der zugehörige Punkt $P$ also der Mittelpunkt $M$ des Hülfskreises $\mathfrak{K}$; das zweite Strahlsystem in $B$

wird aber auch ein Kreissystem, also identisch mit dem vorigen; der zugehörige Punkt $P$ fällt daher wieder mit $M$ zusammen und diese beiden in $M$ zusammenfallenden Punkte $P$ bestimmen gar keine Gerade $\mathfrak{L}$, welche als der Ort sämmtlicher Punkte $P$ anzusehen wäre. Wir sehen nun anderseits, dass auch auf $G_\infty$ die den beiden Kreisen zugehörigen Punktsysteme identisch werden, also ihre (imaginären) Asymptotenpunkte nothwendig als gemeinschaftliche Punkte der beiden Kreise aufgefasst werden müssen. Das Büschel hat daher auf $G_\infty$ zwei Mittelpunkte, die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte (§ 35, Anmerkung), und da alle Kegelschnitte des Büschels durch dieselben vier Mittelpunkte gehen, so muss das Punktsystem auf $G_\infty$ für alle dasselbe sein, also sie sind in diesem Falle sämmtlich Kreise: Kommen zwei Kreise in einem Kegelschnittbüschel vor, so besteht dasselbe aus lauter Kreisen und diese bilden die aus den Elementen bekannte Kreisschaar mit reeller oder ideeller gemeinschaftlicher Sekante. Die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$ ist selbst als eine ideelle gemeinschaftliche Sekante aller Kreise anzusehen und macht den einen Theil des einzigen in dem Büschel enthaltenen Linienpaars aus, dessen anderer Theil die endliche gemeinschaftliche Sekante (Potenzlinie der Kreisschaar) ist. Die Kreisschaar, welche passender Kreisbüschel genannt werden müsste, zeigt sich also hier als specieller Fall des Kegelschnittbüschels.

Dieselbe Bemerkung führt zugleich zu einem allgemeineren Resultat, nämlich: In dem Kegelschnittbüschel sind im Allgemeinen keine zwei Kegelschnitte ähnlich und ähnlich-liegend; kommen insbesondere zwei ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte in demselben vor, so besteht das ganze Büschel aus ähnlichen Kegelschnitten und hat zwei seiner Mittelpunkte auf der unendlich-entfernten Geraden $G_\infty$; sind diese beiden reell, so besteht das Büschel aus lauter ähnlichen Hyperbeln; sind sie imaginär, aus lauter ähnlichen Ellipsen (insbesondere Kreisen); je zwei Kegelschnitte des Büschels sind in diesem Fall ähnlich und ähnlich-liegend.

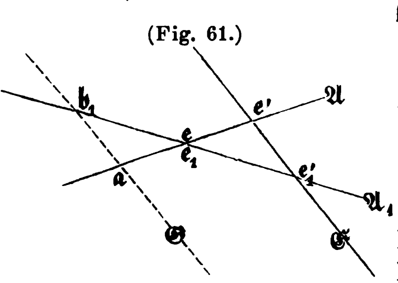
## § 43. Entstehung der Kegelschnittschaar aus der geraden Punktreihe.

Ehe wir in der Untersuchung des Kegelschnittbüschels weiter fortschreiten, ist es angemessen, das polare Nebengebilde desselben, die Kegelschnittschaar, d. h. sämmtliche Kegelschnitte, welche dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben, näher ins Auge zu fassen. Alle Betrachtungen und Entstehungsarten des Kegelschnittbüschels, welche in den §§ 38—42 auseinandergesetzt sind, und alle dort erlangten Resultate und Eigenschaften haben ihre analogen bei der Kegelschnittschaar und es ist ohne Schwierigkeit, diese Analogie vollständig herzustellen nach den uns bereits bekannten Prinzipien. Wir werden daher diese Uebertragung oder Wiederholung hier unterlassen und uns darauf beschränken, nur die Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten aus der geraden Punktreihe (analog § 38) entstehen zu lassen, wobei wir besonders die abweichenden Umstände angeben wollen.

Nehmen wir zwei gerade Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in der Ebene an und einen beliebigen Punkt $B$ als den Projektionspunkt zweier perspektivisch liegenden Punktreihen auf diesen Trägern, so bestimmt derselbe diese beiden projektivischen Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ der Art, dass in dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$ $\mathfrak{e}_1$ vereinigt liegen; denken wir uns nun, nachdem diese Beziehung durch den Punkt $B$ hergestellt ist, die Träger fest, aber die beiden auf ihnen befindlichen Punktreihen um zwei beliebige Strecken, ohne die Beziehung in sich zu ändern, auf den resp. Trägern verschoben, so wird dadurch die vorige perspektivische Lage aufgehoben und das Erzeugniss der beiden projektivischen Punktreihen wird ein Kegelschnitt, welcher die Träger $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{A}_1$ zu Tangenten hat und noch eine dritte leicht angebbare Tangente, nämlich den Verbindungsstrahl derjenigen beiden Punkte der Träger nach der Verschiebung, welche vorher im Schnittpunkte $\mathfrak{e}$ $\mathfrak{e}_1$ vereinigt waren. Diese bestimmte Gerade $\mathfrak{E}$ ist nur von der Grösse und Richtung der „Schiebstrecken" abhängig, nicht von der Lage des Projektionspunktes $B$. Verändern wir also die Lage des Punktes $P$ in der Ebene, so erhalten wir dadurch immer neue Kegelschnitte bei derselben Verschiebung und sämmtlichen Punkten $B$ der Ebene

entsprechen unendlich viele Kegelschnitte, welche dieselben drei festen Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ haben (Fig. 61) oder demselben Dreiseit einbeschrieben sind. Dies ist eine doppelte Unendlichkeit oder eine Schaar-Schaar von Kegelschnitten. Lassen wir $B$ nur die sämmtlichen Punkte einer Geraden $\mathfrak{L}$ durchlaufen, so werden die beiden

(Fig. 61.)

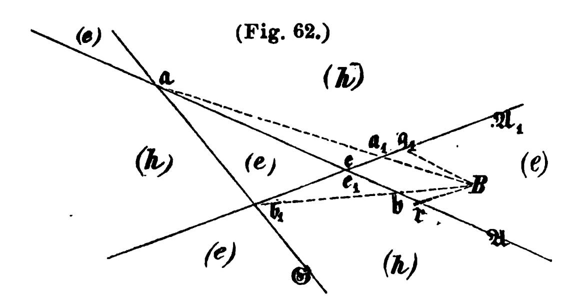


Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ ein Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ sein, wo übrigens auch $B$ auf $\mathfrak{L}$ liegen mag; nehmen nach der Verschiebung $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ die Lagen $\mathfrak{d}^1$ und $\mathfrak{d}^1_1$ an, so ist der Verbindungsstrahl $\mathfrak{d}^1\mathfrak{d}^1_1 = \mathfrak{L}^1$ eine Tangente für alle Kegelschnitte, welche den Punkten $B$ auf der Geraden $\mathfrak{L}$ entsprechen; aus einer geraden Punktreihe entsteht also eine Kegelschnittschaar mit vier festen Tangenten ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}\mathfrak{L}^1$) und diese Kegelschnittschaar ist von einfacher Unendlichkeit, d. h. gleich mächtig mit den unendlich-vielen Punkten einer Geraden.

Um zu wissen, ob für eine bestimmte Lage von $B$ der durch die Verschiebung entstehende Kegelschnitt Ellipse, Hyperbel oder Parabel wird, suchen wir diejenigen beiden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ auf, welche nach der Verschiebung in den Schnittpunkt der Träger hineinfallen; $\mathfrak{a}\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{e}_1$ sind also die Schiebstrecken ihrer Grösse und Richtung nach und durch diese sind die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ gegeben; die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ sei die Gerade $\mathfrak{G}$; durch die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ (und die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$) zerfällt die ganze Ebene in sieben Räume, den endlichen Dreiecksraum, die drei den Ecken anliegenden unendlichen Winkelräume und die drei den Seiten anliegenden unendlichen Räume; es wird sich nun zeigen, dass, wenn der Punkt $B$ in einem der vier ersten Räume liegt, der entsprechende Kegelschnitt eine Ellipse wird, wenn $B$ dagegen in einem der drei letzteren liegt, derselbe eine Hyperbel wird und dass die Uebergänge in eigenthümlicher Weise durch die vier begrenzenden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}\mathfrak{G}_\infty$ vermittelt werden. Wir bedürfen zu diesem Nachweis der in § 26 erörterten Kriterien, welche entscheiden, wann der durch zwei projektivische Punkt-

reihen erzeugte Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel ist. Der von zwei projektivischen Punktreihen erzeugte Kegelschnitt ist nämlich Ellipse, wenn auf jedem der beiden Träger (oder einem, was ausreichend ist) der den vereinigten Punkten entsprechende (Berührungspunkt) innerhalb der Strecke liegt zwischen dem Schnittpunkt der Träger und den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen ($\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$), dagegen Hyperbel, wenn er ausserhalb dieser Strecke liegt. Sind also (Fig. 62) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ die beiden Träger und

(Fig. 62.)




$\mathfrak{G}$ die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$, welche nach der Verschiebung in den Schnittpunkt der Träger gelangen, so wird, wenn $B$ z. B. in einem der Scheitelräume ($e$) liegt, der Strahl $B\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}_1$ die Gerade $\mathfrak{A}_1$ treffen und der Parallelstrahl zu $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{a}_1$ aber nothwendig zwischen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$ liegen, was denn natürlich auch nach der Verschiebung der Fall ist; $\mathfrak{a}_1$ wird aber der entsprechende zu dem im Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) befindlichen $\mathfrak{a}$, also der Berührungspunkt des erzeugten Kegelschnitts; folglich ist dieser eine Ellipse, weil $\mathfrak{a}_1$ zwischen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$ liegt. In gleicher Weise lehrt die unmittelbare Anschauung, dass, wenn $B$ in einem der vier Räume ($e$) liegt, der Kegelschnitt immer Ellipse wird, und wenn $B$ in einem der drei übrigen Räume ($h$) liegt, der Kegelschnitt Hyperbel wird. Wenn nun insbesondere $B$ in die Gerade $\mathfrak{G}$ hineinfällt, so werden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ entsprechende Punkte, welche also nach der Verschiebung in den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) hineinfallen; in diesem Falle werden nun die beiden projektivischen Punktreihen auch nach der Verschiebung perspektivisch bleiben, also alle Projektionsstrahlen durch einen Punkt laufen; der Kegelschnitt löst sich also in diesem Uebergangsfalle in ein Punktenpaar auf: jenen Projektionspunkt und den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$), und dies Punktenpaar ist in der That (§ 26) als

ein Uebergang von Ellipse zu Hyperbel anzusehen, indem die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten als unendlich-schmale Ellipse oder die beiden unendlichen Strecken auf der Verbindungslinie beider Punkte ausserhalb derselben als unendlich-schmale Hyperbel aufgefasst werden können, also der Kegelschnitt gleichzeitig Ellipse und Hyperbel ist. Derselbe Uebergangsfall tritt nun auch auf, wenn $B$ insbesondere in einen der beiden Träger $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}_1$ hineinfällt, indem die projektivische Beziehung den besonderen parabolischen Charakter annimmt (§ 19 a)); fällt nämlich $B$ in $\mathfrak{A}$ hinein, so entspricht allen Punkten der Geraden $\mathfrak{A}_1$ der einzige Punkt $B$ der Geraden $\mathfrak{A}$ und allen Punkten der Geraden $\mathfrak{A}$ der einzige Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1)$ der beiden Träger in der Geraden $\mathfrak{A}_1$; diese Beziehung bleibt nach der Verschiebung ungeändert und der Kegelschnitt löst sich also in dasjenige Punktenpaar auf, welches von dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ und dem Punkt $B$ nach der Verschiebung eingenommen wird; ein Gleiches tritt ein, wenn der Punkt $B$ auf dem andern Träger $\mathfrak{A}_1$ liegt. Die Punkte $B$ der drei abgrenzenden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ liefern also sämmtlich Kegelschnitte welche in Punktenpaare ausarten. Es bleiben noch diejenigen Punkte $B$ zu untersuchen, welche auf der vierten begrenzenden Geraden $G_\infty$ liegen; hier tritt ein anderer Uebergang von Ellipse zu Hyperbel auf, nämlich durch die Parabel. Sobald $B$ im Unendlichen liegt, wird die Beziehung der beiden Träger projektivisch ähnlich und dieses muss auch nach der Verschiebung bleiben, weil die entsprechenden unendlich-entfernten Punkte im Unendlichen bleiben; das Erzeugniss nach der Verschiebung wird also eine Parabel (§ 26) und für alle Punkte $B$ der unendlich-entfernten Geraden $G_\infty$ wird also der durch die Verschiebung hervorgehende Kegelschnitt allemal eine Parabel; diese sämmtlichen Parabeln bilden einen besonderen Fall der Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten, die Parabelschaar; sie haben nämlich die drei gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ und ausserdem selbstverständlich $G_\infty$ zur vierten gemeinschaftlichen Tangente. Wir könnten noch die speciellen Fragen erörtern, für welche Punkte $B$ in der Ebene wird der durch die Verschiebung hervorgehende Kegelschnitt ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel; die erste Frage wird a priori aus bekannten Elementarsätzen dahin beantwortet werden können, dass es nur vier Punkte $B$ in der Ebene giebt, für welche die pro-

jektivische Beziehung der Art wird, dass nach der Verschiebung als Erzeugniss der Kreis auftritt, da es bekanntlich nur vier Kreise giebt, welche die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ zu Tangenten haben; aus unserem in § 24 angegeben Kriterium für die Erzeugung des Kreises durch projektivische Punktreihen würde dieses Resultat, wenn auch etwas umständlich, ebenfalls hervorgehen; die zweite Frage, wo der Punkt $B$ liegen muss, damit nach der Verschiebung das Erzeugniss eine gleichseitige Hyperbel wird, ist mit Hülfe des in § 26 angegebenen Kriteriums für die Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel durch projektivische Punktreihen zu beantworten; es zeigt sich, dass der Ort für solche Punkte $B$ ein K r e i s wird, der eine eigenthümliche Lage in der Ebene hat. Zieht man nämlich durch die Ecken des von den drei Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{G}$ gebildeten Dreiseits Parallele zu den Seiten, so bilden diese ein neues Dreieck; der dem letzteren konjugirte Kreis ist der Ort des Punktes $B$, d. h. derjenige Kreis, für welchen die Ecken dieses Dreiecks ein Tripel konjugirter Punkte sind (§ 30); der Höhenpunkt des Dreiecks ist der Mittelpunkt dieses Kreises und das Quadrat des Radius gleich dem konstanten Rechteck aus den Abständen des Höhenpunktes von je einer Ecke und der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks; dieser Kreis ist aber nur reell, d. h. das Quadrat des Radius positiv (oder die beiden Abschnitte auf jeder Höhe gleich gerichtet), wenn das Dreieck stumpfwinklig ist; der Ort des Punktes $B$ ist also auch nur dann ein reeller Kreis, wenn das von den drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ gebildete Dreiseit stumpfwinklig ist. Dieses Resultat tritt aber hier nicht so unmittelbar hervor, sondern folgt erst aus einer, wenn auch elementaren, doch, wie es scheint, unerlässlichen Rechnung; wir ziehen es daher vor, dasselbe erst an einer späteren Stelle nachzuweisen (§ 44), wo es leichter sich ergiebt. Um nun eine Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten zu erhalten, haben wir den Projektionspunkt $B$ eine Gerade $\mathfrak{L}$ durchlaufen zu lassen. Die Gerade $\mathfrak{L}$ muss, wie sie übrigens auch in der Ebene liegen mag, im Allgemeinen in zwei elliptischen Räumen ($e$) und zwei hyperbolischen Räumen ($h$) enthalten sein (Fig. 62), denn durch die drei Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_\infty$ werden vier Punkte auf ihr fixirt, zwischen denen vier Strecken liegen; zwei von diesen gehören den elliptischen, die beiden andern, dazwischen liegenden, den hyperbolischen Räumen an; den drei Schnittpunkten

der Geraden $\mathfrak{L}$ mit den Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{G}$ gehören insbesondere Kegelschnitte zu, welche sich in Punktenpaare auflösen; dem unendlich-entfernten Punkt der Geraden $\mathfrak{L}$ entspricht die einzige Parabel, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt. Also:

Die sämmtlichen Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten zerfallen in zwei Gruppen von Ellipsen und zwei Gruppen von Hyperbeln, die mit einander abwechseln; der Uebergang von einer Gruppe zu einer andern geschieht drei Mal durch ein Punktenpaar (die drei Paar Gegenecken des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits) und ein Mal durch eine Parabel, die einzige, welche im Allgemeinen in der Kegelschnittschaar vorkommt.

Bemerken wir, dass die beiden durch den Projektionspunkt $B$ parallel zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gezogenen Projektionsstrahlen in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ dieselben treffen und dass diese Punkte nach der Verschiebung ihre Eigenschaft behalten, Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen zu sein oder den unendlich-entfernten Punkten zu entsprechen, so erkennen wir, dass, während $B$ die Gerade $\mathfrak{L}$ durchläuft, die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ zwei projektivisch ähnliche Punktreihen beschreiben, ihre Verbindungslinie (nach der Verschiebung) also eine Parabel umhüllt; denken wir uns nach der Verschiebung die Parallelstrahlen hergestellt, welche sich in $B^1$ treffen mögen, so wird der Punkt $B^1$ zu den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe relative Lage haben müssen, wie der Punkt $B$ zu zwei durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ gezogenen Parallelen mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, denn diese gehen nach der Verschiebung in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ über; wenn also $B$ eine gerade Linie $\mathfrak{L}$ durchläuft, so muss auch nach der Verschiebung $B^1$ eine bestimmte Gerade durchlaufen, welche zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe relative Lage hat, wie $\mathfrak{L}$ zu jenen beiden durch $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}$ gedachten Parallelen. Nun ist $B^1$ immer die Ecke eines dem Kegelschnitt der Schaar umschriebenen Parallelogramms, dessen zwei Seiten die festen Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sind; die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}_1)$ mit $B^1$ wird also halbirt durch den Mittelpunkt $M$ des Kegelschnitts, welcher dem Parallelogramm einbeschrieben ist, und da $B^1$ eine gerade Linie durchläuft, so muss auch $M$ eine Gerade durchlaufen, die jener parallel ist, aber halb so weit von $\mathfrak{e}(\mathfrak{e}_1)$ absteht, als sie; wir schliessen hieraus:

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten liegen in einer Geraden, welche insbesondere auch die Mittelpunkte der drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits enthält (was schon für sich ein bekannter elementarer Satz ist). Diese Mittelpunktslinie zerfällt durch die drei Mitten der Diagonalen und den unendlich-entfernten Punkt, den Mittelpunkt der einzigen Parabel der Schaar, in vier Abschnitte, welche abwechselnd die Mittelpunkte der beiden Gruppen von Ellipsen und die Mittelpunkte der beiden Gruppen von Hyperbeln enthalten.

Dieselbe Betrachtung, aus welcher die Kegelschnittschaar entsprang, zeigt auch, wie die Berührungspunkte eines Kegelschnitts der Schaar auf zweien gemeinschaftlichen Tangenten sich verändern; denn Fig. 62 zeigt, dass $B\mathfrak{a}$ und $B\mathfrak{b}_1$ die Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ bestimmen, also wenn $B$ eine Gerade $\mathfrak{L}$ durchläuft, so beschreiben $\mathfrak{a}B$ und $\mathfrak{b}_1 B$ zwei perspektivische Strahlbüschel, mithin $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$ zwei projektivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche nach der Verschiebung in perspektivische Lage gelangen, weil auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}_1$ zwei entsprechende Punkte dieser beiden projektivischen Punktreihen werden und diese Punkte nachher in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1)$ hineinfallen. Also:

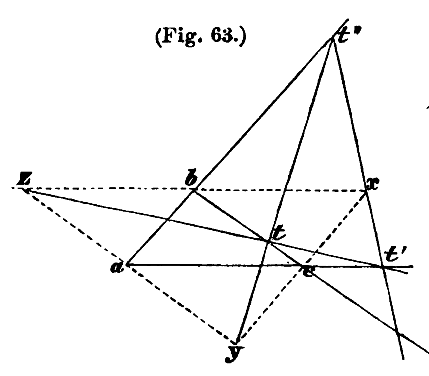
Die Berührungssehnen sämmtlicher Kegelschnitte einer Schaar von vier festen Tangenten mit irgend zwei der letzteren laufen durch einen festen Punkt und zwar einen der drei Diagonalpunkte (Ecken des von den Diagonalen gebildeten Dreiseits); dies lässt sich auch so aussprechen:

Fasst man bei einer Kegelschnittschaar von vier festen Tangenten die Berührungspunkte ins Auge, welche der veränderliche Kegelschnitt mit irgend zweien von den vier festen Tangenten gemein hat, so bilden dieselben zwei projektivische Punktreihen welche perspektivisch liegen; ihr Projektionspunkt ist immer einer der drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits, welches die vier gemeinschaftlichen Tangenten bilden.

Dieser Satz ist der analoge von dem im Anfange des § 38

gefundenen und kann ebenso wie jener aus den Eigenschaften des einem Kegelschnitte umschriebenen Vierseits (§§ 23, 27) abgeleitet werden; hier erkennen wir, dass jede von den Berührungspunkten gebildete Punktreihe zugleich projektivisch ist mit der erzeugenden Punktreihe, welche $B$ auf der Geraden $\mathfrak{L}$ durchläuft.

Es bleibt noch der besondere Fall ins Auge zu fassen, dass die Gerade $\mathfrak{L}$, welche der Projektionspunkt durchläuft, die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$ ist; in diesem Falle wird die projektivische Beziehung immer eine projektivisch-ähnliche, also nach der Verschiebung sind die entstehenden Kegelschnitte sämmtlich Parabeln, also: Wenn in einer Kegelschnittschaar zwei Parabeln vorkommen, so besteht die Schaar aus lauter Parabeln, welche ausser der unendlich-entfernten Geraden $G_\infty$, die allen Parabeln gemeinschaftliche Tangente ist, noch drei gemeinschaftliche Tangenten haben und eine specielle Kegelschnittschaar bilden ähnlich, wie das Büschel gleichseitiger Hyperbeln ein besonderes Kegelschnittbüschel bildete (§ 38). Unter diesen Parabeln giebt es drei besondere, die in je eine einzige (doppelt zu zählende) Gerade übergehen, nämlich die drei durch die Ecken des übrig bleibenden Dreiseits parallel den Seiten desselben laufenden Geraden. Die Mittelpunktslinie dieser Parabelschaar ist natürlich wieder die unendlich-entfernte Gerade. Von dem vollständigen Vierseit, dessen eine Seite $G_\infty$ wird, bleibt nur ein Dreiseit $a\,b\,c$ in dem Endlichen der Ebene zurück; die Diagonalpunkte $x\,y\,z$ des vollständigen Vierseits werden die Ecken desjenigen Dreiseits (Diagonaldreiseits), dessen Seiten durch die Ecken des ersteren $a\,b\,c$ und parallel den Seiten desselben laufen (Fig. 63). Bei jeder dem Dreiseit $a\,b\,c$ einbeschriebenen Parabel gehen also die Berührungsebnen beziehlich durch drei feste Punkte, durch die Ecken des dem Dreiseit $abc$ parallel umschriebenen Drei-



(Fig. 63.)

seits $xyz$. Nimmt man einen beliebigen Punkt $t$ auf $bc$ als Berührungspunkt einer einbeschriebenen Parabel, so wird $(zt, ac) = t'$ und $(yt, ab) = t''$ und die Punkte $tt't''$ sind die drei Berührungspunkte, woraus zugleich folgt, dass $t't''$ durch $x$ gehen muss. Bekanntlich laufen bei einem dem Kegelschnitt umschriebenen Dreiseit die Verbindungsstrahlen der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt $o$ (§ 21); wir können daher hier nach dem Orte des Punktes $o$ fragen für sämmtliche dem Dreiseit einbeschriebene Parabeln. Derselbe ist leicht zu ermitteln, wenn wir den Punkt $t$ auf der Geraden $bc$ bewegen und den Schnittpunkt $(at, bt')$ verfolgen; da nämlich $t$ und $t'$ perspektivische Punktreihen durchlaufen, so beschreiben $at$ und $bt'$ projektivische Strahlbüschel; der Ort des Punktes $o$ ist also ein Kegelschnitt, und da der Verbindungslinie $ab$ in den beiden Strahlbüscheln $bz$ und $az$ entsprechen, so sind dies die Tangenten des gefundenen Kegelschnitts, welcher auch durch $c$ geht und $xy$ berührt; der Ort des Punktes $o$ ist also eine Ellipse, welche dem Dreiseit $abc$ um- und zugleich dem Dreieck $xyz$ einbeschrieben ist oder den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Dreiecke zum Mittelpunkte hat.

(Anmerkung. Diese besondere Ellipse bildet eine eigenthümliche Grenze zwischen zwei Gebieten der Ebene. Jeder Punkt $o$ in der Ebene eines Dreiseits mit den Ecken desselben verbunden bestimmt auf den gegenüberliegenden Seiten drei Punkte, in welchen ein Kegelschnitt $K$ das Dreiseit berührt; es fragt sich, wie der Punkt $o$ liegen müsse, wenn der Kegelschnitt $K$ Ellipse, Parabel oder Hyperbel werden soll, und diese Frage wird durch das obige Resultat beantwortet; die besondere Ellipse, welche dem Dreiseit umschrieben ist und den Schwerpunkt desselben zum Mittelpunkt hat, bildet nämlich die Grenze zwischen denjenigen Gebieten der Ebene, in denen $o$ liegen muss, damit der Kegelschnitt $K$ Ellipse oder Hyperbel wird; und zwar ist $K$ eine Ellipse, wenn $o$ innerhalb, eine Hyperbel, wo $o$ ausserhalb, eine Parabel, wenn $o$ auf jener Grenz-Ellipse liegt; die besonderen Fälle, wenn $K$ ein Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel wird, erfordern eine besondere Untersuchung. Die analoge Frage der polaren Nebenbetrachtung führt zu einem ebenso interessanten Orte, woran sich noch manche naheliegende Frage anschliesst.)

Denken wir uns die einzige Parabel, welche einem gegebenen Vierseit (𝔄𝔅ℭ𝔇) einbeschrieben werden kann, so gehört dieselbe vier verschiedenen Parabelschaaren, welche den Dreiseiten (𝔄𝔅ℭ) (𝔄ℭ𝔇) (𝔄𝔅𝔇) (𝔅ℭ𝔇) einbeschrieben sind, gleichzeitig an; die vier diesen Dreiseiten parallel umschriebenen Dreiseite haben also ihre zwölf Ecken paarweise auf sechs Geraden, welche durch die drei Diagonalpunkte 𝔵𝔶𝔷 des vollständigen Vierseits (𝔄𝔅ℭ𝔇) gehen und die Berührungssehnen jener Parabel sind, wobei durch jeden Punkt 𝔵𝔶𝔷 immer zwei von diesen sechs Geraden gehen.

Die Parabelschaar, welche einem Dreiseit einbeschrieben ist, und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind und zugleich durch den Höhenpunkt dieses Dreiecks gehen, stehen in einem unmittelbaren Zusammenhange vermittelst des Prinzips der Polarisation (§ 30). Denken wir uns nämlich das Büschel gleichseitiger Hyperbeln und beschreiben um einen der vier Mittelpunkte dieses Büschels einen Kreis, so wird die Polarfigur des Hyperbelbüschels in Bezug auf diesen Kreis als Basis die Parabelschaar werden; denn aus jeder gleichseitigen Hyperbel wird ein Kegelschnitt, der vier feste Tangenten hat, die Polaren der vier Mittelpunkte des Büschels, und da der Mittelpunkt des Kreises zu seiner Polare in Bezug auf den Kreis selbst die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$ hat, so muss der Polarkegelschnitt $G_\infty$ berühren, also Parabel sein; wir erhalten daher sämmtliche Parabeln, die demselben festen Dreiseit einbeschrieben sind, welches von den drei Polaren der übrigen drei Mittelpunkte des Hyperbelbüschels gebildet wird. Aus der bekannten dem Kreise zukommenden Eigenschaft, dass die Polare senkrecht steht auf der Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit dem Pol, weil das konjugirte Durchmessersystem des Kreises ein Kreissystem ist, geht hervor, dass der Mittelpunkt $M$ der Kreis-Basis nicht nur Höhenpunkt des gemeinschaftlichen Dreiecks des Hyperbelbüschels, sondern auch Höhenpunkt des gemeinschaftlichen Dreiseits der Parabelschaar ist; da nun für jede gleichseitige Hyperbel die unendlich-entfernten Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so werden ihre Polaren, d. h. die beiden in $M$ sich schneidenden Tangenten einer jeden Parabel der Schaar ebenfalls zu einander rechtwinklig sein müssen; der Ort des Schnittpunktes aller rechtwinkligen Tangentenpaare einer Parabel

ist aber die Leitlinie (§ 34); also gehen die Leitlinien sämmtlicher Parabeln der Schaar durch den Punkt $M$, d. h.: Von sämmtlichen einem gegebenen Dreiseit einbeschriebenen Parabeln gehen die Leitlinien durch denselben festen Punkt, welcher der Höhenpunkt dieses Dreiseits ist.

Nehmen wir jetzt die einzige Parabel, welche einem gegebenen Vierseit einbeschrieben werden kann und die also eine bestimmte Leitlinie hat, so folgt, dass in ihr die vier Höhenpunkte derjenigen vier Dreiseite liegen müssen, welche sich aus je dreien der vier gegebenen Seiten des Vierseits bilden lassen. Dies giebt einen bekannten elementaren Satz über das vollständige Vierseit, welcher einer ganzen Reihe von Eigenschaften desselben angehört, deren eine oder die andere wir gelegentlich als specielle Fälle allgemeinerer Eigenschaften erwähnen werden. Sie hängen zumeist mit der Parabel zusammen, welche dem vollständigen Vierseit einbeschrieben werden kann, oder treten als besondere Fälle der Eigenschaften unserer Kegelschnittschaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten auf (Crelle's Journ. Bd. II p. 97).

Schliesslich wollen wir nur noch eine Eigenschaft der Parabelschaar erwähnen, welche sich auf ihre Brennpunkte bezieht. Es war eine unmittelbare Folgerung aus der Grundeigenschaft der Brennpunkte (§ 36), dass das Strahlenpaar von irgend einem Punkte $a$ nach den Brennpunkten eines Kegelschnitts symmetrisch liegt zu dem Tangentenpaar aus $a$ an den Kegelschnitt. Haben wir nun irgend eine dem Dreieck $abc$ einbeschriebene Parabel, welche einen ihrer Brennpunkte im Unendlichen hat (in der Richtung der Axe), und ziehen durch $a$ eine Parallele zur Axe, so wird die symmetrisch liegende Gerade in Bezug auf das Tangentenpaar $ab$, $ac$ durch den Brennpunkt der Parabel gehen müssen; ebenso wenn wir durch $b$ eine Parallele zur Axe ziehen und die symmetrisch liegende Gerade in Bezug auf das Tangentenpaar $bc$, $ba$ bestimmen. Der Schnittpunkt dieser beiden konstruirten Geraden ist also der Brennpunkt $F$ der Parabel. Verändern wir nun die einbeschriebene Parabel, indem wir sie die ganze Parabelschaar durchlaufen lassen, so beschreiben die beiden durch $a$ und $b$ zur jedesmaligen Parabelaxe gezogenen Parallelen zwei projektivisch-gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel; die symmetrisch-liegende $aF$ beschreibt aber ein mit der ersten Parallelen gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, die symmetrisch-liegende $bF$

ein mit der zweiten Parallelen gleiches und ungleichlaufendes Strahlbüschel, also $aF$ und $bF$ wiederum zwei gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel, deren Erzeugniss ein Kreis ist; der Ort des Brennpunktes $F$ ist also ein Kreis, welcher ausser durch $a$ und $b$ auch durch $c$ geht, wie leicht zu sehen ist; also:

Die Brennpunkte sämmtlicher einem Dreiseit einbeschriebenen Parabeln liegen auf demjenigen Kreise, welcher dem Dreiseit umschrieben ist.

Durch dasselbe Raisonnement erhalten wir den etwas allgemeineren Satz: Für alle Kegelschnitte, welche einem Dreiseit einbeschrieben sind und den einen ihrer Brennpunkte auf einer geraden Linie haben, ist der Ort des andern Brennpunktes ein bestimmter Kegelschnitt, welcher dem gegebenen Dreiseit umschrieben ist.

Hieraus folgt beiläufig, wenn wir die einzige einem vollständigen Vierseit einbeschriebene Parabel auffassen, welche zu gleicher Zeit vier Parabelschaaren angehört, dass die den vier Dreiseiten eines vollständigen Vierseits umschriebenen Kreise durch einen Punkt laufen, den Brennpunkt dieser Parabel; ferner, da die Fusspunkte der aus dem Brennpunkt auf die Tangenten einer Parabel herabgelassenen Perpendikel sich in einer Geraden, der Tangente am Scheitel der Parabel, befinden, müssen die aus einem Peripherie punkte des einem Dreiseit umschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten herabgelassenen Perpendikel ihre Fusspunkte in gerader Linie haben; die weitere Folgerung fürs Vierseit übergehen wir, sowie die bekannten elementaren Sätze, welche sich hier anschliessen.

## § 44. Charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar und einige Folgerungen aus derselben.

Der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, dass jede gerade Transversale in Paaren konjugirter Punkte ein und desselben Punktsystems getroffen wird, steht die gleichlaufende der Kegelschnittschaar zur Seite:

Die Tangentenpaare aus einem beliebigen festen Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar sind Paare konjugirter Strahlen eines Strahlsystems.

Dies folgt unmittelbar aus der Entstehung der Kegelschnittschaar (§ 43). Denken wir uns nämlich einen gegebenen Punkt $P$ in der Ebene als den Projektionspunkt für zwei neue projektivische Punktreihen auf den Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in perspektivischer

Lage, so werden dieselben vor der Verschiebung im Allgemeinen nicht perspektivisch gewesen sein, sondern die Projektionsstrahlen, welche jetzt alle durch $P$ laufen, werden vor der Verschiebung einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umhüllt haben, welcher $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ selbst zu Tangenten hat; so oft nun zwei solche Projektionsstrahlen vor der Verschiebung sich in einem Punkte $B$ der Geraden $\mathfrak{L}$ treffen, werden dieselben nach der Verschiebung zwei durch $P$ laufende Tangenten des Kegelschnitts sein, welcher aus $B$ hervorgeht. Alle Tangentenpaare aus den Punkten $B$ einer Geraden $\mathfrak{L}$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ fixiren aber auf der Tangente $\mathfrak{A}$ Punktenpaare eines Punktsystems (§ 31), welches nach der Verschiebung ein Punktsystem bleibt; die von $P$ nach den Punktenpaaren desselben hingehenden Strahlen bilden daher ein Strahlsystem, also die Tangentenpaare aus $P$ an die Kegelschnitte der Schaar bilden ein Strahlsystem. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist bereits in § 18 bewiesen worden, indem als besondere Kegelschnitte der Schaar die drei Punktenpaare, welche in ihr vorkommen, oder die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits aufgefasst werden; der dort geführte Beweis des besonderen Falles lässt sich auch unmittelbar auf den allgemeinen Satz übertragen. Seien $a\alpha$ und $b\beta$ zwei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits und treffe irgend ein aus $P$ an einen Kegelschnitt der Schaar gelegtes Tangentenpaar die Seite $ab$ in $x$ und $y$, die Seite $\alpha\beta$ resp. in $\xi$ und $\eta$, so findet zwischen den Schnittpunkten zweier Tangenten $ab$ und $\alpha\beta$ des Kegelschnitts durch vier andere die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(abxy) = (\beta\alpha\xi\eta)$ statt,
also auch nach § 6, 1)

$$(abxy) = (\alpha\beta\eta\xi);$$

die von $P$ nach diesen vier Paar Punkten hingehenden Strahlen sind also vier Paar entsprechende Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel und da dem Strahl $Px$ der Strahl $P\eta$, dem $Py$ der $P\xi$ entspricht, so fallen in diesen beiden auf einander liegenden projektivischen Strahlbüscheln die Schenkel zweier entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander; mithin sind (§ 17) die drei Strahlenpaare: $Pa$, $P\alpha$; $Pb$, $P\beta$; $Px$, $Py$ (das Tangentenpaar aus $P$ an einen beliebigen Kegelschnitt der Schaar) sechs Strahlen in Involution oder drei Paar konjugirte Strahlen eines Strahlsystems; dieses ist schon durch zwei Paare vollständig bestimmt; lassen wir also den Kegelschnitt die ganze Schaar

19*

durchlaufen, so bleiben $a\alpha$, $b\beta$ unverändert, also die Tangentenpaare aus $P$ an sämmtliche Kegelschnitte der Schaar sind immer Paare konjugirter Strahlen ein und desselben Strahlsystems w. z. b. w.

Das in § 18 angegebene Kriterium für die Lage des Punktes $P$, damit das in ihm entstehende Strahlsystem elliptisch oder hyperbolisch sei, unterschied von den elf Räumen, in welche die ganze Ebene durch die vier Seiten des vollständigen Vierseits zerschnitten wird (Fig. 25), fünf hyperbolische ($h$) und sechs elliptische ($e$); die ersteren sind diejenigen, in welche die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits hineinfallen, und letztere die übrig bleibenden, welche von keiner Diagonale getroffen werden. Wenn nun das Strahlsystem, welches von den Tangentenpaaren aus einem Punkte $P$ an die Kegelschnitte der Schaar gebildet wird, hyperbolisch ist, so hat es zwei reelle Doppelstrahlen oder Asymptoten; jede Asymptote muss daher in $P$ selbst eine Tangente sein für einen besonderen Kegelschnitt der Schaar, weil das Tangentenpaar aus $P$ an diesen Kegelschnitt zusammenfällt. Wir schliessen also: Es giebt im Allgemeinen zwei Kegelschnitte, welche vier gegebene Gerade berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen; sie sind aber nur dann reell vorhanden, wenn der gegebene Punkt in einem der fünf hyperbolischen Räume liegt, in welche die vier gegebenen Geraden die Ebene zerschneiden, d. h. in einem derjenigen Räume, welche die drei Diagonalen des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits enthalten. Liegt $P$ auf einer der vier Geraden selbst, so giebt es selbstverständlich nur einen Kegelschnitt, der sie berührt und durch diesen Punkt geht, weil dann das Strahlsystem parabolisch wird. Liegt $P$ in einem der sechs elliptischen Räume, so sind die beiden Kegelschnitte imaginär. Die Aufgabe, diese beiden Kegelschnitte zu finden, ist also darauf zurückgeführt, die Asymptoten (oder Doppelstrahlen) eines bekannten Strahlsystems zu bestimmen, welche sich mit Hülfe eines festen Kreises lösen lässt (§ 15). Wir ersehen hieraus, dass sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar nicht die ganze unendliche Ebene erfüllen, sondern nur die fünf hyperbolischen Räume, während die sechs elliptischen frei bleiben.

Es knüpft sich hieran die Frage, wo der Punkt $P$ liegen müsse, damit das Strahlsystem, welches durch die Kegelschnittschaar in ihm hervorgerufen wird, insbesondere ein Kreissystem

wird? Da bei einem Kreissystem je zwei konjugirte Strahlen zu einander rechtwinklig sind, so wäre für einen solchen Punkt $P$ erforderlich, dass jedes Tangentenpaar aus ihm an einen Kegelschnitt der Schaar aus zwei zu einander rechtwinkligen Strahlen bestände. Nehmen wir $P$ willkührlich in der Ebene an, so sind die Axen des in ihm bestimmten Strahlsystems ein Paar rechtwinklige Tangenten für einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar; damit aber in $P$ ein Kreissystem entstehe, müsste es noch ein zweites Paar rechtwinklige konjugirte Strahlen geben. Wir wissen nun (§ 34), dass für jeden Kegelschnitt der Ort des Schnittpunktes je zweier rechtwinkligen Tangenten ein bestimmter Kreis ist, welcher denselben Mittelpunkt mit dem Kegelschnitt hat; für die ganze Kegelschnittschaar erhalten wir dadurch unendlich viele Kreise, welche ihre Mittelpunkte auf einer Geraden, der Mittelpunktslinie der Kegelschnittschaar, haben und von welchen durch jeden Punkt der Ebene ein bestimmter geht. Nehmen wir daher zwei beliebige Kegelschnitte der Schaar (etwa zwei Punktenpaare $a\alpha$, $b\beta$) und bestimmen die Ortskreise des Schnittpunktes der rechtwinkligen Tangenten (d. h. zwei Kreise über $a\alpha$ und $b\beta$ als Durchmesser), so schneiden sich dieselben im Allgemeinen in zwei (reellen oder imaginären) Punkten $P_0$ und $Q_0$; diese beiden besonderen Punkte, wenn sie reell sind, müssen die Eigenschaft haben, dass für jeden derselben zwei Tangentenpaare an zwei bestimmte Kegelschnitte der Schaar Paare rechtwinkliger Tangenten sind; folglich müssen die Strahlsysteme in diesen beiden Punkten Kreissysteme sein, oder alle Tangentenpaare sind rechtwinklig; wenn dagegen die beiden Punkte $P_0$ und $Q_0$ imaginär sind, so giebt es überhaupt keinen reellen Punkt in der Ebene, für welchen das betreffende Strahlsystem ein Kreissystem wird; sind nun die beiden Punkte $P_0$ und $Q_0$ reell, so müssen, weil die Tangentenpaare aus jedem derselben an alle Kegelschnitte der Schaar rechtwinklig sind, die sämmtlichen Ortskreise des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangenten für die ganze Kegelschnittschaar durch $P_0$ und $Q_0$ gehen, also selbst eine Kreisschaar bilden; insbesondere geht für die einzige Parabel, welche in der Kegelschnittschaar vorkommt, der Ortskreis in die Leitlinie über, welche also auch durch $P_0$ und $Q_0$ geht und die Potenzlinie (gemeinschaftliche Sekante) dieser Kreisschaar wird. Aber auch wenn die Punkte $P_0$ und $Q_0$ nicht reell sind, bilden die sämmtlichen

Ortskreise für die Kegelschnittschaar eine Kreisschaar, welche die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar enthaltenen Parabel zur Potenzlinie (ideellen gemeinschaftlichen Sekante) hat; dies lässt sich auf folgende Weise erkennen: Wir wissen (§ 30), dass das Diagonaldreieck $x\,y\,z$ des vollständigen Vierseits ein Tripel in Bezug auf jeden Kegelschnitt der Schaar ist und (§ 34 am Ende), dass der einem Tripel-Dreieck umschriebene Kreis immer den Ortskreis der rechtwinkligen Tangenten unter einem rechten Winkel schneidet; folglich besitzen alle Ortskreise die Eigenschaft, dass ihre Mittelpunkte in einer Geraden (der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$) liegen und dass sie zugleich sämmtlich einen festen Kreis, den um das Diagonaldreieck $x\,y\,z$ beschriebenen, rechtwinklig schneiden, woraus nach bekannten Elementar-Sätzen folgt, dass sie eine Kreisschaar bilden. Der um das Diagonaldreieck beschriebene Kreis, welcher seinen Mittelpunkt in der Potenzlinie der Kreisschaar oder in der Leitlinie der einzigen Parabel der Kegelschnittschaar hat, gehört der konjugirten Kreisschaar an und entscheidet also darüber, ob die Punkte $P_0$ und $Q_0$ reell sind, oder nicht; wenn nämlich dieser Kreis $\mathfrak{K}$ $(x\,y\,z)$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ nicht trifft, so sind die Punkte $P_0$ und $Q_0$ reell, wenn er dagegen die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten trifft, so sind $P_0$ und $Q_0$ imaginär; ein besonderer Fall von untergeordneterem Interesse ist der, dass der Kreis $\mathfrak{K}$ $(xyz)$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ berührt, wo dann $P_0$ und $Q_0$ zusammenfallen. Fassen wir dass gewonnene Resultat zusammen:

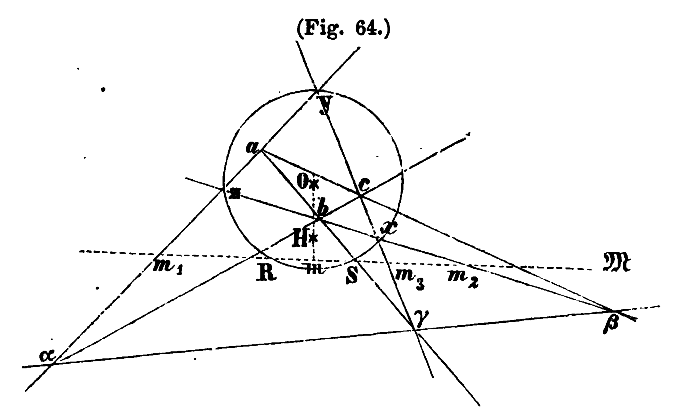
Bestimmt man für jeden Kegelschnitt einer Schaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten den Ortskreis solcher Punkte, in welchen sich je zwei rechtwinklige Tangenten treffen, so bilden diese Kreise eine Kreisschaar, deren Potenzlinie die Leitlinie der einzigen in der Kegelschnittschaar vorkommenden Parabel ist. Diese Potenzlinie enthält (§ 43) die vier Höhenpunkte derjenigen vier Dreiseite, aus welchen das vollständige Vierseit der vier gegebenen Tangenten besteht; sie enthält auch den Mittelpunkt desjenigen Kreises $\mathfrak{K}$, welcher dem Diagonaldreieck $x\,y\,z$ des vollständigen Vierseits umschrieben ist, und steht endlich senkrecht auf der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, welche die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar enthält und zugleich die Mittelpunktslinie der Kreisschaar ist. Die Potenzlinie ist eine reelle gemeinschaftliche Sekante der Kreisschaar, wenn der

eben erwähnte Kreis $\mathfrak{K}$ die Mittelpunktslinie nicht trifft; in diesem Falle gehen alle Kreise der Schaar durch dieselben beiden Punkte $P_0$ und $Q_0$ der Potenzlinie und dies sind die einzigen Punkte in der Ebene, für welche das aus den Tangentenpaaren an die Kegelschnitte der Schaar gebildete Strahlsystem ein Kreissystem wird. Die Potenzlinie ist dagegen eine ideelle gemeinschaftliche Sekante der Kreisschaar, d. h. es giebt keine reellen Punkte in der Ebene von der verlangten Eigenschaft, sobald der oben erwähnte Kreis $\mathfrak{K}$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten $R$ und $S$ trifft. In diesem Falle sind die Punkte $R$ und $S$ selbst Nullkreise der Kreisschaar, d. h. solche Ortskreise des Schnittpunktes rechtwinkliger Tangenten, für welche der Radius Null ist; dieser Fall tritt bekanntlich nur bei der gleichseitigen Hyperbel ein; die Punkte $R$ und $S$ sind also die Mittelpunkte der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche in der Kegelschnittschaar vorkommen können; sobald die Punkte $R$ und $S$ imaginär sind, giebt es keine gleichseitige Hyperbel in der Kegelschnittschaar.

Wir haben hieraus zu gleicher Zeit ersehen, dass in einer Kegelschnittschaar im Allgemeinen zwei gleichseitige Hyperbeln vorkommen und wie die Mittelpunkte derselben zu finden sind. Wir können jetzt eine von den vier Seiten des vollständigen Vierseits verändern und den Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln aufsuchen, welche einem gegebenen Dreiseit einbeschrieben sind. Seien die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und die Diagonalpunkte $x\,y\,z$ (Fig. 64), so können wir jetzt die Seite $\alpha\,\beta\,\gamma$ verändern und nur das Dreiseit $a\,b\,c$ festhalten; ohne indessen der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir die vierte Seite $\alpha\,\beta\,\gamma$ so bewegen, dass der Punkt $\alpha$ fest bleibt, denn welches auch die dem Dreiseit $a\,b\,c$ einbeschriebene gleichseitige Hyperbel sei, immer wird sich aus einem Punkte $\alpha$ der Tangente $b\,c$ eine und nur noch eine Tangente legen lassen; wir halten also den Punkt $\alpha$ fest und drehen die vierte Seite $\alpha\,\beta\,\gamma$ des vollständigen Vierseits um $\alpha$; sind dann $m_1 m_2 m_3$ resp. die Mitten der Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, welche in der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ liegen, so bleibt $m_1$ bei der Bewegung fest; die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ dreht sich also um den festen Punkt $m_1$; das Tripel $x\,y\,z$ verändert sich; sei $O$ der Mittelpunkt des um das-

selbe beschriebenen Kreises und möge dieser Kreis die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ in den Punkten $R$ und $S$ treffen, so wird das

(Fig. 64.)




Perpendikel aus $O$ auf $\mathfrak{M}$ in $m$ die Sehne $RS$ halbiren; das Perpendikel $Om$ ist aber unsere oben gefundene Potenzlinie, oder die Leitlinie der einzigen Parabel; diese Gerade enthält die Höhenpunkte der vier Dreiseite; von den vier Dreiseiten bleibt nur das Dreiseit $a\,b\,c$ fest, dessen Höhenpunkt $H$ sei; das Perpendikel $Om$ dreht sich also bei der Bewegung um den festen Punkt $H$; folglich ist der Ort des Punktes $m$ ein Kreis, welcher die festen Punkte $H$ und $m_1$ zu Endpunkten eines Durchmessers hat, also:

$$Hm^2 + m_1m^2 = Hm_1^2.$$

Da nun $m$ die Mitte der Sehne $RS$ ist, so folgt:

$$Rm = mS \quad \text{oder} \quad Rm + Sm = 0 \quad \text{und}$$

$$m_1m = m_1R + Rm = m_1S + Sm$$

$$m_1m^2 = (m_1R + Rm)(m_1S + Sm)$$

$$= m_1R \,.\, m_1S + m_1R \,.\, Sm + m_1S \,.\, Rm + mR \,.\, mS$$

$$= m_1R \,.\, m_1S + Rm \,.\, RS - Rm^2$$

$$= m_1R \,.\, m_1S + Rm^2,$$

also haben wir:

$$Hm^2 + Rm^2 = Hm_1^2 - m_1R \,.\, m_1S$$

$$HR^2 = HS^2 = Hm_1^2 - m_1R \,.\, m_1S.$$

Nun ist aber $m_1R \,.\, m_1S$ gleich der Potenz des Punktes $m_1$ in Bezug auf den Kreis $O$, und da dieser durch $y$ und $z$ geht, auch gleich $m_1y \,.\, m_1z$; da aber $y$ und $z$ harmonisch liegen zu dem Paar Gegenecken $a$ und $\alpha$, deren Mitte $m_1$ ist, so haben wir gleichzeitig $m_1y \,.\, m_1z = m_1a^2 = m_1\alpha^2$, also:

$$HR^2 = HS^2 = Hm_1^2 - m_1a^2 = \text{const.};$$

die Punkte $R$ und $S$ beschreiben also bei der Bewegung einen Kreis um den festen Punkt $H$, denn ihr Abstand von $H$ ist unverändert und der Radius dieses Kreises wird leicht zu ermitteln sein; schlagen wir nämlich über $a\alpha$ als Durchmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt $m_1$ und dessen Radius $m_1a$ sein wird, so ist die Potenz des Punktes $H$ in Bezug auf diesen Kreis gleich $Hm_1^2 - m_1a^2$; es schneidet aber $Ha$ den gedachten Kreis zum anderen Male in demjenigen Punkte $a^1$, welcher der Fusspunkt des aus $a$ auf $bc$ herabgelassenen Perpendikels ist; wenn daher die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks $abc$ mit $a^1b^1c^1$ bezeichnet werden, so ist:

$$Ha \,.\, Ha^1 = Hb \,.\, Hb^1 = Hc \,.\, Hc^1 = r^2$$

und $r$ der Radius des gesuchten Kreises. Das Quadrat des Radius dieses Kreises ist nur positiv, also der Kreis nur reell, wenn $a$ und $a^1$, ebenso $b$ und $b^1$, $c$ und $c^1$ auf derselben Seite von $H$ liegen, wenn also $H$ ausserhalb des Dreiecks $abc$ liegt, oder was dasselbe sagt, wenn das Dreieck $abc$ stumpfwinklig ist; er reducirt sich auf einen Punkt beim rechtwinkligen Dreieck und wird imaginär beim spitzwinkligen. Dieser Kreis hat ferner, wie unmittelbar aus den Polar-Eigenschaften hervorgeht, zu dem Dreieck $abc$ die Beziehung, dass letzteres ein Tripel-Dreieck für diesen Kreis ist, welcher daher „der dem Dreieck konjugirte Kreis“ heisst. Wir haben mithin folgenden Satz:*)

Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche demselben Dreiseit einbeschrieben sind, liegen auf einem Kreise, der den Höhenpunkt des Dreiseits zu seinem Mittelpunkte hat und die Ecken des Dreiseits zu einem Tripel konjugirter Punkte; dieser Kreis ist nur dann reell, wenn das Dreiseit stumpfwinklig ist, und das Quadrat seines Radius ist alsdann gleich dem konstanten Rechteck aus den Abständen des Höhenpunktes von jeder Ecke und der gegenüberliegenden Seite des Dreiseits. Es kann also auch nur einem stumpfwinkligen Dreiseit eine gleichseitige Hyperbel einbeschrieben werden. Hieraus folgt nun die Beantwortung der Frage, welche sich in § 43 darbot; dort handelte es sich näm-

*) „Vermischte Sätze und Aufgaben“ von J. Steiner im 55. Bde. des Crelle-Borchardt'schen Journals für reine und angewandte Mathematik, Seite 371.

lich darum, den Ort des Projektionspunktes $B$ zu finden, damit auf zwei gegebenen Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei solche perspektivische Punktreihen durch $B$ hervorgerufen werden, welche nach gegebener Verschiebung eine gleichseitige Hyperbel erzeugen. Die Parallelstrahlen durch $B$ bestimmen die Punkte $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ auf den Trägern und nach der Verschiebung behalten diese Punkte ihre Eigenschaft, Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen zu sein; treffen sich also die Parallelstrahlen nach der Verschiebung in $B^1$, so hat $B^1$ zu den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ dieselbe relative Lage, wie $B$ zu zwei mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gezogenen Parallelen, die durch die parallele Verschiebung nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ gelangen würden: der Ort von $B^1$ wird also dem Orte von $B$ gleich sein, nur in der angedeuteten Weise verschoben; der Ort von $B^1$ ist ferner ähnlich und ähnlich-liegend mit dem Orte der Mitte der Diagonale $\mathfrak{r}\,\mathfrak{q}_1$ des veränderlichen Parallelogramms, d. h. dem Orte des Mittelpunktes $M$ des erzeugten Kegelschnitts, denn es ist, wenn $\mathfrak{e}$ den festen Schnittpunkt der beiden Träger bezeichnet,

$$\mathfrak{e}B^1 = 2 \, . \, \mathfrak{e}M;$$

da der Ort von $M$, wie wir eben gesehen haben, ein Kreis ist, so ist es auch der Ort von $B^1$ und also auch der Ort von $B$, dessen Lage bereits früher angegeben ist (§ 43). *)

## § 45. Ueber die besondere Natur der in einer Schaar enthaltenen Kegelschnitte.

Um die Kegelschnitte einer Schaar hinsichtlich ihrer besonderen Natur genauer zu erforschen, suchen wir das dem Mittelpunkte jedes Kegelschnitts zugehörige Strahlsystem, d. h. das

*) Anmerkung. Aus der vorigen Betrachtung ergiebt sich leicht folgender allgemeinere Satz: Konstruirt man für jeden einem beliebigen Dreiseit $abc$ einbeschriebenen Kegelschnitt den Ortskreis, welcher die Schnittpunkte je zweier rechtwinkliger Tangenten enthält, so schneiden alle diese Kreise denjenigen Kreis rechtwinklig, für welchen das Dreieck $abc$ ein Tripel-Dreieck ist (d. h. den Kreis, welcher die Mittelpunkte aller dem Dreiseit einbeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln enthält); wenn also der Kegelschnitt eine Ellipse ist, so ist die Summe der Quadrate ihrer Halbaxen $(a^2 + b^2)$ gleich der Potenz des Mittelpunktes der Ellipse in Bezug auf den Kreis, für welchen das Dreiseit ein Tripel ist, dessen Centrum in dem Höhenpunkte des Dreiseits liegt u. s. w. (Faure, Nouvelles Annales de mathématiques, tome XX p. 56).

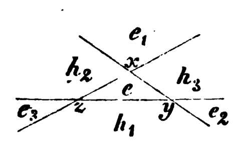
System der konjugirten Durchmesser für jeden Kegelschnitt der Schaar zu bestimmen; je nachdem dasselbe elliptisch oder hyperbolisch ist, wird nämlich der Kegelschnitt Ellipse oder Hyperbel sein, und insbesondere ist er Kreis oder gleichseitige Hyperbel, wenn sein System konjugirter Durchmesser ein Kreissystem oder ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem, endlich Parabel, wenn es ein parabolisches Strahlsystem ist. Um das System der konjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt $m$ gegeben ist, zu erhalten, reicht die Kenntniss eines Tripels konjugirter Punkte $xyz$ in Bezug auf den Kegelschnitt aus; denn ziehen wir $mx$ und durch $m$ eine Parallele zu $yz$, so ist dies ein Paar konjugirter Durchmesser, weil es ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt ist; denn der unendlich-entfernte Punkt auf $yz$ ist der Pol zu $mx$; ziehen wir zweitens $my$ und eine Parallele durch $m$ zu $zx$, so erhalten wir ein zweites Paar konjugirter Durchmesser und in gleicher Weise ein drittes Paar; zwei Paar konjugirte Durchmesser bestimmen schon das ganze Strahlsystem und wir bedürfen des dritten Paares nicht mehr.

Sobald der Mittelpunkt $m$ eines Kegelschnitts und ein Tripel konjugirter Punkte $xyz$ in Bezug auf denselben gegeben ist, ist derselbe nicht nur seiner Art nach, sondern überhaupt vollständig bestimmt; denn ziehen wir $mx$, $my$, $mz$, welche Strahlen die Gegenseiten $yz$, $zx$, $xy$ resp. in $\xi\eta\zeta$ treffen, so bestimmen $x\xi$ ein Punktsystem, dessen Mittelpunkt $m$ ist; die Asymptotenpunkte der drei Punktsysteme auf $mx$, $my$, $mz$ liegen aber auf einem Kegelschnitt, welcher $m$ zum Mittelpunkt und $xyz$ zum Tripel konjugirter Punkte hat; denn da $x\xi$ und $y\eta$ zwei Paare konjugirte Punkte in Bezug auf diesen Kegelschnitt sind, so muss auch (§ 31) $z$ und der Schnittpunkt $(xy, \xi\eta)$ ein Paar konjugirter Punkte sein; anderseits sind aber $z$ und $\zeta$ ein zweites Paar konjugirter Punkte, folglich ist $xy$ die Polare von $z$ u. s. f. Der Kegelschnitt ist nun eigentlich durch die drei Punktsysteme mehr, als bestimmt; da sich aber ihre Träger in demselben Punkt $m$ treffen, welcher Mittelpunkt für alle drei Punktsysteme ist, so widersprechen sich die ihn bestimmenden Bedingungen nicht. Nur für den Fall, dass die drei Strahlsysteme alle hyperbolisch sind, galt die vorige Bestimmung des Kegelschnitts; alle drei können nicht elliptisch sein, weil nothwendig von drei Tripelpunkten $xyz$ einer innerhalb des Kegelschnitts liegen muss, also seine

Verbindungslinie mit $m$ den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten treffen muss (§ 30). Umgekehrt, wären bei willkührlicher Annahme von $m, x, y, z$ alle drei Punktsysteme elliptisch, so müsste der gesuchte Kegelschnitt ganz imaginär sein; wohl aber kann von den drei Punktsystemen eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch, oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein, allerdings nur bei der Hyperbel, für welche ausserdem auch der erste Fall, dass alle drei hyperbolisch sind, eintreten kann. Für die Hyperbel muss nun das Strahlsystem der konjugirten Durchmesser, welches in $m$ bekannt ist, hyperbolisch sein; seine beiden Asymptoten sind die Asymptoten der Hyperbel, und da ausserdem noch ein Punktenpaar auf einem Durchmesser $mx$ allemal reell ist, so ist die Hyperbel ebenfalls als bekannt anzusehen.

Bei willkührlicher Annahme von $m, x, y, z$ gestaltet sich das Kriterium, ob der Kegelschnitt Hyperbel oder Ellipse ist, in folgender Art:

Die Seiten des Dreiecks $xyz$ theilen die ganze Ebene in 7 Räume, den endlichen Dreiecksraum ($e$), die drei den Ecken anliegenden Scheitelräume $e_1\, e_2\, e_3$ und die drei den Seiten anliegenden Räume $h_1\, h_2\, h_3$. Liegt der angenommene Mittelpunkt $m$ in $e$, so giebt es keinen reellen Kegelschnitt; liegt er in $e_1 e_2 e_3$, so giebt es einen und derselbe ist Ellipse; liegt endlich $m$ in einem der Räume $h_1 h_2 h_3$, so giebt es ebenfalls einen reellen Kegelschnitt und derselbe ist Hyperbel. (Vgl. §§ 57 und 61.)




Die Kegelschnittschaar hat ein allen Kegelschnitten gemeinschaftliches Tripel konjugirter Punkte: das Diagonaldreieck $xyz$ des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der Schaar gebildeten vollständigen Vierseits (§ 30), und ferner liegen die Mittelpunkte $m$ aller Kegelschnitte der Schaar auf einer Geraden $\mathfrak{M}$, der Mittelpunktslinie (§ 43), und erfüllen dieselbe; die Strahlen $mx$ und $my$ beschreiben also zwei perspektivische Strahlbüschel, während der Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt $m$ ist, die ganze Schaar durchläuft, und die konjugirten Durchmesser zu $mx$ und $my$ behalten konstante Richtung. Wir denken uns nun die Durchmessersysteme sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar parallel mit sich nach einem und demselben Punkte $o$ der Ebene hin

verschoben mit Beibehaltung ihrer Richtung und legen einen beliebigen Kegelschnitt $C$ durch den Punkt $o$; dann liefert jedes der nach $o$ verlegten Strahlsysteme der konjugirten Durchmesser einen bestimmten Punkt $P$ in der Ebene; denn bekanntlich schneiden die Paare konjugirter Strahlen eines Strahlsystems, dessen Mittelpunkt in der Peripherie eines Kegelschnitts liegt, Sehnen in dem Kegelschnitte aus, welche sämmtlich durch einen Punkt $P$ laufen (§ 31); dieser Punkt ist schon durch zwei Strahlenpaare bestimmt; ziehen wir also durch $o$ eine Parallele zu $yz$, welche den Hülfskegelschnitt $C$ in $\alpha$ trifft, eine Parallele zu $zx$, welche ihn in $\beta$ trifft; ziehen wir ferner durch $o$ zwei Parallele zu $xm$ und $ym$, welche den Hülfskegelschnitt in $\alpha^1$ und $\beta^1$ treffen, so wird der Schnittpunkt von $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ der Punkt $P$ sein, welcher dem Strahlsystem der konjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt $(m)$ entspricht. Verändern wir jetzt $m$ auf der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, um die ganze Schaar zu erhalten, so beschreiben $xm$ und $ym$ zwei perspektivische Strahlbüschel, folglich auch $o\alpha^1$ und $o\beta^1$ zwei projektivische Strahlbüschel; weil aber $o$ und $\alpha$ zwei feste Punkte des Hülfskegelschnitts $C$ sind, so werden $o\alpha^1$ und $\alpha\alpha^1$ zwei projektivische Strahlbüschel beschreiben, ebenso $o\beta^1$ und $\beta\beta^1$, folglich beschreiben auch $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ zwei projektivische Strahlbüschel; der Ort ihres Schnittpunktes $P$ ist also ein bestimmter Kegelschnitt $C_1$, welcher durch $\alpha$ und $\beta$ geht; dass er auch durch $\gamma$, den Schnittpunkt eines parallel mit $xy$ durch $o$ gezogenen Strahles mit dem Kegelschnitte $C$ hindurchgeht, ist einleuchtend, da wir statt $\alpha$ und $\beta$ auch $\alpha$ und $\gamma$ oder $\beta$ und $\gamma$ hätten wählen können; es geht auch daraus hervor, dass, wenn $m$ insbesondere in den Schnittpunkt der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit $xy$ rückt, der Punkt $P$ nach $\gamma$ gelangt. Es ist nun auch leicht, den vierten Schnittpunkt der Kegelschnitte $C$ und $C_1$ zu finden; gelangt nämlich $m$ insbesondere nach dem unendlich-entfernten Punkte der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, so wird der Punkt $P$ die Lage eines Punktes $\delta$ annehmen, welches der Schnittpunkt einer durch $o$ zur Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ gezogenen Parallelen mit dem Hülfskegelschnitte $C$ ist. Die Kegelschnitte $C$ und $C_1$ begegnen sich also in den leicht anggebbaren vier Punkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Wir haben demnach zunächst folgenden Satz gefunden:

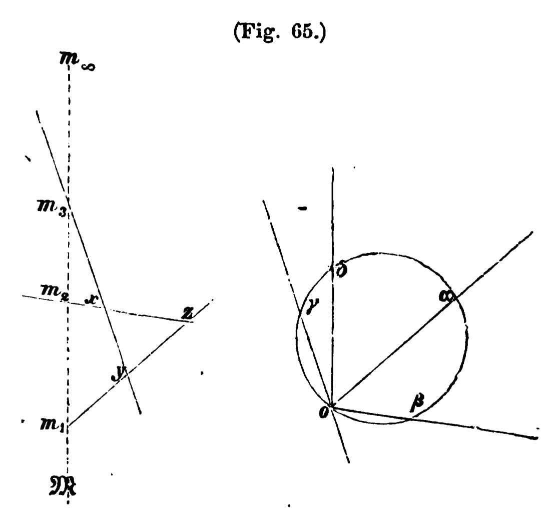
Verschiebt man die Strahlsysteme der konjugirten Durchmesser für sämmtliche Kegelschnitte einer

Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten mit Beibehaltung ihrer Richtung (ohne Drehung) nach einem Punkte $o$ eines beliebigen Kegelschnitts $C$, so bestimmt jedes Strahlsystem einen Punkt $P$ in der Ebene, durch welchen die Durchbohrungssehnen jedes Paares konjugirter Strahlen laufen; der Ort sämmtlicher Punkte $P$ für alle Kegelschnitte der Schaar ist ein bestimmter Kegelschnitt $C_1$, der insbesondere mit $C$ diejenigen vier Punkte gemein hat, in welchen die durch $o$ mit den drei Diagonalen des Vierseits und der Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ gezogenen Parallelen dem Kegelschnitt $C$ begegnen.

Ist der Kegelschnitt $C_1$ einmal ermittelt, so haben wir eine leicht übersehbare Abhängigkeit einerseits zwischen den Kegelschnitten der Schaar oder ihren Mittelpunkten $m$ auf $\mathfrak{M}$ und ihren zugehörigen Durchmessersystemen und anderseits den sämmtlichen Punkten $P$ des Kegelschnitts $C_1$; jeder Punkt dieses Kegelschnitts als Mittelpunkt eines Strahlbüschels aufgefasst liefert nämlich Strahlen, welche den Hülfskegelschnitt $C$ in Punktenpaaren treffen, und diese mit $o$ verbunden geben je ein Strahlsystem, welches dem Durchmessersystem eines bestimmten Kegelschnitts der Schaar parallel läuft; oder auch: Die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, welche die Mitten $m_1 m_2 m_3$ der drei Diagonalen des Vierseits enthält und deren unendlich-entfernten Punkt wir mit $m_\infty$ bezeichnen wollen, wird durch die vier Punkte $m_1 m_2 m_3 m_\infty$ in vier Stücke zerschnitten und anderseits zerfällt der Kegelschnitt $C_1$ durch die vier in ihm enthaltenen Punkte $\alpha \beta \gamma \delta$ in vier Stücke (falls er eine Hyperbel ist, muss dieselbe als zusammenhängende Kurve in dem früher (§ 26) angegebenen Sinne aufgefasst werden); alsdann enthalten die Strecken zwischen $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, $m_3 m_\infty$, $m_\infty m_1$ die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte der Schaar, deren Durchmessersystem nach $o$ verlegt Punkte $P$ liefern, welche beziehungsweise die Stücke $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1$ erfüllen (Fig. 65). Für die besonderen Punkte $\alpha \beta \gamma \delta$ selbst wird das Strahlsystem parabolisch, die vier Kegelschnitte, welche diesen Punkten entsprechen, müssen also Parabeln sein; dies ist in der That der Fall, obwohl nur der einzige dem Punkt $\delta$ entsprechende Kegelschnitt eine eigentliche Parabel ist; die den drei Punkten $\alpha\beta\gamma$ entsprechenden Kegelschnitte der Schaar sind aber die drei

Punktenpaare (drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits) und ein solches Punktenpaar oder die doppelt gedachte Verbindungslinie desselben kann nicht blos, wie wir gesehen haben, als Ellipse oder Hyperbel (mit einer verschwindend kleinen Axe),

(Fig. 65.)




sondern ebensowohl als eine specielle Parabel aufgefasst werden, denn sie hat zwei zusammenfallende unendlich-entfernte Punkte, was das charakteristische Merkmal der Parabel ist; auch trat schon bei der Betrachtung der Parabelschaar (§ 43) eine solche Doppellinie als specielle Parabel auf. Je nachdem nun der Punkt $P$ innerhalb oder ausserhalb des Hülfskegelschnitts $C$ liegt, ist das Strahlsystem in $o$ oder das mit ihm parallele Durchmessersystem des Kegelschnitts der Schaar elliptisch oder hyperbolisch, dieser Kegelschnitt selbst also auch Ellipse oder Hyperbel. Wir erkennen hieraus das bereits früher (§ 43) gefundene Resultat, dass die Kegelschnittschaar im Allgemeinen aus zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln besteht, welche mit einander abwechseln, so dass auf eine Gruppe Ellipsen eine Gruppe Hyperbeln u. s. w. folgt, und dass diese vier Gruppen durch die vier erwähnten Parabeln von einander getrennt werden, denn sobald der Kegelschnitt $C_1$ durch einen der vier Schnittpunkte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ geht, tritt er entweder aus der Region innerhalb des Kegelschnitts $C$ in die ausserhalb desselben oder umgekehrt (mit Ausnahme des besonderen Falles, dass zwei von den vier Punkten zusammenfallen).

Denken wir uns irgend ein Paar konjugirter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes der Schaar parallel nach $o$ verschoben, so wird die Durchbohrungssehne in dem Kegelschnitt $C$ den Kegelschnitt $C_1$ im Allgemeinen und höchstens in zwei Punkten $P$ und $P^1$ treffen, welche zwei bestimmten Kegelschnitten der Schaar entsprechen; jedes Paar konjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes der Schaar ist also, im Allgemeinen, mit einem Paar konjugirter Durchmesser eines der übrigen parallel; daher haben die Kegelschnitte insbesondere auch paarweise parallele Axen; solche Paare von Kegelschnitten mit parallelen Axen erhalten wir in der Weise, dass wir nach $o$ ein Kreissystem verlegen, dessen Durchbohrungssehnen in $C$ durch einen festen Punkt $\mu$ laufen; jeder durch $\mu$ gezogene Strahl trifft $C_1$ in zwei solchen Punkten $P$ und $P^1$, deren entsprechende Kegelschnitte der Schaar parallele Axen haben, denn jede durch $\mu$ gezogene Sehne bestimmt in $C$ zwei Punkte, die mit $o$ verbunden die Richtungen der Axen liefern. Es kann aber insbesondere vorkommen, dass die Schnittpunkte $P$ und $P^1$ zusammenfallen oder ihre Verbindungslinie eine Tangente des Kegelschnitts $C_1$ ist, und zwar giebt es durch jeden Punkt $P$ eine bestimmte Tangente an $C_1$; eine solche liefert als Sehne in $C$ zwei Schnittpunkte, die mit $o$ verbunden ein besonderes Paar konjugirter Durchmesser des dem $P$ entsprechenden Kegelschnitts bestimmen; mit diesem Paare wird kein Paar konjugirter Durchmesser irgend eines andern Kegelschnittes der Schaar parallel sein; also jeder Kegelschnitt der Schaar hat ein besonderes Paar konjugirter Durchmesser, welches mit keinem Paar konjugirter Durchmesser irgend eines der übrigen parallel ist, und es giebt, im Allgemeinen, zwei Kegelschnitte, bei denen dies besondere Paar die Axen sind; die beiden aus dem Punkte $\mu$ an den Kegelschnitt $C_1$ gelegten Tangenten haben nämlich zu Berührungspunkten die besonderen Punkte $P$, deren entsprechende Kegelschnitte der Schaar das besondere Paar konjugirter Durchmesser zu Axen haben.

Um zu ermitteln, ob und wie viel gleichseitige Hyperbeln in der Kegelschnittschaar enthalten sind, denken wir uns in den Schnittpunkten der durch $\mu$ gezogenen Sehnen mit dem Kegelschnitt $C$ Tangentenpaare an dem letzteren, die sich in

Punkten schneiden, welche auf der Polare von $\mu$ in Bezug auf $C$ liegen; diese Polare $\mathfrak{L}$ wird nun den Kegelschnitt $C_1$ im Allgemeinen in zwei Punkten $P$ und $P^1$ treffen; jeder derselben hat die Eigenschaft, dass sein Tangentenpaar an $C$ in zwei Punkten berührt, die mit $o$ verbunden zwei rechtwinklige Strahlen liefern; diese sind aber die Asymptoten des Strahlsystems, welches dem $P$ zugehört; es ist ein hyperbolisch-gleichseitiges, weil seine beiden Asymptoten rechtwinklig zu einander sind; jene beiden Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit dem Kegelschnitt $C_1$ bestimmen also zwei solche Punkte $P$, dass die ihnen entsprechenden Kegelschnitte der Schaar gleichseitige Hyperbeln werden; es giebt mithin in der Kegelschnittschaar zwei oder keine oder eine gleichseitige Hyperbel, je nachdem $\mathfrak{L}$ und $C_1$ sich schneiden oder nicht treffen oder berühren. (Vergl. § 44.)

Insbesondere kann die Kegelschnittschaar nur einen Kreis enthalten, wenn der Kegelschnitt $C_1$ durch den Punkt $\mu$ geht, für welchen das Strahlsystem in $o$ ein Kreissystem wird. Sollen zwei Kreise in der Kegelschnittschaar vorkommen, so muss der Kegelschnitt $C_1$ in $\mu$ einen Doppelpunkt haben, d. h. in ein Linienpaar zerfallen; suchen wir daher überhaupt die Bedingungen auf, damit der Kegelschnitt $C_1$ zerfalle; dies wird dann eintreten, wenn die beiden den Kegelschnitt $C_1$ erzeugenden projektivischen Strahlbüschel $(\alpha)$ und $(\beta)$ perspektivisch liegen, also in die Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechende Strahlen hineinfallen; dies ist aber wieder nur möglich, wenn die Richtungen von $m_2x$ und $m_2y$ zusammenfallen oder die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der Diagonale $xy$ koincidirt; dann fällt aber $m_2$ in $x$ und $m_1$ in $y$ hinein, und da $m_2$ die Mitte zweier Gegenecken des vollständigen Vierseits ist, welche mit $x$ und $z$ harmonisch liegen, so muss, da $x$ in die Mitte zwischen zwei zugeordneten Punkten fällt, der vierte harmonische Punkt $z$ in die Unendlichkeit gehen; ebenso auf der Diagonale $yz$; also das ursprünglich gegebene Vierseit muss die Eigenschaft haben, dass zwei Diagonalen desselben parallel laufen, wobei die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der dritten Diagonale zusammenfällt. Der Kegelschnitt $C_1$ reducirt sich dann, weil $\alpha\beta$ zusammenfallen und auch $\gamma\delta$ zusammenfallen, also zwei Doppelpunkte in ihm vorkommen, auf die doppelt zu zählende Verbindungslinie derselben und enthält nicht nur einen, sondern unendlich viele Doppelpunkte. Ein Doppel-

punkt des Kegelschnitts $C_1$ liefert nun in $o$ zwei gleiche auf einander fallende Strahlsysteme, entspricht also in der Kegelschnittschaar zwei Kegelschnitten, deren Durchmessersysteme gleich und gleichgerichtet sind; zwei solche Kegelschnitte heissen ähnlich und ähnlich-liegend; wir schliessen also:

Unter den gesammten Kegelschnitten der Schaar, giebt es im Allgemeinen keine zwei, welche ähnlich und ähnlich-liegend sind; wenn es aber insbesondere ein solches Paar giebt, so sind alle übrigen auch paarweise ähnlich und ähnlich-liegend; dieser besondere Fall tritt ein, wenn zwei Diagonalen des Vierseits parallel sind, wo dann die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ mit der dritten Diagonale zusammenfällt. Der Kegelschnitt $C_1$ degenerirt dabei in eine doppelte gerade Linie; geht diese insbesondere noch durch den Punkt $\mu$, so giebt es zwei Kreise in der Kegelschnittschaar, welche ebenfalls als ein Paar ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte aufzufassen sind. (Wir überlassen dem Leser die Untersuchung eines andern Falles, in welchem gleicherweise die Richtungen $m_2x$ und $m_2y$ auf einander fallen, wenn nämlich $y$ mit $x$ coincidirt; alsdann entsteht ein besonderes Vierseit, von welchem zwei Seiten zusammenfallen und auch zwei Diagonalen auf dieselben; die Kegelschnitte dieser speciellen Schaar berühren sämmtlich eine Gerade (das zusammenfallende Seitenpaar) in einem und demselben festen Punkte und ausserdem zwei andere Gerade; die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$ enthält nur eine elliptische und zwei hyperbolische Regionen; der Kegelschnitt $C_1$ degenerirt in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt auf dem Kegelschnitt $C$ liegt; es giebt also keine zwei ähnliche und ähnlich-liegende Kegelschnitte u. s. w.; auch weitere Specialisirungen ergeben sich ohne Schwierigkeit aus der obigen allgemeinen Betrachtung.)

Eine besondere Einfachheit gewinnt die Untersuchung, wenn wir für den beliebig zu wählenden Hülfskegelschnitt $C$ einen Kreis annehmen; für den Kreis wird nämlich zunächst der Punkt $\mu$ der Mittelpunkt und alle solche Punkt $P$, die gleichweit vom Mittelpunkte abstehen, also auf einem concentrischen Kreise liegen, geben in $o$ gleiche Strahlsysteme, was aus der in § 42 gemachten Bemerkung hervorgeht, indem einerseits das Tangentenpaar aus $P$ an den Kreis zwei Berührungspunkte liefert, welche

mit $o$ verbunden die Asymptoten des Strahlsystems geben, oder anderseits die durch $P$ gezogene kleinste Sehne des Kreises denselben in zwei Punkten trifft, welche mit $o$ verbunden das den gleichen konjugirten Durchmessern entsprechende Strahlenpaar liefern ($gh_1$ und $hg_1$), deren Halbirungsstrahlen die Axen sind. Mit Hülfe dieser Bemerkung erkennen wir, dass irgend ein mit dem Kreise $C$ concentrischer Kreis im Allgemeinen den Kegelschnitt $C_1$ in vier solchen Punkten $P$ treffen wird, deren entsprechende Kegelschnitte ähnlich (aber nicht ähnlich-liegend) sind, weil die diesen vier Kegelschnitten der Schaar zugehörigen Durchmessersysteme gleich sind, und zwar wird, wenn wir den Radius eines solchen mit dem ursprünglichen concentrisch angenommenen Kreises verändern, ein Kreis, dessen Radius grösser ist als der von $C$, im Allgemeinen in vier Punkten den Kegelschnitt $C_1$ treffen, welche vier ähnliche Hyperbeln der Kegelschnittschaar liefern, während ein Kreis, dessen Radius kleiner ist als der von $C$, immer in vier solchen Punkten trifft, welche vier ähnliche Ellipsen der Kegelschnittschaar liefern; auch ist ersichtlich, dass von diesen vier ähnlichen Kegelschnitten immer zwei einer der vier oben hervorgehobenen Gruppen und die beiden andern der zweiten gleichartigen Gruppe angehören; doch treten bei der stetigen Veränderung des mit $C$ concentrischen Kreises gewisse Grenzen auf, welche zu alleinstehenden Kegelschnitten führen oder bei denen ein solches Paar in einen einzigen Kegelschnitt zusammenfällt. Im Allgemeinen wird es bei jeder der vier Gruppen in der Kegelschnittschaar ein Mal vorkommen, dass die beiden ähnlichen Kegelschnitte zusammenfallen, indem durch das Wachsen oder Abnehmen des Radius eines mit $C$ concentrischen Kreises die zwei Schnittpunkte desselben mit einem der vier Kurvenstücke $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$ des Kegelschnitts $C_1$ einander genähert werden können, bis sie zuletzt zusammenfallen; ein solcher Kreis wird den Kegelschnitt $C_1$ berühren, sein nach dem Berührungspunkte gezogener Radius wird also eine Normale des Kegelschnitts $C_1$ sein und jene alleinstehenden Kegelschnitte werden daher bestimmt durch die Fusspunkte der Normalen, welche sich aus dem Mittelpunkte $\mu$ des Hülfskreises $C$ an den Kegelschnitt $C_1$ ziehen lassen.*) Diese

*) Anmerkung. Das schon von Apollonius gelöste Problem: „Durch einen gegebenen Punkt an einen gegeben[illegible] schnitt Normalen zu legen", ist von demselben zur[illegible]

Fusspunkte können wir auf folgende Weise ermitteln: Möge ein solcher um den Mittelpunkt $\mu$ beschriebener Kreis den Kegelschnitt $C_1$ in zwei Punkten $\alpha^1 \beta^1$ treffen, so wird die Mitte der Sehne $\alpha^1 \beta^1$ einmal in dem von $\mu$ auf dieselbe gefällten Perpen-

die Bestimmung der Durchschnittspunkte des Kegelschnitts mit einer gewissen gleichseitigen Hyperbel, zu welcher wir in folgender Weise gelangen können: Sei $o$ der gegebene Punkt und $m$ der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnitts $K$, ferner $p$ ein veränderlicher Peripheriepunkt desselben, dann müsste, wenn $op$ eine Normale des Kegelschnitts in $p$ wäre, die Tangente in $p$ auf $op$ senkrecht stehen; diese Tangente ist aber parallel mit dem zu $mp$ konjugirten Durchmesser; ziehen wir daher einen beliebigen Durchmesser $mp$ und fällen aus $o$ auf den konjugirten Durchmesser desselben ein Perpendikel, welches den ersteren in $x$ trifft, so wird der Ort von $x$ bei der Bewegung von $p$ ein solcher sein, dass er durch die Fusspunkte der aus $o$ auf den Kegelschnitt $K$ herabgelassenen Normalen hindurchgeht; dieser Ort von $x$ ist leicht zu ermitteln, denn während $p$ sich auf dem Kegelschnitt herumbewegt, beschreibt der zu $mp$ konjugirte Durchmesser $m\pi$ ein Strahlbüschel und da $mp$ und $m\pi$ ein Strahlsystem, das konjugirte Durchmessersystem, bilden, sind die von $mp$ und $m\pi$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch (§ 17); die aus $o$ auf $m\pi$ gezogene Senkrechte beschreibt aber ein mit $m\pi$ gleiches Strahlbüschel, also sind auch die von $mp$ und $ox$ beschriebenen Strahlbüschel unter sich projektivisch, mithin der Ort von $x$ ein Kegelschnitt, welcher durch $m$ und $o$ geht; dieser Kegelschnitt ist eine gleichseitige Hyperbel, weil insbesondere die zu den Axen des Kegelschnitts $K$ durch $o$ gezogenen Parallelen nach den unendlich-entfernten Punkten des gefundenen Kegelschnitts hingehen, also in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen. Die gefundene gleichseitige Hyperbel schneidet nun den gegebenen Kegelschnitt $K$ im Allgemeinen in vier Punkten, welche mit $o$ verbunden die vier gesuchten Normalen des Kegelschnitts sind; die vier Schnittpunkte können aber paarweise zusammenfallen oder imaginär werden, wodurch denn auch die im Allgemeinen stattfindenden vier Lösungen der Aufgabe paarweise zusammenfallen oder imaginär werden. Ist der gegebene Kegelschnitt $K$ eine Parabel, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, so tritt eine leichte Modifikation der vorigen Konstruktion ein; jeder zur Axe gezogene Parallelstrahl hat zu seiner konjugirten Richtung die Richtung der Tangente in seinem endlichen Schnittpunkte mit der Parabel. Auf diese ist also aus dem gegebenen Punkte $o$ immer ein Perpendikel zu fällen, welches jenen Parallelstrahl in $x$ trifft; der Ort von $x$ bleibt eine gleichseitige Hyperbel, welche einen ihrer unendlich-entfernten Punkte mit der Parabel gemeinschaftlich hat; die andern drei Schnittpunkte sind die Fusspunkte der drei aus $o$ an die Parabel zu ziehenden Normalen; die vierte Normale ist die von $o$ zur Parabelaxe gezogene Parallele, also von vornherein bekannt.

dikel liegen und anderseits in demjenigen Durchmesser des Kegelschnitts $C_1$, welcher der Richtung $\alpha^1 \beta^1$ konjugirt ist; der Ort des Mittelpunkts dieser Sehne ist daher leicht zu bestimmen: Wir ziehen durch den Mittelpunkt $M$ des gegebenen Kegelschnitts $C_1$ einen veränderlichen Strahl $l$ und den konjugirten Durchmesser $\lambda$, aus dem festen Punkte $\mu$ fällen wir auf $l$ ein Perpendikel, dessen Schnittpunkt mit $\lambda$ der Mittelpunkt der Sehne ist; bei der Veränderung von $l$ beschreiben nun $l$ und $\lambda$ ein Strahlsystem, also zwei projektivische Strahlbüschel, das Perpendikel von $\mu$ auf $l$ ebenfalls ein mit jenem projektivisches Strahlbüschel, folglich ist der Ort des Mittelpunktes der Sehne ein Kegelschnitt, welcher durch $M$ und $\mu$ geht, und zwar eine gleichseitige Hyperbel, weil, wenn $l$ und $\lambda$ die Axen des Kegelschnitts $C_1$ werden, die beiden unendlich-entfernten Punkte des gefundenen Kegelschnitts hervorgehen, die in zwei rechtwinkligen Richtungen liegen. Diese gleichseitige Hyperbel trifft nun den Kegelschnitt $C_1$ in solchen Punkten, für welche die gemeinschaftliche Sehne $\alpha^1 \beta^1$ den Werth Null hat, also der um $\mu$ beschriebene Kreis den Kegelschnitt $C_1$ berührt; es giebt daher im Allgemeinen vier solche Kreise, deren Berührungspunkte die Fusspunkte der aus $\mu$ an $C_1$ gezogenen Normalen sind; diese Berührungspunkte haben zugleich die Eigenthümlichkeit, dass ihr Abstand von dem Kreismittelpunkte $\mu$ unter den Abständen aller Punkte $P$ des Kegelschnitts $C_1$ von dem Punkte $\mu$ ein Maximum oder Minimum ist, woraus folgt, dass die von diesen besonderen Punkten $P$ in $o$ hervorgerufenen Strahlsysteme die Eigenthümlichkeit besitzen, dass sie entweder den Kreissystemen am nächsten kommen oder von dem hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystem am meisten abweichen, da (§ 42) der Winkel zwischen den gleichen konjugirten Durchmessern, oder der Winkel zwischen den Asymptoten oder das Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ für einen solchen Punkt ein Maximum oder Minimum wird. Hieraus folgt, dass es auch in der Kegelschnittschaar vier besondere Kegelschnitte giebt, deren Axenverhältniss ein Maximum oder Minimum ist, und zwar in jeder Gruppe Ellipsen eine solche, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt (oder selbst ein Kreis ist), und in jeder Gruppe Hyperbeln eine solche, welche von der gleichseitigen am meisten abweicht. Die Aufgabe, diese vier ausgezeichneten Kegelschnitte der Schaar zu finden, ist nach dem

Vorigen darauf zurückgeführt, aus einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt Normalen zu ziehen, oder die Durchschnittspunkte eines gegebenen Kegelschnitts mit einer gleichseitigen Hyperbel zu ermitteln; das Resultat der vorigen Untersuchung lässt sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Unter den Kegelschnitten einer Schaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten sind im Allgemeinen immer je vier einander ähnlich und jede vier ähnliche gehören paarweise zwei gleichartigen Gruppen an (§ 43), so dass man also auch sagen kann, die Kegelschnitte jeder Gruppe, für sich betrachtet, seien paarweise ähnlich. In jeder Gruppe giebt es einen einzelnen Kegelschnitt, welcher keinem andern derselben Gruppe ähnlich ist, und zwar in jeder der beiden Gruppen Ellipsen ist dies eine solche, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt (oder insbesondere selbst ein Kreis ist), in jeder der beiden Gruppen Hyperbeln eine solche Hyperbel, welche unter allen von der gleichseitigen am meisten abweicht, oder überhaupt ein solcher Kegelschnitt, für welchen das Axenverhältniss ein Maximum oder Minimum wird. (Steiner, Vermischte Sätze und Aufgaben, Crelle-Borchardt's Journal Bd. 55, pag. 374.)

Wir haben bisher die Untersuchung einer Kegelschnittschaar auf den Fall von vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten beschränkt; die den Betrachtungen in §§ 40 und 41 analogen führen aber auch zu Kegelschnittschaaren mit zwei reellen und zwei imaginären oder mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten. Für diese beiden Fälle treten mitunter Modifikationen der gefundenen Eigenschaften der Kegelschnittschaar ein, welche sich aus der Uebertragung der in §§ 40 und 41 angestellten Betrachtungen ermitteln lassen; es giebt aber für die nähere Untersuchung dieser beiden Kegelschnittschaaren noch ein einfacheres Mittel, nämlich die Polarisation einer Kreisschaar mit einer reellen oder ideellen gemeinschaftlichen Sekante (Potenzlinie); dadurch, dass man in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt (oder Kreis) als Basis diese beiden Gebilde polarisirt, erhält man einmal eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten und das andere Mal eine Kegel-

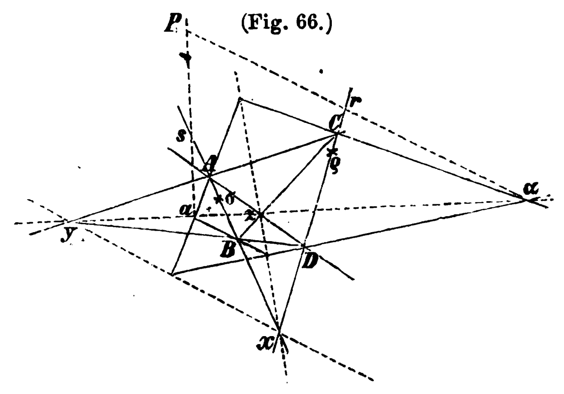
schnittschaar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten. Wir unterlassen die Ausführung dieser Untersuchung, welche sich zu geometrischen Uebungen sehr empfiehlt. (S. § 49.)

## § 46. **Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels.**

Das in § 43 gefundene Resultat, dass die Mittelpunkte einer Kegelschnittschaar auf einer Geraden liegen, so wie das schon in § 38 hervorgetretene Ergebniss, dass die Mittelpunkte eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln auf einem Kreise liegen, führt darauf hin, sowohl für das allgemeine Kegelschnittbüschel den Ort der Mittelpunkte aufzusuchen, als auch in erweiterter Fassung, da der Mittelpunkt der Pol der unendlich-entfernten Geraden, also nur ein besonderer Fall des Poles irgend einer Geraden in der Ebene ist, die vier Fragen zu beantworten: Was ist der Ort des Poles einer festen Geraden in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar und eines Büschels? Was ist der Ort der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels und einer Schaar? wovon die beiden letzteren die polaren Fragen der beiden ersteren sind, also in bekannter Weise von jenen abhängen.

Indem wir zuvörderst von einem Kegelschnittbüschel mit vier reellen Mittelpunkten $ABCD$ ausgehen, wollen wir den Ort der Polaren eines festen Punktes $P$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels ermitteln. Sei $xyz$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $ABCD$ (Fig. 66), dann erhalten wir nach § 38

(Fig. 66.)




leicht einen Kegelschnitt des Büschels, indem wir einen beliebigen Punkt $a$ der Diagonale $yz$ mit $A$ verbinden und diese Gerade

als Tangente des Kegelschnitts ansehen; $aB$ ist dann die Tangente in $B$, und verbinden wir den Schnittpunkt der Geraden $aA$ und der Diagonale $xz$ mit $C$, den Schnittpunkt der Geraden $aB$ und der Diagonale $xz$ mit $D$, so treffen sich diese beiden Geraden, welche die Tangenten in $C$ und $D$ am Kegelschnitte sind, auf der Diagonale $yz$ in einem Punkte $\alpha$; $a$ und $\alpha$ liegen harmonisch zu $yz$ u. s. w. Um nun zu irgend einem Punkte $P$ in der Ebene die Polare zu erhalten in Bezug auf den bestimmten Kegelschnitt des Büschels, dessen Tangente in $A$, $Aa$ ist, ziehe ich $aP$, welches in $s$ die Berührungssehne $AB$ trifft, und bestimme von $s$ den vierten harmonischen Punkt $\sigma$ zu $A$ und $B$; dann wird, weil $a$ der Pol von $AB$ ist, $\sigma$ der Pol von $aP$ sein; zweitens ziehe ich $P\alpha$, welches in $r$ die Sehne $CD$ trifft, und bestimme zu $r$ den vierten harmonischen Punkt $\varrho$ auf $CD$; dann wird $\varrho$ der Pol von $P\alpha$ sein, folglich $\varrho\sigma$ die Polare von $P$. Halten wir diese Konstruktion fest und verändern jetzt den Kegelschnitt des Büschels, indem wir den Punkt $a$ auf der Diagonale $yz$ fortrücken, so beschreiben $a\alpha$ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte $yz$ sind, weil sie beständig zu $y$ und $z$ harmonisch liegen; ebenso beschreiben $s\sigma$ ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte $A$ und $B$ sind, und auch $r\varrho$ ein solches, dessen Asymptotenpunkte $C$ und $D$ sind. Jedes Punktsystem ist aber in sich projektivisch, d. h. die konjugirten Punkte eines Punktsystems bilden zwei projektivische Punktreihen (§ 16); also beschreiben $a$ und $\alpha$ zwei projektivische Punktreihen, $s$ und $\sigma$ zwei solche und $r$ und $\varrho$ ebenfalls; nun liegen die Punktreihen $s$ und $a$ perspektivisch in Bezug auf den Projektiospunkt $P$, ebenso $r$ und $\alpha$; folglich da $\sigma$ mit $s$, $s$ mit $a$, $a$ mit $\alpha$, $\alpha$ mit $r$, $r$ mit $\varrho$ projektivisch sind, so ist auch $\sigma$ mit $\varrho$ projektivisch; diese beiden von $\varrho$ und $\sigma$ beschriebenen projektivischen Punktreihen liegen, wie leicht zu erkennen ist, perspektivisch, weil in den Schnittpunkt der Träger $AB$ und $CD$, d. h. in den Punkt $x$ zwei entsprechende Punkte hineinfallen (wenn $a$ nämlich in $AB$ hineinfällt, also $\alpha$ in $CD$ u. s. w.), folglich läuft die Verbindungslinie $\varrho\sigma$ durch einen festen Punkt. Die Polaren des Punktes $P$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels laufen daher durch einen festen Punkt $Q$ und bilden ein Strahlbüschel, welches projektivisch ist mit der von dem Punkte $a$ beschriebenen Punktreihe, d. h. mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Mittel-

punkte gebildeten Strahlbüschel. Der Punkt $Q$ kann jetzt leicht gefunden werden, indem wir $P$ mit den Diagonalpunkten $xyz$ verbinden und zu jedem dieser Strahlen und dem in dem Diagonalpunkte sich kreuzenden Linienpaar den vierten harmonischen Strahl konstruiren; diese drei Strahlen müssen sich in dem gesuchten Punkte $Q$ treffen; die Punkte $P$ und $Q$ heissen „konjugirte Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel“, denn aus der Polartheorie (§ 30) geht hervor, dass auch die Polaren von $Q$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels durch $P$ gehen oder dass $P$ und $Q$ ein Paar konjugirte Punkte sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels. Denken wir uns den bestimmten Kegelschnitt des Büschels konstruirt, welcher durch $P$ geht, so muss auch die Polare von $P$ in Bezug auf ihn, d. h. seine Tangente in $P$ durch $Q$ gehen und ebenso muss für den durch $Q$ gehenden Kegelschnitt des Büschels die Tangente in $Q$ durch $P$ gehen; die Verbindungslinie $PQ$ wird also von zwei Kegelschnitten des Büschels und zwar in den Punkten $P$ und $Q$ berührt oder: auf der Verbindungslinie $PQ$ sind $P$ und $Q$ die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird (§ 39). Das gefundene Resultat lässt sich in folgenden Satz zusammenfassen:

Die Polaren eines festen Punktes $P$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen Mittelpunkten $ABCD$ laufen durch denselben festen Punkt $Q$, so dass also $P$ und $Q$ ein Paar konjugirte Punkte sind in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und auch die Polaren von $Q$ sämmtlich durch $P$ laufen. Für irgend zwei Punkte $P$ und $P^1$ in der Ebene bilden die Polaren zwei Strahlbüschel ($Q$) und ($Q^1$), welche allemal projektivisch sind, indem je zwei Polaren in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels entsprechende Strahlen werden. Das Strahlbüschel ($Q$) ist insbesondere auch projektivisch mit dem von den Tangenten der Kegelschnitte des Büschels in einem der vier Mittelpunkte gebildeten und also auch (§ 39), wenn wir auf die Entstehung des Kegelschnittbüschels aus dem Strahlbüschel zurückgehen, mit demjenigen Strahlbüschel ($P$) (§ 38), aus welchem das Kegelschnittbüschel hervorgeht.

Hieraus folgt weiter, wenn wir zwei Punkte $P$ und $P^1$ fest-

halten und die Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels konstruiren, deren Schnittpunkt der Pol der Verbindungslinie $PP^1$ sein muss, dass der Ort des Poles einer festen Geraden ($PP^1$) in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels der Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen der beiden projektivischen Strahlbüschel ($Q$) und ($Q^1$), also im Allgemeinen ein Kegelschnitt sein wird. Dieser Kegelschnitt ist zugleich der Ort derjenigen Punkte, welche in Bezug auf das Kegelschnittbüschel den sämmtlichen Punkten der festen Geraden ($PP^1$) konjugirt sind; denn der konjugirte Punkt zu dem Schnittpunkte zweier entsprechender Strahlen der Strahlbüschel ($Q$) und ($Q^1$) muss auf der festen Geraden ($PP^1$) liegen. Hieraus folgen sofort sechs Punkte unseres Kegelschnitts, nämlich diejenigen, welche den Schnittpunkten der festen Geraden mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf jedes Paar Ecken. Anderseits ist ersichtlich, dass die drei Diagonalpunkte $xyz$ ebenfalls Punkte des gefundenen Kegelschnitts sein müssen, weil sie die Pole der festen Geraden in Bezug auf die drei Linienpaare des Kegelschnittbüschels sind, und endlich können wir noch zwei Punkte dieses Kegelschnitts angeben (welche aber imaginär werden können), nämlich die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches das Kegelschnittbüschel auf der festen Geraden ausschneidet, denn diese Punkte sind, wie wir vorhin gesehen haben, selbst ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel; wir haben daher folgendes Ergebniss: Die Pole einer festen Geraden 𝔊 in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte eines Büschels von vier festen Mittelpunkten liegen im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt 𝔎, welcher dem Diagonaldreieck $xyz$ des von den vier Mittelpunkten gebildeten vollständigen Vierecks umschrieben ist und ausserdem diejenigen sechs Punkte enthält, welche den Schnittpunkten der Geraden 𝔊 mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf jedes Eckenpaar; durch diese neun Punkte ist der Kegelschnitt 𝔎 schon mehr, als bestimmt, woraus also ein elementarer Satz folgt. Der Kegelschnitt 𝔎 ist zugleich der Ort sämmtlicher Punkte $Q$, welche den Punkten $P$ der Geraden 𝔊 in Bezug auf das Kegelschnittbüschel konjugirt sind.

Die Gerade 𝔊 wird von den Kegelschnitten des Büschels in Paaren konjugirter Punkte eines Punktsystems geschnitten (§ 39); dieses Punktsystem auf der Geraden 𝔊 hat zu dem Polarkegelschnitt 𝔎 eine eigenthümliche Beziehung. Treffe nämlich irgend ein Kegelschnitt des Büschels die Gerade 𝔊 in dem Punktenpaare $P$ und $p$, so wird die Tangente des Kegelschnitts in $P$ durch den konjugirten Punkt $Q$ in Bezug auf das Kegelschnittbüschel gehen müssen und ebenso die Tangente in $p$ durch den konjugirten Punkt $q$ und ausserdem schneiden sich die beiden Tangenten in einem Punkte $s$, dem Pol von 𝔊 in Bezug auf den angenommenen Kegelschnitt des Büschels; es leuchtet ein, dass der Kegelschnitt 𝔎 durch die drei Punkte $Qq$ und $s$ gehen muss, weil er einmal die konjugirten Punkte aller Punkte von 𝔊 in Bezug auf das Kegelschnittbüschel und anderseits die Pole der Geraden 𝔊 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels enthält. Da nun $P$ und $Q$ ein Paar konjugirte Pnnkte in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels sind und ebenfalls $p$ und $q$, so müssen nach einem in § 31 bewiesenen Satze auch die Schnittpunkte $(Pp, Qq)$ und $(Pq, Qp)$ ein Paar konjugirte Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels sein; der erste Punkt $(Pp, Qq)$ liegt aber auf der Geraden 𝔊, folglich muss der andere, sein konjugirter in Bezug auf das Kegelschnittbüschel, auf dem Kegelschnitte 𝔎 liegen; mithin schneiden sich $Pq$ und $Qp$ in einem Punkte $r$ des Kegelschnitts 𝔎. Wir haben jetzt vier Punkte $Qqsr$ auf dem Kegelschnitt 𝔎; die Schnittpunkte zweier Seitenpaare dieses Vierecks sind die Punkte $P$ und $p$, folglich sind $P$ und $p$ ein Paar konjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitte 𝔎 und dasselbe gilt für jedes Schnittpunktenpaar eines Kegelschnitts des Büschels mit der Geraden 𝔊; wir haben also folgenden Satz:

Die Kegelschnitte eines Büschels treffen eine Gerade 𝔊 in Punktenpaaren, welche allemal konjugirte Punkte sind in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt 𝔎, welcher die Pole von 𝔊 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels enthält; diese Schnittpunktenpaare bilden also auf 𝔊 dasjenige Punktsystem, welches dem Kegelschnitt 𝔎 zugehört (§ 29); ist es hyperbolisch, so geht nothwendig 𝔎 durch die beiden Asymptotenpunkte desselben. (Hierdurch ist zugleich ein neuer Beweis für die charakteristische Eigenschaft des Kegelschnittbüschels gegeben.)

Durch das Kegelschnittbüschel wird ein eigenthümliches paarweises Entsprechen von Punkten in der Ebene vermittelt: Jedem Punkt $P$ in der Ebene des Kegelschnittbüschels entspricht ein bestimmter konjugirter Punkt $Q$, welcher wiederum die Eigenschaft hat, dass sein konjugirter Punkt $P$ ist; bewegt sich $P$ auf einer Geraden 𝔊, so durchläuft der konjugirte Punkt $Q$ einen Kegelschnitt 𝔎, welcher durch das gemeinschaftliche Tripel $xyz$ des Kegelschnittbüschels hindurchgeht; dreht sich 𝔊 um einen festen Punkt $P$, so beschreibt der Kegelschnitt 𝔎 ein Kegelschnittbüschel von vier festen Punkten $xyz$ und $Q$, dem konjugirten zu dem festen Punkte $P$ der Geraden 𝔊. Allen Geraden 𝔊 in der Ebene entsprechen sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar-Schaar (von doppelter Unendlichkeit), welche durch die drei Punkte $xyz$ gehen. Es kommt im Allgemeinen in der Ebene nur vier Mal vor, dass zwei konjugirte Punkte $P$ und $Q$ zusammenfallen, und dies geschieht in den vier Mittelpunkten des Kegelschnittbüschels. Nimmt insbesondere $P$ die Lage eines der drei Diagonalpunkte z. B. $x$ ein, so wird sein konjugirter Punkt $Q$ unbestimmt, indem es jeder Punkt der Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte $yz$ sein kann. Jeder Geraden 𝔊 in der Ebene entspricht im Allgemeinen ein bestimmter Kegelschnitt 𝔎; dieser zerfällt in ein Linienpaar, sobald 𝔊 durch einen der drei Diagonalpunkte z. B. $x$ geht, und von diesem Linienpaar ist allemal der eine Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen Diagonalpunkte $yz$, der andere Theil der vierte harmonische, der 𝔊 zugeordnete Strahl durch $x$, indem das durch $x$ gehende Seitenpaar das andere Paar harmonisch-zugeordneter Strahlen ist.

Die im Obigen entwickelten allgemeinen Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels sind nur bewiesen für den Fall eines Büschels mit vier reellen Mittelpunkten; dass sie auch bestehen bleiben, wenn zwei oder alle vier Mittelpunkte imaginär werden, können wir nachweisen, indem wir zu der in § 41 angegebenen Entstehungsart des Kegelschnittbüschels zurückgehen; wir sahen dort, dass, wenn zwei Punktsysteme $(b, \beta)$ und $(c, \gamma)$ auf den Trägern 𝔅 und ℭ willkührlich gegeben sind, unendlich viele Kegelschnitte sich auf reelle Weise konstruiren lassen, für welche die gegebenen beiden Punktsysteme die den Geraden 𝔅 und ℭ in Bezug auf jeden solchen Kegelschnitt zugehörigen sind, und dass diese sämmtlichen Kegelschnitte ein Büschel konstituiren, welches

durch dieselben vier reellen Punkte geht, wenn die beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch sind, nämlich durch die Asymptotenpunkte derselben, dagegen durch zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte, wenn nur eines der beiden gegebenen Punktsysteme hyperbolisch, das andere elliptisch, oder endlich durch vier imaginäre gemeinschaftliche Punkte, wenn die beiden gegebenen Punktsysteme elliptisch sind; dieselbe in § 41 auseinandergesetzte Konstruktion liefert alle drei Arten von Kegelschnittbüscheln und lässt auch ebenso unmittelbar die vorhin bewiesenen Polareigenschaften derselben erkennen. Durch einen beliebigen Punkt $P$ in der Ebene giebt es nämlich im Allgemeinen ein und nur ein einziges Strahlenpaar, welches gleichzeitig sowohl durch ein Paar konjugirte Punkte $(b, \beta)$ des ersten Punktsystems, als auch durch ein Paar konjugirte Punkte $(c, \gamma)$ des andern Punktsystems hindurchgeht; denn denken wir uns in $P$ zwei auf einander liegende Strahlsysteme, welche beziehlich mit den beiden gegebenen Punktsystemen perspektivisch liegen, so haben diese beiden concentrischen Strahlsysteme ein gemeinsames Paar konjugirter Strahlen (§ 16) und zwar ist dies Paar immer reell vorhanden, sobald beide oder nur eines der beiden Strahlsysteme elliptisch sind; nur in dem Falle, dass beide hyperbolisch sind, braucht das gemeinschaftliche Paar nicht reell zu sein; dies ist aber gerade der Fall von vier reellen Mittelpunkten des Büschels, wenn $(b, \beta)$ und $(c, \gamma)$ beide hyperbolisch sind, und in dem Obigen erledigt, während die beiden übrigen Fälle, wenn eines hyperbolisch und das andere elliptisch oder beide elliptisch sind, die Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären oder mit vier imaginären Mittelpunkten liefern. Hier giebt es also immer durch $P$ ein Strahlenpaar, welches durch zwei konjugirte Punkte $b, \beta$ und zugleich durch zwei konjugirte Punkte $c, \gamma$ geht; mögen die beiden Strahlen $bc$ und $\beta\gamma$ sich in $P$ schneiden, so haben wir ein Paar konjugirte Punkte $b, \beta$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels (§ 41) und ein zweites Paar $c, \gamma$ ebenfalls konjugirte Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels; folglich sind die Schnittpunkte $(bc, \beta\gamma) = P$ und $(b\gamma, c\beta) = Q$ auch ein Paar konjugirte Punkte für alle Kegelschnitte des Büschels (§ 31), oder die Polaren von $P$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels laufen durch denselben festen Punkt $Q$, w. z. b. w.

Das Weitere ergiebt sich jetzt leicht in folgender Weise:

Lassen wir einen Punkt $P$ auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ sich bewegen, so wird der konjugirte Punkt $Q$ in Bezug auf das Büschel schon dadurch bestimmt, dass wir von $P$ die Polaren in Bezug auf zwei bestimmte Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ ermitteln und ihren Schnittpunkt $Q$ aufsuchen. Die Polaren von sämmtlichen Punkten $P$ der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}^{(2)}$ laufen aber durch einen Punkt und bilden ein Strahlbüschel, welches projektivisch ist mit der von $P$ beschriebenen Punktreihe (§ 30); dasselbe gilt von den Polaren des veränderlichen Punktes $P$ in Bezug auf $\mathfrak{B}^{(2)}$, folglich sind auch die beiden von den Polaren beschriebenen Strahlbüschel unter sich projektivisch, mithin der Ort des Punktes $Q$ im Allgemeinen ein Kegelschnitt; bewegt sich also der Punkt $P$ auf einer Geraden $\mathfrak{G}$, so durchläuft sein konjugirter Punkt $Q$ in Bezug auf das Kegelschnittbüschel einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher zugleich die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$, als Mittelpunkte der ihn erzeugenden Strahlbüschel enthält; da aber die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ ganz willkührlich aus dem Kegelschnittbüschel herausgenommen sind und für jede zwei anderen derselbe Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ als Ort der konjugirten Punkte $Q$ resultiren muss, so enthält der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gleichzeitig die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Büschels. Hieraus folgt umgekehrt, dass, wenn wir zu zwei beliebigen Punkten in der Ebene $P$ und $P^1$ die Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels konstruiren, dieselben zwei Strahlbüschel $(Q)$ und $(Q^1)$ bilden, welche allemal projektivisch sind, indem entsprechende Strahlen die Polaren von $P$ und $P^1$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt des Büschels sind, denn jene beiden Strahlbüschel erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Verändern wir $P^1$ beliebig in der Ebene, so bleibt das Strahlbüschel $(Q^1)$ seiner Polaren beständig projektivisch mit dem Strahlbüschel $(Q)$ oder irgend einem andern Polaren-Strahlbüschel. Der Beweis der übrigen Polareigenschaften bleibt unverändert bestehen, ob die Mittelpunkte des Büschels reell oder imaginär sind.

## § 47. Ueber den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels.

Wir wollen jetzt einige besondere Fälle der gewonnenen allgemeinen Resultate hervorheben; wird nämlich zuvörderst die Ge-

rade $\mathfrak{G}$ in die Unendlichkeit verlegt ($G_\infty$), so enthält der ihr entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels; wir nennen ihn daher den Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$; das der Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ in Bezug auf diesen Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zugehörige Punktsystem ist dasjenige, welches von den Richtungen des konjugirten Durchmessersystems des Mittelpunktskegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ fixirt wird, und dieses muss nach dem oben bewiesenen Satze identisch sein mit demjenigen Punktsystem, welches die Kegelschnitte des Büschels auf $\mathfrak{G}_\infty$ ausschneiden; also *die Asymptoten jeder Hyperbel in dem Büschel sind einem Paar konjugirter Durchmesser des Mittelpunktskegelschnitts* $\mathfrak{M}^{(2)}$ *parallel*. Hieraus folgt weiter, wenn wir annehmen, $\mathfrak{M}^{(2)}$ sei Hyperbel, (mithin seine Asymptoten $s$ und $t$ mit jedem Paar konjugirter Durchmesser $x$, $\xi$ harmonisch gelegen), da $x\xi$ den Asymptoten eines bestimmten Kegelschnitts des Büschels parallel sind, dass auch $st$ einem bestimmten Paar konjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts parallel laufen; also:

*Die Asymptoten des Mittelpunktskegelschnitts* $\mathfrak{M}^{(2)}$ *haben die Richtungen eines Paares konjugirter Durchmesser für jeden Kegelschnitt des Büschels.* Wir haben nun früher das von einem Kegelschnittbüschel auf $\mathfrak{G}_\infty$ ausgeschnittene Punktsystem in allen drei Fällen (§ 42) des Kegelschnittbüschels ermittelt und die Kriterien gefunden, unter welchen dasselbe elliptisch oder hyperbolisch ist; da das Strahlsystem der konjugirten Durchmesser für den Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ mit jenem Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$ perspektivisch liegt, nach dem oben bewiesenen allgemeinen Satze, so können wir mit Berücksichtigung der angeführten Kriterien folgende Beziehungen für den Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ angeben:

*Die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt* $\mathfrak{M}^{(2)}$; dieser ist 1) wenn das Büschel vier reelle Mittelpunkte hat, eine *Ellipse*, sobald diese vier Punkte so liegen, dass einer sich innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet, dagegen eine *Hyperbel*, sobald sie derart liegen, dass jeder sich ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks befindet, endlich eine *Parabel*, sobald einer der vier Punkte im Unendlichen liegt. Im ersten Falle besteht das Büschel aus lauter Hyperbeln; im

zweiten Falle aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; die Asymptoten der Mittelpunktshyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben die Richtungen der Axen dieser beiden Parabeln, oder die beiden unendlich-entfernten Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind die Mittelpunkte der beiden Parabeln; da sie die beiden Zweige der Hyperbel trennen, so enthält der eine Zweig der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte aller Ellipsen und der andere die Mittelpunkte aller Hyperbeln des Büschels. Im dritten Falle besteht das Büschel wieder aus lauter Hyperbeln und einer einzigen Parabel. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ geht durch die Mitten der sechs Seiten des vollständigen Vierecks, welches von den Büschel-Mittelpunkten gebildet wird, und durch die drei Diagonalpunkte desselben, das gemeinschaftliche Tripel aller Kegelschnitte des Büschels. Jedes Paar konjugirter Durchmesser des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist parallel einem Asymptotenpaar eines Kegelschnittes des Büschels und die Axen des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind parallel den Asymptoten der einzigen gleichseitigen Hyperbel, welche in dem Kegelschnittbüschel vorkommt. Ausser den neun Punkten, durch welche der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ schon mehr, als bestimmt ist, können wir noch andere Elemente zu seiner Konstruktion angeben; es lässt sich nämlich leicht der Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ bestimmen. Gehen wir von der allgemeinsten Erzeugung des Kegelschnittbüschels aus (§ 41) und seien, entsprechend der früheren Bezeichnung, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Träger zweier Punktsysteme, die für sämmtliche Kegelschnitte des Büschels die zugehörigen sind; sei der unendlich-entfernte Punkt auf $\mathfrak{B}$: $b_\infty$ und auf $\mathfrak{C}$: $c_\infty$ und die ihnen konjugirten, d. h. die Mittelpunkte beider Punktsysteme auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ mögen $m_b$ und $m_c$ heissen, dann sind $m_b$ und $b_\infty$ ein Paar konjugirte Punkte für das ganze Büschel, ebenso $m_c$ und $c_\infty$, folglich (nach § 31) auch die Schnittpunkte $(m_b m_c,\ b_\infty c_\infty)$ und $(m_b c_\infty,\ m_c b_\infty)$, also: wenn wir durch $m_b$ und $m_c$ Parallele zu $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ ziehen, die sich in $s$ treffen mögen, so ist $s$ der konjugirte Punkt zu dem unendlich-entfernten auf der Verbindungslinie $m_b m_c$; folglich muss $s$ auf dem Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ liegen, denn er ist der konjugirte zu einem unendlich-entfernten Punkte in Bezug auf das Büschel. Mithin bilden der Schnittpunkt $o$ der Träger $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die Punkte $m_b$ und $m_c$ und endlich $s$ ein dem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ einbeschriebenes Parallelogramm, dessen Mittelpunkt zugleich der

Mittelpunkt von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sein muss; hieraus folgt, dass die Mitte $\mu$ zwischen den beiden Punkten $m_b$ und $m_c$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ ist; dieser lässt sich immer reell konstruiren, ob die Büschel-Mittelpunkte reell sind oder nicht. Hat das Kegelschnittbüschel vier reelle Mittelpunkte, so folgt hieraus zugleich der bekannte elementare Satz: Wenn man in einem vollständigen Viereck die Mitten jedes der drei Paare Gegenseiten mit einander verbindet, so schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte und halbiren sich in demselben; er ist der Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts, welcher die Mittelpunkte sämmtlicher dem vollständigen Viereck umschriebenen Kegelschnitte enthält und sowohl durch die Mitten der sechs Seiten, als auch durch die drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks hindurchgeht. 2) Wenn das Büschel zwei reelle Mittelpunkte hat und zwei imaginäre, welche auf der zweiten (ideellen) gemeinschaftlichen Sekante liegen, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ Ellipse, sobald die ideelle gemeinschaftliche Sekante zwischen den beiden reellen Mittelpunkten hindurchgeht, dagegen Hyperbel, sobald dieselbe die beiden reellen Mittelpunkte nicht trennt, endlich Parabel, wenn einer der beiden reellen Mittelpunkte im Unendlichen liegt; im ersten Falle besteht wiederum das Büschel aus lauter Hyperbeln, im zweiten Falle aus einer Gruppe Ellipsen, einer Gruppe Hyperbeln und zwei Parabeln, im dritten Falle aus lauter Hyperbeln und einer einzigen Parabel. Denken wir uns dies Kegelschnittbüschel nach § 41 durch die beiden Punktsysteme auf dem einzig reellen Linienpaar ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$), welche allen Kegelschnitten gleichzeitig zugehören, erzeugt, so geht der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ durch den Schnittpunkt dieses Linienpaares (den einzig reellen Punkt des gemeinschaftlichen Tripels) und durch die Mittelpunkte der beiden Punktsysteme auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; durch diese drei Punkte ist er aber noch nicht völlig bestimmt; nehmen wir die Gerade $\mathfrak{A}$, die einzig reelle Seite des gemeinschaftlichen Tripels, und das Punktsystem ($a$, $\alpha$) auf ihr, welches von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird und in diesem Falle nothwendig elliptisch ist, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ vollständig bestimmt durch die drei genannten Punkte und dadurch, dass das bekannte Punktsystem ($a$, $\alpha$) das ihm zugehörige sei. (Siehe § 31.) 3) Wenn das Kegel-

schnittbüschel vier imaginäre Mittelpunkte hat, so ist der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ allemal Hyperbel und völlig bestimmt durch den Schnittpunkt des einzig reellen Linienpaares, die Mittelpunkte der beiden (elliptischen) Punktsysteme auf diesen Trägern, welche gleichzeitig allen Kegelschnitten des Büschels zugehören, und durch die beiden übrigen reellen Tripelpunkte des gemeinschaftlichen Tripels, nämlich die Asymptotenpunkte des auf der Polare ($\mathfrak{A}$) des Schnittpunktes von dem genannten Linienpaar befindlichen hyperbolischen Punktsystems, welches auf dieser Geraden von den Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten wird. Das Kegelschnittbüschel besteht also in diesem Falle immer aus einer Gruppe Ellipsen, einer Gruppe Hyperbeln und zwei Parabeln; die Mittelpunkte der letzteren sind die unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ und trennen die beiden Zweige derselben, deren einer die Mittelpunkte der Ellipsengruppe, der andere die der Hyperbelgruppe enthält; das Büschel enthält nur ein reelles Linienpaar und zwei imaginäre Linienpaare (Nullkegelschnitte), deren jedes sich auf einen Punkt zusammenzieht; dies sind die beiden Asymptotenpunkte des hyperbolischen Punktsystems auf $\mathfrak{A}$ oder zwei Tripelpunkte des allemal reellen gemeinschaftlichen Tripels. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ kann in den Fällen 1) und 2) insbesondere ein Kreis werden, wo dann das Kegelschnittbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln besteht (§ 38); in dem Falle 1), wo die vier Büschelmittelpunkte reell sind, also drei Linienpaare in dem Büschel existiren, deren jedes ein Paar rechtwinkliger Linien sein muss, folgt die schon oben gefundene Bedingung: die vier Mittelpunkte müssen so liegen, dass einer (jeder) der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Diese Bedingung lässt sich aber etwas anders fassen, so dass sie auch in dem Falle 2) von nur zwei reellen Mittelpunkten bestehen bleibt; seien nämlich $ABCD$ die vier Mittelpunkte und $x$ der Schnittpunkt $(AB, CD)$ zwischen $A$ und $B$ gelegen, was nothwendig wenigstens einmal unter den drei Linienpaaren vorkommen muss, sobald $\mathfrak{M}^{(2)}$ Ellipse ist, dann kommt die vorige Bedingung darauf hinaus, dass $CD$ auf $AB$ senkrecht stehe und

$$xA \,.\, xB + xC \,.\, xD = 0 \quad \text{sei (§ 38).}$$

Anstatt der Punkte $C$ und $D$, welche die Asymptotenpunkte des allen Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlich zugehörigen Punktsystems auf $CD$ sind, können wir zwei andere Punkte

einführen, die Mitte zwischen $CD$, d. h. den Mittelpunkt dieses gemeinschaftlichen Punktsystems und den dem Punkte $x$ konjugirten Punkt $\xi$ desselben, d. h. den vierten harmonischen zu $x, C, D$, der dem $x$ zugeordnet ist, denn nach § 8, V haben wir:

$$xC \,.\, xD = xm \,.\, x\xi, \quad \text{also auch}$$
$$xA \,.\, xB + xm \,.\, x\xi = 0,$$

d. h. die vier Punkte $ABm\xi$ müssen so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist. Soll nun in dem Falle 2) das Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln werden (oder $\mathfrak{M}^{(2)}$ ein Kreis) und denken wir uns dasselbe durch die beiden gemeinschaftlichen Punktsysteme auf dem einzig reellen Linienpaar erzeugt (§ 41), so ist zunächst erforderlich, dass die ideelle gemeinschaftliche Sekante zwischen den beiden reellen Mittelpunkten $AB$ hindurchgehe und dieselbe in $x$ rechtwinklig schneide; ist $\xi$ der konjugirte Punkt zu $x$ in dem auf dieser ideellen Sekante gegebenen (elliptischen) Punktsystem, welches allen Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlich zugehört, und $m$ der Mittelpunkt desselben, so muss:

$$xA \,.\, xB + xm \,.\, x\xi = 0$$

sein oder die vier Punkte $ABm\xi$ müssen so liegen, dass jeder der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist; natürlich wird, während im Falle 1) $m$ ausserhalb $x\xi$ lag, im Falle 2) $m$ zwischen $x\xi$ liegen. Dass in der That zwei so gelegte Punktsysteme ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln erzeugen, lässt sich auch a posteriori leicht nachweisen, indem wir zeigen, dass ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpunkte der beiden Punktsysteme, den Schnittpunkt $x$ ihrer Träger geht und das (elliptische) Punktsystem auf der gemeinschaftlichen Polare von $x$ zu dem ihm zugehörigen hat, ein Kreis sein muss.

Es bleibt noch der Fall zu erörtern übrig, wann der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in ein Linienpaar zerfällt. Sind die vier Büschelmittelpunkte reell, so sind auch die sechs Mitten der Seiten dieses vollständigen Vierecks reell; der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält aber dieselben, und damit er in ein Linienpaar zerfalle, müssen wenigstens drei jener Mitten in einer Geraden liegen; dies ist nur auf zwei Arten möglich: entweder haben drei in einer Ecke zusammenstossende Seiten ihre Mitten in einer Geraden,

dann müssten die drei übrigen Ecken des Vierecks selbst in einer Geraden liegen, also alle Kegelschnitte des Büschels zerfielen in Linienpaare und das Kegelschnittbüschel löste sich in eine feste Gerade und ein gewöhnliches Strahlbüschel auf; dieser Fall kann uns weiter nicht interessiren, weil wir es mit keinem Kegelschnittbüschel im eigentlichen Sinne des Wortes zu thun haben; oder zweitens: drei nicht zusammenstossende Seiten des vollständigen Vierecks haben ihre Mitten in einer Geraden; bilden diese ein Dreieck, so haben wir wieder den vorigen Fall; sind es aber z. B. folgende $AB$, $BC$, $CD$, so folgt daraus, dass das Seitenpaar $AC$, $BD$ parallel sein muss, also einer der drei gemeinschaftlichen Tripelpunkte im Unendlichen liegt. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt dann in der That in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen im Endlichen bleibenden Tripelpunkte und dessen anderer Theil diejenige Gerade ist, welche zwischen den beiden parallelen Seiten des Vierecks in gleichem Abstande von beiden selbst mit ihnen parallel läuft. Diese gerade Linie enthält aber eigenthümlicher Weise keinen einzigen Mittelpunkt eines eigentlichen Kegelschnitts dieses Büschels; vielmehr muss jeder Punkt von ihr als der Mittelpunkt desjenigen Kegelschnitts angesehen werden, der aus dem parallelen Seitenpaar besteht, für welches eben der Mittelpunkt unbestimmt wird. Alle übrigen (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels haben ihre Mittelpunkte allein auf derjenigen Geraden, welche die beiden im Endlichen liegenden Eckpunkte des gemeinschaftlichen Tripels verbindet, und jeder Punkt dieser Geraden ist der Mittelpunkt eines bestimmten Kegelschnitts dieses Büschels. Wird noch ein zweites Seitenpaar parallel, also das Viereck ein Parallelogramm, so tritt aufs Neue der eigenthümliche Umstand ein, dass für zwei Kegelschnitte des Büschels, die beiden parallelen Seitenpaare, der Mittelpunkt unbestimmt wird, indem er jeder Punkt der durch den Mittelpunkt des Parallelogramms zu einem Seitenpaare parallel gezogenen Geraden sein kann, während alle übrigen (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels den einzigen Mittelpunkt des Parallelogramms zu ihrem Mittelpunkt haben. Der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ löst sich in dasjenige Linienpaar auf, welches von den durch den Mittelpunkt des Parallelogramms zu den Seiten gezogenen Parallelen gebildet wird, aber dieses Linienpaar ist illusorisch als Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte des

Büschels, weil diese sich alle auf einen Punkt concentriren. Auch für ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Punkten oder mit vier imaginären gemeinschaftlichen Punkten kann der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ nur zerfallen, wenn das einzig reelle Linienpaar, welches in dem Büschel vorkommt, zu einem Paar Parallellinien wird, also ihr Schnittpunkt, d. h. ein Punkt des gemeinschaftlichen Tripels in die Unendlichkeit geht; der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt dann in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Verbindungslinie der beiden übrigen Tripelpunkte ist, während der andere Theil wieder illusorisch wird, weil der Mittelpunkt eines Kegelschnitts, welcher aus einem Paar Parallellinien besteht, unbestimmt ist. Noch mehr specialisirt sich das Kegelschnittbüschel, wenn ein Theil des Linienpaares, welches in demselben vorkommt, in die Unendlichkeit geht (zu $\mathfrak{G}_\infty$ wird); alsdann müssen, weil das auf dieser Geraden befindliche Punktsystem allen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehört, sämmtliche Kegelschnitte in dem Büschel ähnlich sein, denn die Systeme der konjugirten Durchmesser, welche mit dem auf $\mathfrak{G}_\infty$ befindlichen, den Kegelschnitten zugehörigen Punktsystem perspektivisch liegen, werden alle gleich; ist das Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$ hyperbolisch, so sind es ähnliche Hyperbeln, ist es elliptisch, so sind sie ähnliche Ellipsen. Hierher gehören die beiden Kreisschaaren mit reeller oder ideeller gemeinschaftlicher Sekante, deren zweite (ideelle) gemeinschaftliche Sekante $\mathfrak{G}_\infty$ ist; das auf ihr befindliche Punktsystem ist ein solches, dass je zwei konjugirte Punkte unter rechtwinkligen Richtungen erscheinen, oder die beiden imaginären Kreispunkte auf $\mathfrak{G}_\infty$ die imaginären Asymptotenpunkte dieses (elliptischen) Punktsystems sind. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ zerfällt natürlich ebenfalls in eine gerade Linie, die Verbindungslinie der übrigen beiden (reellen oder imaginären) Punkte des gemeinschaftlichen Tripels, welche sämmtliche Mittelpunkte der (eigentlichen) Kegelschnitte des Büschels enthält, und einen illusorischen Theil, welcher mit $\mathfrak{G}_\infty$ zusammenfällt.

Schliesslich möge noch der besondere Fall in Betracht gezogen werden, wenn der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel wird; das Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$, welches von dem Kegelschnittbüschel ausgeschnitten wird, muss in diesem Fall hyperbolisch sein und seine beiden Asymptotenpunkte in zwei

zu einander rechtwinkligen Richtungen haben; aus der in § 42 angestellten Betrachtung folgt, dass die Gerade $\mathfrak{L}$ durch den Mittelpunkt des Hülfskreises $\mathfrak{K}$ gehen muss; und da jeder Punkt in der Geraden $\mathfrak{L}$ ein Strahlsystem in dem Peripheriepunkte $B$ des Kreises $\mathfrak{K}$ hervorruft, welches dem System der konjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts des Büschels parallel läuft, so muss unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis vorkommen, weil unter jenen Strahlsystemen ein Kreissystem vorkommt; wir schliessen daher: Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ wird gleichseitige Hyperbel, sobald in dem Büschel ein Kreis vorkommt oder diejenige Ellipse des Büschels, welche unter allen dem Kreise am nächsten kommt, selbst ein Kreis wird. Da wir aus dem Obigen wissen, dass die Asymptoten des Mittelpunktskegelsshnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ allemal die Richtungen zweier konjugirter Durchmesser für jeden Kegelschnitt des Büschels haben, so folgt, weil diese für die gleichseitige Hyperbel zu einander rechtwinklig sind, dass sie den Richtungen der Axen sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels parallel laufen. Wir haben daher folgenden Satz: Wenn unter den Kegelschnitten des Büschels ein Kreis enthalten ist, so sind die Axen sämmtlicher Kegelschnitte des Büschels zwei bestimmten zu einander rechtwinkligen Richtungen parallel, welche zugleich mit den Richtungen der Axen der beiden in dem Büschel enthaltenen Parabeln zusammenfallen oder auch mit den Richtungen der Asymptoten derjenigen gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$, welche die Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Büschels enthält. Nehmen wir insbesondere die vier Büschelmittelpunkte reell an und berücksichtigen die drei Linienpaare des Büschels, deren Axen die Halbirungslinien ihres Winkels und Nebenwinkels sind, so resultirt der bekannte elementare Satz: Halbirt man in einem Kreisviereck die Winkel und Nebenwinkel jedes der drei Seitenpaare, die sich in den Diagonalpunkten schneiden, so sind von diesen sechs Halbirungslinien drei und drei parallel und die drei ersten stehen auf den drei letzten senkrecht. (Steiner, Crelle's Journal für Mathematik Bd. II S. 97). Diese beiden zu einander rechtwinkligen Richtungen sind zugleich die der Axen sämmtlicher Kegelschnitte, welche durch die vier Ecken des Kreisvierecks gehen. Hiervon

lässt sich beiläufig eine nützliche Anwendung machen: Sei ein Kegelschnitt in der Ebene gezeichnet, dann findet man leicht die Richtungen seiner Axen, indem man einen beliebigen Kreis hindurchlegt und die vier Schnittpunkte paarweise durch Linienpaare verbindet; die Halbirungslinien von Winkel und Nebenwinkel eines solchen Linienpaares sind den Axen des gegebenen Kegelschnitts parallel. Halten wir den Kegelschnitt fest und zwei von den Schnittpunkten mit dem Kreise, verändern aber den Kreis selbst, so dass er eine Kreisschaar von zwei reellen Punkten durchläuft, dann wird, weil von einem Linienpaar der eine Theil und die Halbirungslinie unveränderte Richtung behalten, auch der andere Theil beständig sich parallel bleiben; also: Legt man durch zwei feste Punkte eines Kegelschnitts beliebig viele Kreise, so hat jeder derselben mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Sekante, deren Richtung immer dieselbe bleibt. Dies ist ein specieller Fall eines in § 39 bewiesenen allgemeinen Satzes. Lassen wir die beiden Punkte des Kegelschnitts, durch welche die Kreisschaar gelegt wurde, zusammenfallen, so dass die gemeinschaftliche Sekante eine Tangente in einem Punkte des Kegelschnitts wird und die Kreise in demselbem Punkte diese Gerade berühren, also ihre Mittelpunkte auf der Normale des Kegelschnitts in dem angenommenen Punkte haben, so folgt: Zieht man in einem Punkte eines Kegelschnitts Tangente und Normale und beschreibt eine Reihe von Kreisen, welche ihre Mittelpunkte in der Normale haben und durch den angenommenen Punkt des Kegelschnitts gehen, so hat jeder solcher Kreis mit dem Kegelschnitt noch eine zweite (reelle oder imaginäre) gemeinschaftliche Sekante, welche beständig sich parallel bleibt und mit den Axen des Kegelschnitts dieselben Winkel bildet, wie die Tangente in dem angenommenen Punkte $P$ des Kegelschnitts (ohne mit ihr parallel zu sein). Fasst man nur diejenigen Kreise dieser besonderen Schaar auf, welche den Kegelschnitt in noch zwei reellen Punkten schneiden, deren Verbindungslinie die konstante Richtung hat, so wird man einen solchen besonderen Kreis auffinden können, für welchen von den beiden noch übrigen Schnittpunkten mit dem Kegelschnitte einer $P$ selbst wird, und dies muss der Krümmungskreis für den Punkt $P$ des Kegelschnitts sein, weil er durch drei unendlich-nahe Punkte desselben geht (§ 37); man findet also folgende einfache Kon-

struktion des Krümmungskreises, welche von der in § 37 angegebenen wesentlich verschieden ist: Um für einen Punkt $P$ eines gegebenen Kegelschnitts den Krümmungskreis zu erhalten, ziehe man die Tangente in $P$ und eine zweite Gerade durch $P$, welche zu einer der Axen des Kegelschnitts dieselbe Neigung hat, wie die Tangente; trifft diese zweite Gerade den Kegelschnitt zum andern Male in $P'$, so lege man durch $P$ und $P'$ einen Kreis, welcher seinen Mittelpunkt auf der Normale für $P$ hat; dies ist der gesuchte Krümmungskreis an dem Punkte $P$ des Kegelschnitts. Hieran knüpft sich der elegante Beweis eines auf die Krümmungskreise eines Kegelschnitts bezüglichen Theorems von Steiner, welches Joachimsthal im XXXVI. Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik, S. 95 bewiesen hat.

## § 48. Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar.

Den in § 46 bewiesenen allgemeinen Polar-Eigenschaften des Kegelschnittbüschels stehen gleichlaufende der Kegelschnittschaar zur Seite, deren Beweis dem dort geführten ohne Schwierigkeit nachgebildet werden kann. Um indessen die dem § 41 zu Grunde liegende Betrachtung noch klarer hervortreten zu lassen, reproduciren wir die polare Nebenbetrachtung in etwas anderer Form und leiten daraus die Polar-Eigenschaften der Kegelschnittschaar mit zum Theil anderen Beweisen direkt ab. Sind $A$ und $B$ die Mittelpunkte zweier beliebigen Strahlsysteme in der Ebene und $(a, \alpha)$ irgend ein Paar konjugirter Strahlen des ersten, $(b, \beta)$ ein Strahlenpaar des zweiten Strahlsystems, so bilden sämmtliche Kegelschnitte in der Ebene, für welche diese beiden Strahlsysteme die ihnen zugehörigen sind (§ 29), d. h. je zwei konjugirte Strahlen der Strahlsysteme $a\alpha$ und $b\beta$ zwei konjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt sind, eine Kegelschnittschaar.

Die Kegelschnitte dieser Schaar haben vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, sobald die beiden gegebenen Strahlsysteme hyperbolisch sind, nämlich die Asymptoten $g$, $h$ des einen und $g^1$, $h^1$ des andern Strahlsystems, und es können beliebig viele Kegelschnitte der Schaar vermittelst dieser vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten auf bekannte Weise konstruirt werden. Wenn dagegen nur eines der beiden Strahlsysteme hyperbolisch,

das andere elliptisch ist, so haben die Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, die Asymptoten des hyperbolischen Strahlsystems, und man sagt der Analogie wegen, sie haben ausserdem zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten; endlich wenn beide gegebenen Strahlsysteme elliptisch sind, so sagt man, die Kegelschnitte der Schaar haben vier imaginäre gemeinschaftliche Tangenten; in diesen beiden letzten Fällen lassen sich sämmtliche Kegelschnitte der Schaar auf folgendem reellen Wege konstruiren: Die Verbindungslinie $AB$ ist ein Strahl, der sowohl dem einen, als dem andern Strahlsystem angehört; im ersten Strahlsystem möge er durch $l$ und sein konjugirter durch $\lambda$, im zweiten Strahlsystem durch $\mu$ und sein konjugirter durch $m$ bezeichnet werden; die Strahlen $\lambda$ und $m$ treffen sich in einem Punkte $C$, welcher zum Mittelpunkte eines dritten, vollständig bestimmten, von den beiden gegebenen Strahlsystemen abhängigen Strahlsystems wird; treffen sich nämlich irgend zwei Strahlen $a$ und $b$ der beiden ersten Strahlsysteme in dem Punkt $(a, b)$ und die konjugirten in dem Schnittpunkt $(\alpha, \beta)$, so sind die Verbindungslinien dieser beiden Punkte mit $C$ zwei Strahlen $c$ und $\gamma$ des dritten Strahlsystems $(c, \gamma)$, welches wir in seiner Totalität erhalten, wenn wir die Paare $(a, \alpha)$ und $(b, \beta)$ beliebig verändern. In der That, halten wir zuerst $a$ und $\alpha$ fest und verändern $b$ und $\beta$, so beschreiben die Strahlen $c$ und $\gamma$ zwei auf einander liegende projektivische Strahlbüschel, bei denen die Schenkel entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen; denn die vier Strahlen $a\,\alpha\,c\,\gamma$ bilden allemal ein vollständiges Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken mit $B$ verbunden drei Strahlenpaare eines Strahlsystems sind; von diesen ist das eine $b, \beta$, das andere $\mu m$, also auch das dritte ein solches, welches dem gegebenen Strahlsystem $(B)$ angehört; hieraus folgt, dass, wenn ein Strahl $\gamma^1$ auf $c$ fällt, nothwendig $c^1$ auf $\gamma$ fallen muss, folglich bilden $c\gamma$ ein Strahlsystem (§ 17). Dasselbe Strahlsystem resultirt aber, wenn wir $b, \beta$ fest halten und $a, \alpha$ verändern; denn die Strahlen $CA$, $CB$ sind in dem einen und dem andern Falle ein Paar konjugirte Strahlen und ein zweites gemeinschaftliches Paar ist selbstverständlich dasjenige, welches nach den Schnittpunkten der festgehaltenen Strahlen $(a, b)$ und $(\alpha, \beta)$ hingeht; folglich coincidiren die in beiden Fällen erhaltenen Strahlsysteme $(c, \gamma)$. Da $CA$ und $CB$ ein Paar konjugirte Strahlen

dieses dritten Strahlsystems sind, so wollen wir sie mit $n$ und $\nu$ bezeichnen, so dass also $CA = n = \lambda$; $CB = m = \nu$ und $AB = l = \mu$ ist, und $(l, \lambda)$ $(m, \mu)$ $(n, \nu)$ drei Paar konjugirte Strahlen beziehlich in den drei Strahlsystemen $(A)$ $(B)$ $(C)$ sind. Diese drei Strahlsysteme stehen daher in dem eigenthümlichen Zusammenhange mit einander, dass, wenn irgend drei Strahlen derselben $a\,b\,c$, durch einen Punkt gehen, die konjugirten Strahlen $\alpha\,\beta\,\gamma$ ebenfalls durch einen Punkt gehen.

Hieraus folgt ein weiterer bemerkenswerther Zusammenhang der drei Strahlsysteme $(A)$ $(B)$ $(C)$. Denken wir uns um das Dreieck $A\,B\,C$ einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegt, so schneidet bekanntlich jedes Strahlsystem Sehnen in dem Kegelschnitt aus, die durch einen Punkt laufen (§ 31); nennen wir diesen der Kürze wegen den „Sehnenpol" des Strahlsystems, dann müssen die drei Sehnenpole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der resp. Strahlsysteme $(A)$ $(B)$ $(C)$ in einer Geraden liegen. Denn nehmen wir irgend einen Punkt $P$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ und ziehen $AP$, $BP$, $CP$, so müssen die konjugirten Strahlen sich in einem Punkte $\Pi$ treffen; möge $A\Pi$, $B\Pi$, $C\Pi$ dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ resp. in $a\,b\,c$ begegnen, dann werden $AP$, $Aa$ ein Paar, $AB$, $AC$ ein zweites Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(A)$, also $Pa$ und $BC$ zwei Durchbohrungssehnen, der Schnittpunkt $(Pa,\ BC) = \mathfrak{a}$ der Sehnenpol des Strahlsystems $(A)$ sein; ebenso $(Pb,\ CA) = \mathfrak{b}$ der Sehnenpol des Strahlsystems $(B)$, und endlich $(Pc,\ AB) = \mathfrak{c}$, der Sehnenpol des Strahlsystems $(C)$. Wir haben nun das Pascal'sche Sechseck:

$$a\,P\,b \quad B\,C\,A,$$

also die Schnittpunkte:

$$\begin{matrix} (Pa,\ BC) & (Pb,\ CA) & (Aa,\ Bb) \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \Pi \end{matrix} \quad \text{oder}$$

in gerader Linie; anderseits das Pascal'sche Sechseck:

$$b\,P\,c \quad C\,A\,B,$$

also die Schnittpunkte:

$$\begin{matrix} (Pb,\ CA) & (Pc,\ AB) & (Bb,\ Cc) \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \Pi \end{matrix} \quad \text{d. h.}$$

in gerader Linie; da nun beide Geraden die Punkte $\mathfrak{b}$ und $\Pi$ gemein haben, so fallen sie zusammen, folglich liegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in einer Geraden w. z. b. w., also gilt der Satz:

Die drei in Betracht kommenden Strahlsysteme

(A) (B) (C), **haben den eigenthümlichen Zusammenhang, dass, wenn man einen beliebigen Kegelschnitt um $ABC$ legt und die Sehnenpole (d. h. Durchschnittspunkte der Durchbohrungssehnen) der drei Strahlsysteme für den Kegelschnitt bestimmt, dieselben allemal in einer Geraden liegen.**

Mit Berücksichtigung der oben (§ 41) bemerkten Eigenschaft, dass irgend drei Paar Strahlen aus solchen drei Strahlsystemen (A) (B) (C) allemal sechs Tangenten eines Kegelschnitts sind, können wir folgenden Satz aussprechen:

**Haben wir ein Dreieck $ABC$ im Kegelschnitt und eine beliebige Transversale, welche die Dreiecksseiten $BC$, $CA$, $AB$ resp. in $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ trifft, ziehen durch $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ drei beliebige Strahlen, deren erster in $\alpha$ und $\alpha^1$, der zweite in $\beta$ und $\beta^1$, der dritte in $\gamma$ und $\gamma^1$ dem Kegelschnitte begegnet, so berühren die sechs Strahlen $A\alpha$, $A\alpha^1$, $B\beta$, $B\beta^1$, $C\gamma$, $C\gamma^1$, einen neuen Kegelschnitt.**

Wenn wir nun irgend zwei konjugirte Strahlen $c$, $\gamma$ des Strahlsystems (C) als die Träger zweier projektivischer Punktreihen auffassen, welche von zwei veränderlichen konjugirten Strahlen $x$, $\xi$ des ersten Strahlsystems (A) fixirt werden (oder auch von einem Strahlenpaar $y$, $\eta$ des zweiten Strahlsystems (B)); so erzeugen diese beiden projektivischen Punktreihen einen Kegelschnitt, welcher die Träger $c$ und $\gamma$ berührt und die Strahlen $x\xi$ zu einem Paar konjugirter Strahlen hat; denn es sind die Schnittpunkte $(c, x)$, $(\gamma, \xi)$ ein Paar entsprechende Punkte der beiden projektivischen Punktreihen, aber auch gleichzeitig $(c, \xi)$, $(\gamma, x)$ sind entsprechende Punkte; die beiden Projektionsstrahlen und $c$, $\gamma$ bilden ein dem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit, dessen zwei Diagonalen $x$ und $\xi$ sind; folglich sind $x$ und $\xi$ konjugirte Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt; da dasselbe von jedem Paar $x\xi$ gilt, so ist das ganze Strahlsystem (A) dasjenige, welches dem konstruirten Kegelschnitte zugehört, und da dieselben beiden erzeugenden Punktreihen auf $c$ und $\gamma$ auch durch $y$, $\eta$ fixirt werden, so gilt die genannte Eigenschaft auch für das zweite gegebene Strahlsystem (B). Der Kegelschnitt hat also die beiden gegebenen Strahlsysteme zu den ihm zugehörigen und gehört daher nach unserer Definition der Schaar an. Verändern wir nun das willkührlich gewählte Paar $c$, $\gamma$ des dritten Strahlsystems, so

erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte der Schaar durch reelle Konstruktion. Die Strahlenpaare $z$, $\zeta$ des dritten Strahlsystems sind die Tangentenpaare aus dem Punkte $C$ an die Kegelschnitte der Schaar; die Verbindungslinie $AB$ ist die Polare des Punktes $C$ für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar und das Punktenpaar $A$, $B$ ein specieller Kegelschnitt derselben. Die drei Strahlsysteme $(A)$ $(B)$ $(C)$ stehen hinsichtlich ihrer Natur in folgendem Zusammenhange:

| Strahlsystem $(A)$ | Strahlsystem $(B)$ | Strahlsystem $(C)$ | Kegelschnittschaar |
|---|---|---|---|
| I. elliptisch | elliptisch | hyperbolisch | vier imag. gem. Tang. |
| II. elliptisch | hyperbolisch | elliptisch | zwei reelle, zwei imag. T. |
| III. hyperb. | elliptisch | elliptisch | zwei imag., zwei reelle T. |
| IV. hyperb. | hyperbolisch | hyperbolisch | vier reelle gem. Tang. |

Sind nun $x$, $\xi$ und $y$, $\eta$ zwei Paare konjugirter Strahlen aus den beiden Strahlsystemen $(A)$ und $(B)$ und, wie wir wissen, zugleich zwei Paare konjugirter Strahlen in Bezug auf jeden Kegelschnitt der Schaar, so erhalten wir aus ihnen nach dem in § 31 bewiesenen Satze ein drittes Paar $(xy, \xi\eta)$ und $(x\eta, \xi y)$, welches ebenfalls konjugirte Strahlen sein müssen für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, d. h. die Pole von einer dieser beiden Geraden für alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf der andern, und solcher Paare konjugirter Geraden können wir durch Veränderung der Paare $x$, $\xi$ und $y$, $\eta$ unendlich viele herstellen. Irgend zwei Paare von diesen gefundenen lassen sich wieder zur Herstellung eines neuen dritten Paares verwenden und dies hat einen netzartigen Fortgang bis ins Unendliche. Es entsteht die Frage, ob jede beliebig gegebene Gerade ein Mal mit dem einen Theil eines solchen Linienpaares zusammenfällt? Diese Frage wollen wir indirekt beantworten: Wir wissen, dass, wenn wir irgend einen Punkt $p$ in der Ebene mit $ABC$ durch drei Strahlen $a\,b\,c$ verbinden, die drei konjugirten Strahlen $\alpha\,\beta\,\gamma$ sich in einem korrespondirenden Punkte $\pi$ treffen; wir verändern jetzt $p$ auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ und suchen den Ort des Punktes $\pi$ auf; derselbe ist offenbar ein Kegelschnitt, welcher dem Dreieck $ABC$ umschrieben ist; denn da $a$ und $b$ zwei perspektivische Strahlbüschel beschreiben und $\alpha$ ein mit $a$, $\beta$ ein mit $b$ projektivisches Strahlbüschel beschreibt (wegen der Strahlsysteme), so sind auch

die Strahlbüschel, welche $\alpha$ und $\beta$ beschreiben, projektivisch; ihr Erzeugniss oder der Ort des Punktes $\pi$ ist also ein Kegelschnitt 𝔎, der durch $A$ und $B$ und ebenso auch durch $C$ geht und dessen Tangenten in diesen Punkten leicht zu ermitteln sind. Wenn nun der Kegelschnitt 𝔎 die Gerade 𝔖 in zwei Punkten $s$ und $t$ schneidet, so muss für einen derselben, z. B. $s$, wenn wir uns $p$ in denselben hineinfallend denken, der korrespondirende $\pi$ sowohl im Kegelschnitt 𝔎 liegen, als auch in der Geraden 𝔖, weil $s$ sowohl in der Geraden, als auch im Kegelschnitt liegt; der korrespondirende Punkt zu $s$ muss also $t$ sein und umgekehrt, d. h. es ist sowohl $As$ und $At$, als auch $Bs$ und $Bt$ je ein Paar konjugirter Strahlen der beiden gegebenen Strahlsysteme $(A)$ und $(B)$. Hieraus folgt nach dem obigen Satze: die Gerade 𝔖 als Verbindungslinie der Schnittpunkte $[(As, Bs), (At, Bt)]$ und die Gerade ℌ als Verbindungslinie der Schnittpunkte $[(As, Bt), (At, Bs)]$ sind ein neues Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, d. h. *die Pole der Geraden 𝔖 in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar liegen auf der Geraden ℌ*. Wenn dagegen der Kegelschnitt 𝔎 die Gerade 𝔖 nicht trifft, so hören die Punkte $s$ und $t$ zu existiren auf, wohl aber bleibt die Gerade ℌ bestehen, denn sie ist nach der vorigen Konstruktion nichts anderes, als die Polare desjenigen Punktes, in welchem die Verbindungslinie $AB$ die Gerade 𝔖 trifft in Bezug auf den Kegelschnitt 𝔎. Es ist also zu vermuthen, dass die geometrische Eigenschaft der gefundenen Geraden ℌ fortbestehen wird, aber der oben gegebene Beweis ist nicht mehr zulässig und wir werden uns für diesen Fall nach einem anderen Beweise umsehen müssen. Um zunächst die Gerade ℌ unabhängig von der Realität der Punkte $s$ und $t$ zu konstruiren, bezeichnen wir (Fig. 67) den Schnittpunkt von $AB$ mit 𝔖 durch $\mathfrak{c}$, den vierten harmonischen Punkt zu den dreien $\mathfrak{c}$, $A$, $B$, wobei $A$ und $B$ als zugeordnete aufgefasst werden, durch $\mathfrak{c}_1$ und

(Fig. 67.)

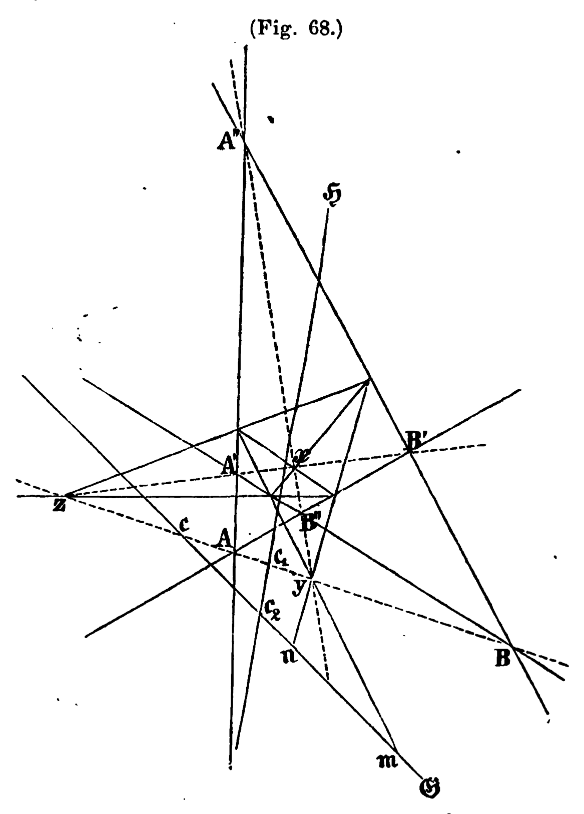
endlich denjenigen Punkt auf der Geraden 𝔊, welcher in Bezug auf den Kegelschnitt 𝔎 dem $\mathfrak{c}$ konjugirt ist, durch $\mathfrak{c}_2$, dann geht 𝔋 durch $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ und ist durch diese beiden immer reellen Punkte bestimmt; bezeichnen wir noch die Schnittpunkte von $BC$ und $AC$ mit 𝔊 durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so wird, weil das in $B$ befindliche Strahlsystem $BC$ und $BA$ zu konjugirten Strahlen hat, der zu $A\mathfrak{a}$ konjugirte Strahl des Strahlsystems $(A)$ die Tangente in $A$ am Kegelschnitt 𝔎 sein und ebenso der zu $B\mathfrak{b}$ konjugirte Strahl des Strahlsystems $(B)$ die Tangente in $B$ am Kegelschnitt 𝔎. Wir haben also in $A$ und in $B$ zwei Strahlenpaare der beiden gegebenen Strahlsysteme; da nun sämmtliche Strahlenpaare in dem Kegelschnitt 𝔎 Durchbohrungssehnen ausschneiden, welche für das ganze Strahlsystem durch einen festen Punkt laufen (§ 31), so erkennen wir, dass das in $A$ gegebene Strahlsystem als solchen Durchschnittspunkt der Durchbohrungssehnen mit 𝔎 den Punkt $\mathfrak{a}$ liefert und ebenso das in $B$ gegebene Strahlsystem den Punkt $\mathfrak{b}$, und umgekehrt: jede durch $\mathfrak{a}$ gehende Sehne trifft 𝔎 in zwei solchen Punkten, welche mit $A$ verbunden ein Paar konjugirte Strahlen des Strahlsystems $(A)$ liefern und ebenso für $\mathfrak{b}$. Liegt also $\mathfrak{a}$ ausserhalb des Kegelschnitts 𝔎, so geben die Berührungspunkte des aus $\mathfrak{a}$ an 𝔎 gelegten Tangentenpaares mit $A$ verbunden die Asymptoten des Strahlsystems $(A)$, welches in diesem Falle hyperbolisch sein muss, und ebenso für $\mathfrak{b}$. Die Berührungssehne des aus $\mathfrak{a}$ an 𝔎 gelegten Tangentenpaars geht aber durch den Pol von 𝔊 in Bezug auf 𝔎, folglich treffen die beiden Asymptoten des Strahlsystems $(A)$ die Gerade 𝔊 in zwei solchen Punkten, welche ein Paar konjugirter Punkte desjenigen Punktsystems auf 𝔊 sind, welches dem Kegelschnitt 𝔎 zugehört; ebenso treffen die beiden Asymptoten des Strahlsystems $(B)$ die Gerade 𝔊 in zwei konjugirten Punkten des dem Kegelschnitt 𝔎 zugehörigen Punktsystems und dieses Punktsystem ist durch die beiden Punktenpaare vollständig bestimmt.

Wir müssen nun untersuchen, unter welchen Umständen die oben mit $s$ und $t$ bezeichneten Schnittpunkte des Kegelschnitts 𝔎 mit der Geraden 𝔊 reell oder imaginär werden; da die von $A$ und $B$ nach ihnen hingehenden Strahlenpaare für beide Strahlsysteme $(A)$ und $(B)$ je ein Paar konjugirte Strahlen sind, so sehen wir, dass $s$ und $t$ das gemeinschaftliche Paar konjugirter Punkte zweier auf 𝔊 zusammenliegender Punktsysteme sind, welche durch die gegebenen Strahlsysteme $(A)$ und $(B)$ ausgeschnitten

werden; nach § 16 existirt nun immer ein reelles gemeinschaftliches Paar, sobald wenigstens eins der beiden Punktsysteme, also auch eins der beiden Strahlsysteme $(A)$ oder $(B)$ elliptisch ist, oder was dasselbe bewirkt, sobald wenigstens einer der beiden Punkte $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ liegt; d. h. in den oben mit (I), (II), (III) bezeichneten Fällen ist das Punktenpaar $st$ reell, also für eine Kegelschnittschaar mit vier imaginären oder zwei imaginären und zwei reellen gemeinschaftlichen Tangenten; nur in dem Falle IV, also für eine Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten können die Punkte $s$ und $t$ imaginär werden. Für diesen Fall lässt sich aber anderseits aus den Eigenschaften des einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits (§ 27) direkt nachweisen, dass die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar, die einem Vierseit einbeschrieben ist, auf einer zweiten Geraden liegen und dann, was noch erforderlich ist, zeigen, dass diese Gerade mit der oben konstruirten Geraden $\mathfrak{H}$ identisch ist. Das Erstere geschieht auf analoge Weise, wie in § 46: Ist nämlich das vollständige Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $AB$, $A'B'$, $A''B''$ und dessen drei Diagonalpunkte $xyz$ sind, (Fig. 68) gegeben, so liegen die Berührungspunkte irgend eines demselben einbeschriebenen Kegelschnitts (§ 27) paarweise mit den Diagonalpunkten in gerader Linie und bilden also ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck ebenfalls $xyz$ ist. Wenn nun irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ in der Ebene gegeben ist, so konstruiren wir den Pol derselben in Bezug auf einen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, indem wir die Berührungssehne des durch $A'$ gehenden Tangentenpaars die Gerade $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{m}$ und die Berührungssehne des durch $B'$ gehenden Tangentenpaares die Gerade $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{n}$ treffen lassen, sodann zu dem Tangentenpaar in $A'$ und $A'\mathfrak{m}$ den vierten harmonischen Strahl, ebenso zu dem Tangentenpaar in $B'$ und $B'\mathfrak{n}$ den vierten harmonischen Strahl herstellen und den Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ dieser beiden vierten harmonischen Strahlen aufsuchen; dann ist $\mathfrak{p}$ der Pol von $\mathfrak{G}$ in Bezug auf denjenigen dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, dessen Berührungssehnen für die Konstruktion verwendet sind. Diese beiden Berührungssehnen schneiden sich nun in dem Diagonalpunkte $y$ und sind zu $yx$ und $yz$ harmonisch; bei der Veränderung des Kegelschnitts beschreiben also $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ ein Punktsystem, d. h. zwei auf ein-

ander liegende projektivische Punktreihen, folglich $A'\mathfrak{m}$ und $B'\mathfrak{n}$ zwei projektivische Strahlbüschel. Ferner sind $A'\mathfrak{m}$ und $A'\mathfrak{p}$

(Fig. 68.)




zugeordnet harmonisch mit dem Tangentenpaar durch $A'$, also beschreiben bei der Veränderung des Kegelschnitts die Strahlen $A'\mathfrak{m}$ und $A'\mathfrak{p}$ zwei projektivische Strahlbüschel, ebenso auch $B'\mathfrak{n}$ und $B'\mathfrak{p}$, folglich auch $A'\mathfrak{p}$ und $B'\mathfrak{p}$, deren Schnittpunkt der gesuchte Pol $\mathfrak{p}$ ist. Diese beiden von $A'\mathfrak{p}$ und $B'\mathfrak{p}$ beschriebenen projektivischen Strahlbüschel liegen aber perspektivisch, weil auf die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen; dies tritt nämlich in dem besonderen Fall ein, wenn die eine Berührungssehne durch $A'$ selbst geht, also $A'y$ wird, die andere $B'y$, der Kegelschnitt der Schaar aber in das Punktenpaar $A'B'$ ausartet. Der Ort des Pols $\mathfrak{p}$ ist also der Durchschnitt zweier perspektivischen Strahlbüschel oder eine Ge-

rade. Diese geht durch diejenigen drei Punkte der Diagonalen $AB$, $A'B'$, $A''B''$, welche den Schnittpunkten mit 𝔊 harmonisch zugeordnet sind; insbesondere also auch durch den oben mit $\mathfrak{c}_1$ bezeichneten Punkt auf $AB$; den Punkt, in welchem sie die Gerade 𝔊 trifft, können wir ebenfalls angeben. Unter den Kegelschnitten der Schaar giebt es nämlich einen, welcher zugleich die Gerade 𝔊 berührt; der Pol von 𝔊 in Bezug auf ihn ist der Berührungspunkt, und da dieser in der gefundenen Ortsgeraden von $\mathfrak{p}$ liegen muss, so ist er der Schnittpunkt derselben mit 𝔊. Diesen Punkt $\mathfrak{c}_2$ können wir mit Hülfe des besonderen Kegelschnitts, welcher dem Vierseit einbeschrieben ist und zugleich 𝔊 berührt, noch anders definiren. Bekanntlich (§ 31) bestimmen die Tangentenpaare aus den Punkten einer Geraden an einen Kegelschnitt gelegt auf einer festen Tangente desselben ein Punktsystem; betrachten wir den dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt, welcher gleichzeitig 𝔊 berührt, so bestimmt das Tangentenpaar aus $A$ und das aus $B$ zwei Punktenpaare auf 𝔊, welche dies Punktsystem konstituiren. Alle Punkte der Geraden $AB$ geben also Tangentenpaare, die 𝔊 immer in je zwei konjugirten Punkten dieses Punktsystems treffen, insbesondere auch der Schnittpunkt $\mathfrak{c}$ von $AB$ mit 𝔊; von seinem Tangentenpaar ist aber ein Theil 𝔊 selbst, also der eine Schnittpunkt der Berührungspunkt $\mathfrak{c}_2$ und der andere $\mathfrak{c}$; hiernach bestimmen die Schnittpunkte des Seitenpaares durch $A$ und des Seitenpaares durch $B$ auf 𝔊 ein Punktsystem, von welchem $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_2$ ein Paar konjugirte Punkte sind. Nach dem Früheren sind nun die Punkte $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ dieselben, welche dort zur Bestimmung der Geraden 𝔋 dienten; folglich coincidirt die früher konstruirte Gerade 𝔋 auch für den Fall einer Kegelschnittschaar von vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten mit der jetzt gefundenen Ortsgeraden der Pole von 𝔊 in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar und somit ist denn für alle Fälle die Gültigkeit des Satzes erwiesen: Die Pole einer Geraden 𝔊 in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer neuen Geraden 𝔋, und also auch die Pole von 𝔋 auf der Geraden 𝔊, oder: Die Geraden 𝔊 und 𝔋 sind ein Paar konjugirte Strahlen in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar und heissen daher „konjugirte Gerade in Bezug auf die Kegelschnittschaar". Zu jeder Geraden 𝔊 in der Ebene einer Ke-

gelschnittschaar gehört immer eine bestimmte konjugirte Gerade, insbesondere zu der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ die Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$, auf welcher die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar liegen. Die Paare von konjugirten Geraden erfüllen also auf doppelte Art die ganze Ebene. Fassen wir irgend ein solches Paar von konjugirten Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ins Auge und nennen $P$ ihren Schnittpunkt, so wird die Polare von $P$ in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar mit $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zusammen ein Tripel konjugirter Strahlen in Bezug auf diesen Kegelschnitt bilden; alle Kegelschnitte der Schaar haben ausserdem das Tripel konjugirter Strahlen gemeinschaftlich, welches von den Seiten des Diagonaldreiecks $x\,y\,z$ gebildet wird, und da zwei Tripel konjugirter Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt allemal einen neuen Kegelschnitt berühren (§ 31), so berührt die Polare von $P$ in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar einen gewissen neuen Kegelschnitt, welcher durch die fünf Tangenten: Die Seiten des Diagonaldreiecks $xyz$ und die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ vollständig bestimmt ist; also: Die Polaren des Punktes $P$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem Diagonaldreieck einbeschrieben ist. Diese Eigenschaft gilt nun wiederum allgemein für jeden Punkt $P$ der Ebene, auch wenn das Diagonaldreieck nicht vollständig reell ist und der Punkt $P$ nicht als Schnittpunkt eines reellen Paares konjugirter Gerader $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ aufgefasst werden kann, denn die Schnittpunkte sämmtlicher Paare von konjugirten Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ erfüllen nicht die ganze Ebene. Um nun die Allgemeingültigkeit der genannten Eigenschaft darzuthun, bemerken wir, dass, wenn wir zu einem gegebenen Punkte $P$ die Polare in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schaar konstruiren und zu ihr wiederum die konjugirte Gerade in Bezug auf die Kegelschnittschaar, die letztere Gerade nothwendig durch $P$ gehen muss; verändern wir also den Kegelschnitt der Schaar, so laufen diese letzteren Geraden sämmtlich durch $P$, und auch umgekehrt, wenn wir irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ durch $P$ ziehen, so muss die ihr konjugirte Gerade $\mathfrak{H}$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar nothwendig die Polare von $P$ in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar sein; denn konstruiren wir von dem Schnittpunkte ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$) die Polaren in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte der Schaar, so umhüllen dieselben nach dem Obigen einen gewissen Kegelschnitt, welcher

𝔊 und 𝔋 berührt, und die Schnittpunkte sämmtlicher Tangenten dieses Kegelschnitts mit 𝔊 sind die Pole von 𝔋 in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar; diese erfüllen aber die Gerade 𝔊 ganz und unter ihnen kommt also auch $P$ vor; es sind also auch $P$ und 𝔋 Pol und Polare für einen bestimmten Kegelschnitt der Schaar. Hieraus geht hervor, dass der Ort der Polaren des Punktes $P$ in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar identisch ist mit dem Ort derjenigen Geraden 𝔋, welche sämmtlichen durch $P$ gehenden Geraden 𝔊 in Bezug auf die Kegelschnittschaar konjugirt sind. Wir werden also, um jenen Ort zu bestimmen, eine veränderliche Gerade 𝔊 um den festen Punkt $P$ drehen und den Ort der konjugirten Geraden 𝔋 aufsuchen. Nach dem Früheren erschien die Gerade 𝔋 als die Polare desjenigen Punktes $\mathfrak{c}$, in welchem 𝔊 von $AB$ getroffen wird in Bezug auf den Kegelschnitt 𝔎 (Fig. 67). Dieser Kegelschnitt verändert sich nun mit 𝔊; läuft nämlich 𝔊 beständig durch einen festen Punkt $P$ und haben die Strahlen $AP$, $BP$ zu ihren konjugirten in den beiden erzeugenden Strahlsystemen $(A)$ und $(B)$ die Strahlen $A\Pi$, $B\Pi$, welche sich in $\Pi$ treffen, so geht der veränderliche Kegelschnitt 𝔎 durch den festen Punkt $\Pi$ und ausserdem durch $ABC$, beschreibt also ein Büschel mit vier reellen Mittelpunkten. Die beiden Tangenten in $A$ und $B$ an dem Kegelschnitt 𝔎 treffen sich in einem Punkte $S$, dessen Ort eine feste Gerade sein wird, eine Diagonale des vollständigen Vierecks $ABC\Pi$, nämlich die Verbindungslinie der Schnittpunkte $(A\Pi, BC)$ und $(B\Pi, AC)$. Die Polare von $\mathfrak{c}$ in Bezug auf 𝔎 geht aber durch $S$ und den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{c}_1$ zu $\mathfrak{c}, A, B$, während $A$ und $B$ zugeordnete Punkte sind; durch die beiden Punkte $S$ und $\mathfrak{c}_1$ ist 𝔋 bestimmt und wir erkennen jetzt leicht, dass bei der Bewegung von 𝔊 die Punkte $S$ und $\mathfrak{c}_1$ zwei projektivische Punktreihen auf ihren Trägern durchlaufen; zu der Tangente $AS$ ist nämlich im Strahlsystem $(A)$ der Strahl $A\mathfrak{a}$ konjugirt und $\mathfrak{a}$ der Schnittpunkt von 𝔊 mit $BC$. Wenn sich also 𝔊 um den festen Punkt $P$ dreht, so beschreiben $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ perspektivische gerade Punktreihen auf $BC$ und $AB$, folglich der vierte harmonische Punkt $\mathfrak{c}_1$ eine mit $\mathfrak{c}$ projektivische Punktreihe, weil $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ ein hyperbolisches Punktsystem auf $AB$ konstituiren; ferner beschreibt $A\mathfrak{a}$ ein Strahlbüschel, welches projektivisch ist mit der Punktreihe $\mathfrak{c}$ und $AS$ ein mit $A\mathfrak{a}$ projektivisches Strahlbüschel, weil $AS$ und $A\mathfrak{a}$ immer zwei konjugirte Strahlen des

Strahlsystems $(A)$ sind; also werden endlich die von $S$ und $\mathfrak{c}_1$ durchlaufenen geraden Punktreihen projektivisch sein und der Ort der Verbindungslinie $S\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{H}$ wird ein Kegelschnitt, welcher insbesondere auch $AB$, sowie $A\Pi$ und $B\Pi$ berührt. Dieser Kegelschnitt heisst der Polarkegelschnitt des Punktes $P$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar und besitzt folgende Eigenschaft:

Die Polaren eines Punktes $P$ in Bezug auf alle Kegelschnitte einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt, welcher zugleich der Ort aller Geraden $\mathfrak{H}$ ist, die zu sämmtlichen durch $P$ gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar konjugirt sind. Hat die Kegelschnittschaar vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, so berührt dieser Polarkegelschnitt von $P$ allemal die drei Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits und ausserdem diejenigen sechs Strahlen, welche man erhält, wenn man durch jede der sechs Ecken des vollständigen Vierseits den vierten harmonischen Strahl konstruirt zu dem Seitenpaar und dem Verbindungsstrahl der Ecke mit $P$, diesem letzteren zugeordnet. Liegt $P$ ausserhalb des Polarkegelschnitts, so ist das aus ihm an denselben gelegte Tangentenpaar ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf die Schaar und es giebt zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, welche durch $P$ gehen und deren Tangenten in $P$ eben diese beiden Strahlen sind. Aus der Eigenschaft des Polarkegelschnitts folgt zugleich eine nützliche Bemerkung: Die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte einer Schaar liegen auf einer Geraden $\mathfrak{H}$ und bilden eine gerade Punktreihe; die Pole einer zweiten Geraden $\mathfrak{G}'$ bilden eine zweite gerade Punktreihe auf $\mathfrak{H}'$. Betrachten wir in diesen beiden Punktreihen als entsprechende Punkte die Pole von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in Bezug auf denselben Kegelschnitt der Schaar, so sind die beiden Punktreihen auf $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ allemal projektivisch, wie auch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ angenommen werden mögen; denn die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte umhüllt den Polarkegelschnitt des Schnittpunktes $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ in Bezug auf die Schaar, welcher zugleich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zu Tangenten hat, folglich schneiden alle übrigen Tangenten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ in zwei projektivischen Punktreihen. Ferner lässt der Polarkegelschnitt die charakteristische Eigenschaft der Kegelschnittschaar in bestimmterer Weise hervortreten; der Polarkegelschnitt eines beliebigen Punktes $P$ heisse $C^{(2)}$; nehmen wir

zuerst an, dass $P$ ausserhalb $C^{(2)}$ liegt, so geht durch $P$ ein Tangentenpaar an $C^{(2)}$, welches zugleich ein Paar konjugirter Gerader in Bezug auf die Schaar ist, also für jeden Kegelschnitt der Schaar zu dem Tangentenpaar aus $P$ an letzteren harmonisch gelegen ist. Die sämmtlichen Tangentenpaare aus $P$ an die Kegelschnitte der Schaar bilden also ein hyperbolisches Strahlsystem, welches zusammenfällt mit demjenigen Strahlsystem, das dem Punkt $P$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ zugehört und dessen Asymptoten eben aus dem Tangentenpaar von $P$ an $C^{(2)}$ bestehen. Wenn dagegen $P$ innerhalb des Polarkegelschnitts $C^{(2)}$ liegt, so existirt kein reelles Tangentenpaar an $C^{(2)}$, aber trotzdem bilden die Tangentenpaare aus $P$ an die Kegelschnitte der Schaar ein elliptisches Strahlsystem, welches mit demjenigen zusammenfällt, das dem Punkt $P$ in Bezug auf $C^{(2)}$ zugehört. Um dies zu erkennen, denken wir uns ein Tangentenpaar aus $P$ an einen Kegelschnitt der Schaar, es sei $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, die Polare von $P$ in Bezug auf denselben sei $\mathfrak{L}$, welche die beiden Berührungspunkte auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ verbindet; sei ferner die konjugirte Gerade von $\mathfrak{S}$ in Bezug auf die Schaar $\mathfrak{H}$: und von $\mathfrak{S}'$: $\mathfrak{H}'$, so geht $\mathfrak{H}$ durch den Berührungspunkt von $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{H}'$ durch den Berührungspunkt von $\mathfrak{S}'$, d. h. die Verbindungslinie $(\mathfrak{S}\mathfrak{H}, \mathfrak{S}'\mathfrak{H}')$ ist identisch mit $\mathfrak{L}$. Der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ muss aber die drei Geraden $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{L}$ berühren, weil $\mathfrak{L}$ die Polare von $P$ ist in Bezug auf einen Kegelschnitt der Schaar und $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ konjugirte Gerade von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sind, welche sich in $P$ treffen. Da nun $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{H}'$ zwei Paare konjugirter Gerader in Bezug auf die Schaar sind, so werden auch (§ 31): $(\mathfrak{S}\mathfrak{S}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ und $(\mathfrak{S}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{S}')$ ein drittes Paar konjugirter Geraden in Bezug auf die Schaar sein, und weil von diesen die erstere durch $P$ geht, so wird die Letztere $C^{(2)}$ berühren; wir haben also jetzt vier Tangenten von $C^{(2)}$, nämlich:

$$\mathfrak{H} \quad \mathfrak{H}' \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{H}, \mathfrak{S}'\mathfrak{H}') \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{H}', \mathfrak{S}'\mathfrak{H}).$$

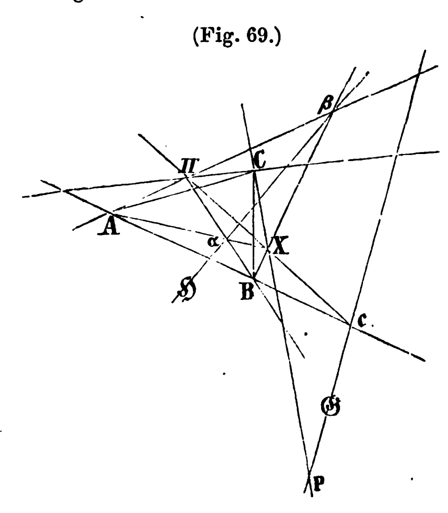
Von diesen dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ umschriebenen Vierseit sind offenbar die Geraden $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei Diagonalen, wie aus dem Anblick der Buchstaben hervorgeht, folglich sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$, und da alle durch $P$ gehende Paare konjugirter Strahlen in Bezug auf denselben ein Strahlsystem bilden, so folgt der Satz:

Die Tangentenpaare aus einem beliebigen Punkte $P$

an die Kegelschnitte einer Schaar bilden ein Strahlsystem, welches identisch ist mit demjenigen, das dem Punkte $P$ in Bezug auf seinen Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ zugehört; also je zwei Tangenten aus $P$ an einen Kegelschnitt der Schaar sind ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$.

Der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ eines Punktes $P$ in Bezug auf die Kegelschnittschaar ist insbesondere, wie wir gesehen haben, dem gemeinschaftlichen Tripel konjugirter Strahlen für alle Kegelschnitte der Schaar einbeschrieben; dieses Tripel ist aber nur reell, wenn das Strahlsystem ($C$) hyperbolisch ist, und besteht alsdann aus den Asymptoten desselben und der Verbindungslinie $AB$, welche die drei Diagonalen sind. Ist dagegen das Strahlsystem ($C$) elliptisch, so tritt an die Stelle der genannten Eigenschaft die mit ihr gleichbedeutende, dass das Strahlsystem ($C$) allemal dasjenige ist, welches dem Punkte $C$ in Bezug auf irgend einen Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ zugehört. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, denken wir uns den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ eines beliebigen Punktes $P$ auf etwas andere Weise hergestellt. Konstruiren wir die den Strahlen $AP$, $BP$, $CP$ konjugirten Strahlen in den drei Strahlsystemen ($A$) ($B$) ($C$), so schneiden sich dieselben in einem Punkte $\Pi$, und ziehen wir durch $P$ irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$, welche $AB$ in $\mathfrak{c}$ trifft (Fig. 69), so wird $\Pi\mathfrak{c}$ die feste Gerade $CP$ in einem Punkte $X$ treffen, so dass durch die fünf Punkte $ABC\Pi X$ der oben mit $\mathfrak{K}$ bezeichnete Kegelschnitt bestimmt wird, denn da $CP$ und $C\Pi$ ein Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems ($C$) ist, so muss die Durchbohrungssehne $\Pi X$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $\mathfrak{c}$ gehen, wie es schon oben für die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nachgewiesen ist und in gleicher Weise für den

(Fig. 69.)



Punkt c gilt; wir sehen also umgekehrt, dass $CP$ und $\Pi$c sich in einem Punkte $X$ des Kegelschnitts 𝔎 treffen müssen, und können jetzt von diesem Kegelschnitte ganz abstrahiren, indem wir den zu seiner Bestimmung dienenden Punkt $X$ allein ins Auge fassen; verbinden wir die Schnittpunkte: $(AX, \Pi B) = \alpha$ und $(BX, \Pi A) = \beta$, so ist die Verbindungslinie $\alpha\beta$ = 𝔖 die konjugirte Gerade zu 𝔊 in Bezug auf die Schaar, und indem wir die Gerade 𝔊 um den festen Punkt $P$ drehen, umhüllt die in der angegebenen Weise konstruirte Gerade 𝔖 den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$. Diese Konstruktion gestattet leicht, die Veränderung zu überblicken, welche die Figur durch die Drehung von 𝔊 erfährt; es beschreibt nämlich c eine gerade Punktreihe auf $AB$, $X$ eine mit ihr projektivische gerade Punktreihe auf $CP$, $\alpha$ und $\beta$ projektivische Punktreihen mit $X$, also auch mit einander auf $\Pi B$ und $\Pi A$, folglich umhüllt 𝔖 einen Kegelschnitt $C^{(2)}$, welcher $\Pi A$ und $\Pi B$ berührt; auch ist leicht zu erkennen, dass er $AB$ zur Tangente hat, was daraus hervorgeht, dass, wenn 𝔊 mit $PC$ zusammenfällt, 𝔖 auf $AB$ zu liegen kommt. Auf den beiden Trägern $\Pi A$ und $\Pi B$ sind mithin einmal $A$ und $B$ und dann $\beta$ und $\alpha$ je ein Paar entsprechender Punkte der beiden projektivischen Punktreihen, folglich liegt der Schnittpunkt $(A\alpha, B\beta) = X$ auf der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden Träger (§ 21), oder, da $X$ die Gerade $PC$ durchläuft, so ist $PC$ die Polare von $\Pi$ in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$; ferner bilden $\Pi A$, $\Pi B$, $AB$, $\alpha\beta$ ein dem Kegelschnitt umschriebenes Vierseit, dessen zwei Diagonalen $XA$, $XB$ sind; $XA$ und $XB$ sind also stets ein Paar konjugirter Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt $C^{(2)}$; insbesondere also auch $CA$ und $CB$, und auch $CP$ und $C\Pi$, weil $\Pi$ der Pol von $CP$ ist; folglich bestimmen diese beiden Paare konjugirter Strahlen das dem Kegelschnitt $C^{(2)}$ zugehörige Strahlsystem in $C$ und dieses coincidirt mit dem Strahlsystem $(C)$, welches, wie früher angegeben ist, von den beiden als gegeben angesehenen Strahlsystemen $(A)$ und $(B)$ abhängt, indem $CA$ und $CB$ ein Paar und $CP$ und $C\Pi$ ein zweites Paar konjugirter Strahlen desselben ist. Die oben ausgesprochene Behauptung ist also erwiesen und der Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ des Punktes $P$ in Bezug auf die Schaar nunmehr dadurch bestimmt, dass er dem Dreieck $AB\Pi$ einbeschrieben ist und $\Pi A$ und $\Pi B$ in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von $PC$ getroffen werden.

## § 49. Nachtrag zu § 45.

Die in § 45 geführte Untersuchung, welche über die besondere Natur der in einer Kegelschnittschaar enthaltenen Kegelschnitte Aufschluss gab, beruhte wesentlich darauf, dass die Kegelschnittschaar ein reelles gemeinschaftliches Tripel $x\,y\,z$ besitzt, behält also nur ihre Gültigkeit, wenn die Kegelschnittschaar entweder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten hat oder vier imaginäre; es bleibt daher eine Lücke für den Fall, wenn die Schaar zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten besitzt, und diese Lücke auszufüllen ist der gegenwärtige Paragraph bestimmt, in welchem die dort gewonnenen Resultate von einem neuen Gesichtspunkte aus den allgemeinen Polareigenschaften der Kegelschnittschaar nochmals abgeleitet werden sollen, unabhängig davon, ob das gemeinsame Tripel $x\,y\,z$ ganz oder nur zum Theil reell ist.

Gehen wir von der allgemeinsten Erzeugung der Kegelschnittschaar aus vermittelst der beiden Strahlsysteme $(A)$ und $(B)$, von welchen das Strahlsystem $(C)$ in bestimmter Weise abhängt (§ 48), und nehmen insbesondere die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, so wird deren konjugirte Gerade $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die Schaar die Mittelpunkte $\mathfrak{m}$ sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar enthalten. Der unendlich-entfernte Punkt $\mathfrak{m}_\infty$ dieser Geraden $\mathfrak{M}$ ist der Mittelpunkt der einzigen in der Schaar vorkommenden Parabel; von diesem Punkte $\mathfrak{m}_\infty$ wollen wir den Polarkegelschnitt $\mathfrak{P}^{(2)}$ in Bezug auf die Schaar bestimmen; derselbe muss eine P a r a b e l sein, weil die Polare von $\mathfrak{m}_\infty$ in Bezug auf die einzige in der Schaar vorkommende Parabel $\mathfrak{G}_\infty$ selbst ist und mithin $\mathfrak{G}_\infty$ eine Tangente von $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist; folglich ist $\mathfrak{P}^{(2)}$ eine Parabel; sie berührt $\mathfrak{M}$, weil $\mathfrak{M}$ die konjugirte Gerade zu $\mathfrak{G}_\infty$ ist und $\mathfrak{G}_\infty$ durch $\mathfrak{m}_\infty$ geht; sie berührt ebenfalls $AB$ und das Strahlsystem $(C)$ ist das ihr zugehörige, wie bei jedem Polarkegelschnitt $C^{(2)}$ (§ 48). Jede Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ trifft $\mathfrak{M}$ in einem Punkte $\mathfrak{m}$, welcher Mittelpunkt eines bestimmten Kegelschnitts der Schaar ist, und bildet mit $\mathfrak{M}$ zusammen ein Paar konjugirter Durchmesser dieses Kegelschnitts, weil diese beiden Strahlen und $\mathfrak{G}_\infty$ ein Tripel konjugirter Strahlen für einen solchen Kegelschnitt sind. Ziehen wir ferner $\mathfrak{m}C$ und eine Parallele durch $\mathfrak{m}$ zu $AB$, so haben wir ein zweites immer reelles Paar konjugirter Durchmesser dieses

Kegelschnitts der Schaar, weil $C$ und die Verbindungslinie $AB$ Pol und Polare für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar sind. Durch diese beiden Paare konjugirter Durchmesser ist nun das ganze Strahlsystem der konjugirten Durchmesser für den Kegelschnitt der Schaar, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, vollständig bestimmt, und die Natur dieses Strahlsystems giebt Aufschluss über die Natur des Kegelschnitts, ob er Ellipse oder Hyperbel ist. Wir können hiernach, indem wir eine veränderliche Tangente an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ herumbewegen, den Verlauf jenes Strahlsystems, also die Natur der Kegelschnitte der Schaar verfolgen und gelangen unabhängig von der Realität des gemeinsamen Tripels, von welchem $C$ und $AB$ immer reell sind, zu den Resultaten des § 45, die aber für den Fall nur zweier-reeller gemeinschaftlicher Tangenten der Schaar eine Modifikation erleiden. Zuvörderst ist es nun nöthig, die Konstruktion der Geraden $\mathfrak{M}$ und der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, wovon Alles abhängt, genauer anzugeben. Die Gerade $\mathfrak{M}$ wird nach § 48 so gefunden: Ein durch $A$ zu $BC$ gezogener Parallelstrahl hat zu seinem konjugirten in dem Strahlsystem $(A)$ den Strahl $AS$ und ein durch $B$ zu $AC$ gezogener Parallelstrahl hat zu seinem konjugirten in dem Strahlsystem $(B)$ den Strahl $BS$; bezeichnet $S$ den Schnittpunkt der beiden so gefundenen Strahlen und $o$ die Mitte von $AB$, so ist $oS$ die gesuchte Mittelpunktslinie $\mathfrak{M}$. Ziehen wir sodann durch $A$ und $B$ Parallele zu $\mathfrak{M}$ und die zu ihnen konjugirten Strahlen in den Strahlsystemen $(A)$ und $(B)$, welche sich in $\Pi_0$ treffen, endlich durch $C$ eine Parallele zu $\mathfrak{M}$, welche $\Pi_0 A$ und $\Pi_0 B$ in $\alpha$ und $\beta$ trifft, so ist derjenige Kegelschnitt, welcher dem Dreiseit $\Pi_0 AB$ einbeschrieben ist und die Seiten $\Pi_0 A$, $\Pi_0 B$ in den Punkten $\alpha$ und $\beta$ berührt, die gesuchte Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; sie berührt auch $\mathfrak{M}$ und zwar, wie leicht zu erkennen ist, in demjenigen Punkte $\mathfrak{m}_h$, welcher die Mitte des Abschnittes ist, den $\Pi_0 A$ und $\Pi_0 B$ auf $\mathfrak{M}$ ausschneiden; dieser Punkt $\mathfrak{m}_h$ ist der Mittelpunkt derjenigen Hyperbel, welche der Schaar angehört und die Gerade $\mathfrak{M}$ zu einer Asymptote hat, also durch den Punkt $\mathfrak{m}_\infty$ geht, denn $\mathfrak{m}_h$ ist der Schnittpunkt zweier zusammenfallender Tangenten der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, also zweier zusammenfallender konjugirter Durchmesser eines Kegelschnitts der Schaar. Die Verbindungslinie $\Pi_0 \mathfrak{m}_h$ geht daher nach dem unendlich-entfernten Punkte der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ oder ist parallel mit der Axe derselben. Hierdurch ist nun die Parabel

$\mathfrak{P}^{(2)}$ mehr, als bestimmt und es lässt sich der vorhin angedeutete Vorgang deutlich verfolgen, wenn man aus den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{m}$ der Geraden $\mathfrak{M}$ die noch übrige zweite Tangente an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ legt. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{p}_\infty$ den jedesmaligen unendlich-entfernten Punkt derselben, so beschreiben $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ auf $\mathfrak{G}_\infty$ zwei projektivische Punktreihen, weil $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}_\infty$ selbst Tangenten eines Kegelschnitts (der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$) sind und daher von allen übrigen Tangenten desselben projektivisch geschnitten werden; bezeichnen wir noch den unendlich-entfernten Punkt von $AB$ durch $\mathfrak{c}_\infty$, so sind nach dem Obigen $\mathfrak{m}C$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_\infty$ ein Paar, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ ein zweites Paar konjugirter Durchmesser desjenigen Kegelschnitts der Schaar, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ ist, und durch diese beiden Paare ist das ganze Durchmessersystem bestimmt. Um zu entscheiden, ob ein Strahlsystem elliptisch oder hyperbolisch ist, haben wir nachzusehen, ob ein Paar konjugirter Strahlen durch ein zweites und dieses durch jenes getrennt wird oder nicht; dies lässt sich leicht bei der obigen Figur verfolgen; wir können uns aber auch des in § 45 angewendeten Hülfsmittels bedienen, indem wir das Strahlsystem parallel mit sich nach irgend einem Punkte $O$ eines Hülfskegelschnitts $\mathfrak{C}$ verlegen; die Durchbohrungssehne je zweier konjugirter Strahlen mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ läuft dann durch einen festen Punkt $P$, und je nachdem dieser Punkt ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ liegt, ist das Strahlsystem hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch. Verschieben wir nun, wie in § 45, sämmtliche Durchmessersysteme der Schaar ohne Drehung nach einem beliebigen Punkte $O$ eines Hülfskegelschnitts $\mathfrak{C}$, so bestimmt jedes derselben einen Punkt $P$ und den Ort sämmtlicher Punkte $P$ für die ganze Schaar ermitteln wir folgendermaassen: Die durch $O$ zu $\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{c}_\infty$ gezogenen Parallelen treffen $\mathfrak{C}$ in den festen Punkten $\delta$ und $\gamma$; die zu $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ durch $O$ gezogene Parallele beschreibt ein Strahlbüschel, welches perspektivisch ist mit der Punktreihe $\mathfrak{p}_\infty$, und die zu $\mathfrak{m}C$ gezogene Parallele durch $O$ beschreibt ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe $\mathfrak{m}$ projektivisch ist; da nun die Punktreihen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}_\infty$ projektivisch sind, weil $\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\infty$ die veränderliche Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist, so durchbohren die beiden letzten Strahlbüschel den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ in Punkten, welche resp. mit den festen Punkten $\delta$ und $\gamma$ auf $\mathfrak{C}$ verbunden zwei projektivische Strahl-

büschel liefern müssen; der Schnittpunkt je zweier entsprechender Strahlen derselben ist aber $P$, folglich ist der Ort der Punkte $P$ ein neuer Kegelschnitt $\mathfrak{C}_1$, welcher mit $\mathfrak{C}$ die beiden Punkte $\gamma$ und $\delta$ gemein hat. Die Punkte $P$ dieses Kegelschnitts $\mathfrak{C}_1$ bestimmen nun Sehnen auf $\mathfrak{C}$, deren Schnittpunkte mit $O$ verbunden Strahlsysteme in $O$ bewirken, welche den Durchmessersystemen der Kegelschnittschaar parallel laufen; denjenigen Punkten von $\mathfrak{C}_1$, welche ausserhalb $\mathfrak{C}$ liegen, entsprechen also Hyperbeln in der Kegelschnittschaar, denjenigen Punkten innerhalb $\mathfrak{C}$ Ellipsen und den beiden Punkten $\gamma$ und $\delta$ Parabeln, und zwar ist nur die dem Punkte $\delta$ entsprechende eine eigentliche Parabel, während die dem Punkte $\gamma$ entsprechende ein Punktenpaar $A$, $B$ ist, deren Verbindungslinie, doppelt gedacht, als Parabel aufgefasst werden kann. Zur weiteren Untersuchung müssen nun zwei Fälle unterschieden werden, nämlich ob der Punkt $C$ 1) innerhalb oder 2) ausserhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt. Da das dem Punkte $C$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zugehörige Strahlsystem dasjenige ist, welches von den beiden als gegeben angenommenen Strahlsystemen ($A$) und ($B$) abhängt (§ 48), und es im Falle 1) elliptisch, im Falle 2) hyperbolisch ist, so hat die Kegelschnittschaar im ersten Falle zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten (II und III), im zweiten Falle entweder vier imaginäre oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten (I und IV). Im ersten Falle können nun die Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ ausser den Punkten $\gamma$ und $\delta$ keinen Punkt weiter gemeinschaftlich haben oder es kann weiter keins von den Durchmessersystemen parabolisch werden; denn damit ein Strahlsystem parabolisch sei, müssen zwei beliebige Strahlen desselben ein und denselben konjugirten Strahl haben, welcher dann zu allen Strahlen der konjugirte ist; es müssten also auch $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_\infty$ und $\mathfrak{m}\,\mathfrak{c}_\infty$ denselben konjugirten Strahl haben oder eine durch $\mathfrak{m}$ gehende Tangente der Parabel müsste mit $\mathfrak{m}\,C$ zusammenfallen; da nun $C$ innerhalb der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ liegt, so geht keine Tangente durch ihn, also schliessen wir: Eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten zerfällt nur in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche von einander getrennt werden einmal durch die einzige in der Schaar vorkommende Parabel und das andere Mal durch das einzige in ihr

vorkommende Punktenpaar. Im zweiten Falle dagegen haben die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ ausser den Punkten $\gamma$ und $\delta$ noch zwei andere Punkte gemein, welche parabolischen Strahlsystemen entsprechen; die beiden aus $C$ an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ gelegten Tangenten sind nämlich selbst, jede doppelt gedacht, als zwei besondere Parabeln der Schaar aufzufassen und bilden mit $AB$ zusammen das reelle gemeinschaftliche Tripel oder sind die drei Diagonalen des entweder ganz reellen oder ganz imaginären vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar einbeschrieben ist. In diesem Falle bleiben die im § 45 gefundenen Resultate bestehen: Die Kegelschnittschaar besteht aus zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln, welche durch vier Parabeln von einander getrennt werden u. s. f. Auch die interessanten Folgerungen, welche sich aus der Untersuchung des Kegelschnitts $\mathfrak{C}_1$ in § 45 ergaben, bleiben bestehen mit der Modifikation, welche aus der abweichenden Beschaffenheit der Kegelschnittschaar von zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten sich von selbst ergiebt.

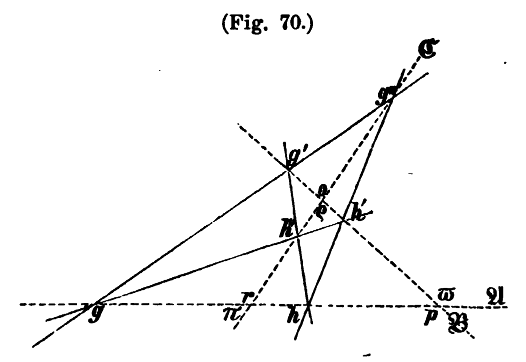
Es ist der Vollständigkeit wegen noch der Uebergangsfall zu untersuchen, wenn der Punkt $C$ auf der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ selbst liegt; in diesem Fall ist das Strahlsystem $(C)$ parabolisch, die beiden Asymptoten fallen zusammen in eine Gerade, die Tangente in $C$ an der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; diese Asymptoten sind aber zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits, welchem die Kegelschnittschaar einbeschrieben ist, und da sie zugeordnete harmonische Strahlen mit $CA$ und $CB$ sind, so muss der Strahl, in welchem sie zusammenfallen, entweder durch $A$ oder durch $B$ gehen; nehmen wir an, er gehe durch $B$, so zeigt sich, dass das durch $B$ gehende Seitenpaar des vollständigen Vierseits zusammenfällt, also das Strahlsystem $(B)$ ebenfalls parabolisch wird, oder die Kegelschnittschaar den speciellen Charakter annimmt, in einem festen Punkte $B$ beständig dieselbe feste Tangente $BC$ und ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten zu haben, die durch $A$ gehen, zu besitzen, je nachdem das gegebene Strahlsystem $(A)$ hyperbolisch oder elliptisch ist. Die Kegelschnittschaar specialisirt sich also in diesem Uebergangsfalle dahin, dass zwei von den gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallen.

## § 50. Konjugirte Kegelschnittbüschel.

Die in § 41 angegebene Erzeugung des Kegelschnittbüschels aus zwei beliebig in der Ebene angenommenen geraden Punktsystemen, welche gleichzeitig sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels zugehören, führt unmittelbar zu einer eigenthümlichen Verbindung von drei Kegelschnittbüscheln, welche konjugirt genannt werden und ganz dieselben Eigenschaften besitzen, wie zwei konjugirte Kreisschaaren (Steiner: „Einige geometrische Betrachtungen", Crelle's Journal d. Math. Bd. I, S. 168) und ein von ihnen abhängiges Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Indem wir bei der folgenden Untersuchung dieser Eigenschaften nur einen Fall ins Auge fassen und zwar der Einfachheit wegen denjenigen, für welchen die wesentlichsten Theile der Figur reell werden, wird es nach Anleitung der vorigen Auseinandersetzungen keine Schwierigkeit mehr haben, die übrigen Fälle, in welchen gewisse Theile der Figur imaginär werden, gleicherweise auszuführen und die dabei eintretenden Modifikationen zu ermitteln.

Wir gehen von zwei hyperbolischen Punktsystemen $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus, mit den Asymptotenpunkten $g$, $h$ und $g' h'$ (Fig. 70), also von einem Kegelschnitt-

(Fig. 70.)




büschel mit vier reellen Punkten $g h$, $g' h'$. Von diesen beiden als gegeben angenommenen Punktsystemen hängt nun ein drittes in gewisser Weise ab; dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ entspricht nämlich als $p$ im ersten Punktsystem aufgefasst der konjugirte Punkt $\pi$ und als $\varpi$ im zweiten Punktsystem der konjugirte Punkt $o$; die Verbindungslinie $\pi o$, welche $\mathfrak{C}$ heisse, ist der Träger eines be-

stimmten dritten Punktsystems $(z, \zeta)$, welches dadurch entsteht, dass wir die Schnittpunkte von 𝔈 mit den Verbindungslinien $xy$ und $\xi\eta$ oder auch $x\eta$ und $y\xi$ als je ein Paar konjugirter Punkte $z$ und $\zeta$ auffassen. Es ist in § 41 bewiesen, dass, wie auch die beiden Paare $x\xi$ und $y\eta$ aus den ersten beiden Punktsystemen gewählt werden mögen, $z$, $\zeta$ immer ein und demselben dritten Punktsystem angehören und dass dieses insbesondere hyperbolisch ist in dem unserer Betrachtung zu Grunde gelegten Falle, wenn $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ hyperbolische Punktsysteme sind; seine Asymptotenpunkte $g'' h''$ sind diejenigen Punkte, in welchen $gg'$ und $gh'$ oder auch $hh'$ und $hg'$ die Gerade 𝔈 treffen, so dass also:

$$(gg', hh') = g'' \quad (gh', hg') = h''$$

und die sechs Asymptotenpunkte $g h g' h' g'' h''$ die Ecken eines vollständigen Vierseits sein müssen, als dessen drei Diagonalen die Träger 𝔄𝔅𝔈 auftreten. Die beiden Punktsysteme auf 𝔄 und 𝔅 erzeugen ein Kegelschnittbüschel, welches die vier Mittelpunkte $g h g' h'$ hat; die Kegelschnitte dieses Büschels treffen 𝔈 in je zwei Punkten $z \zeta$ ihres Punktsystems oder haben $g'' h''$ zu konjugirten Punkten; nehmen wir irgend ein Paar $z\zeta$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, die nach den Punkten $x\xi$ eines veränderlichen Punktenpaares auf 𝔄 (oder auch nach $y$, $\eta$, einem veränderlichen Paare auf 𝔅) hingehen, so erzeugen diese beiden projektivischen Strahlbüschel einen Kegelschnitt des Büschels $(g h g' h')$ und $p g'' h''$ ist das gemeinschaftliche Tripel dieses Büschels. Die Schnittpunkte von 𝔈 mit 𝔄 und 𝔅, welche wir $\pi$ und $o$ genannt haben, sind aber auch gleichzeitig ein Paar konjugirter Punkte des Systems $(z, \zeta)$ und in diesem Sinne bezeichnen wir sie mit $r$ und $\varrho$.

Es liegt jetzt nahe, ebenso wie das durch die beiden Punktsysteme $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ hervorgerufene Kegelschnittbüschel ein zweites Kegelschnittbüschel aus den beiden Punktsystemen $(x, \xi)$ und $(z, \zeta)$ und ein drittes aus den Systemen $(y, \eta)$ und $(z, \zeta)$ hervorgehen zu lassen; diese drei Kegelschnittbüschel wollen wir durch:

| | | |
|---|---|---|
| [𝔈] | mit den Mittelpunkten | $g h g' h'$ |
| [𝔅] | - - - | $g h g'' h''$ |
| [𝔄] | - - - | $g' h' g'' h''$ |

bezeichnen und **konjugirte Kegelschnittbüschel** nennen. Solche drei Kegelschnittbüschel hängen in eigenthümlicher Weise

mit einander zusammen und bieten eine Reihe von merkwürdigen Eigenschaften dar, welche im Folgenden abgeleitet werden sollen.

Durch einen beliebigen Punkt $s$ in der Ebene gehen drei Kegelschnitte $ABC$, deren jeder beziehungsweise einem der drei konjugirten Büschel angehört; von diesen drei Kegelschnitten schneiden sich je zwei ausser in den drei ersichtlichen Punkten noch in einem jedesmaligen vierten, nämlich:

$A$ und $B$ in den Punkten $g''h''s$ und $\sigma''$
$B$ - $C$ - - - $g\ h\ s$ - $\sigma$
$C$ - $A$ - - - $g'h's$ - $\sigma'$.

Die drei Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ liegen in gerader Linie; durch den Punkt $s$ giebt es nämlich im Allgemeinen zwei Strahlen, die sowohl $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$ in je einem Paar konjugirter Punkte der auf ihnen befindlichen Punktsysteme, folglich auch $\mathfrak{C}$ in einem Paar seines Punktsystems treffen; nun können, da die beiden Punktsysteme $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ hyperbolisch angenommen sind, jene beiden Strahlen durch $s$ auch imaginär werden, welchen Fall wir nachher untersuchen wollen; seien zuerst die beiden Strahlen durch $s$ reell und so beschaffen, dass, wenn der eine die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in $a\,b\,c$ trifft, der andere ihnen in den konjugirten Punkten $\alpha\beta\gamma$ begegnet; dann sind die Schnittpunkte

$$(a\beta,\ b\alpha) = \sigma'' \quad (a\gamma,\ c\alpha) = \sigma' \quad (b\gamma,\ c\beta) = \sigma$$

und liegen nach § 21 in gerader Linie. Da nämlich $a, \alpha$ und $b, \beta$ zwei Paare konjugirter Punkte sind für das Büschel $[\mathfrak{C}]$, so sind auch (nach § 31) $(a\,b,\ \alpha\,\beta) = s$ und $(a\beta,\ b\alpha) = \sigma''$ ein Paar konjugirter Punkte für das ganze Büschel $[\mathfrak{C}]$; ebenso ist $\sigma$ der konjugirte Punkt zu $s$ für das Büschel $[\mathfrak{A}]$ und $\sigma'$ für das Büschel $[\mathfrak{B}]$. Die Tangenten in $s$ an den drei Kegelschnitten $ABC$ gehen also resp. durch $\sigma\sigma'\sigma''$; nun trifft aber der Kegelschnitt $A$ die Gerade $\mathfrak{A}$ in den obigen Punkten $a$ und $\alpha$, denn die beiden Strahlbüschel in $a$ und $\alpha$ als Mittelpunkte, welche nach den Paaren konjugirter Punkte $(y, \eta)$ oder $(z, \zeta)$ hingehen, erzeugen den Kegelschnitt $A$, weil $ab$ und $\alpha\beta$ sich in $s$ treffen und durch diesen einen Punkt der Kegelschnitt des Büschels $[\mathfrak{A}]$ schon bestimmt ist; hieraus folgt, dass auch $(a\beta,\ b\alpha) = \sigma''$ ein Punkt des Kegelschnitts $A$ sein muss; anderseits trifft der Kegelschnitt $B$ die Gerade $\mathfrak{B}$ in den Punkten $b$ und $\beta$, folglich ist auch $(b\alpha,\ \beta a) = \sigma''$ ein Punkt des Kegelschnitts $B$, und da

die Kegelschnitte $A$ und $B$ bereits die drei Punkte $s g'' h''$ gemein haben, so ist $\sigma''$ ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt; in gleicher Weise folgt, dass $(b\gamma, c\beta) = \sigma$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte $B$ und $C$ und endlich, dass $(c\alpha, a\gamma) = \sigma'$ der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte $A$ und $C$ ist. Wir haben also folgendes Ergebniss:

Hat man drei konjugirte Kegelschnittbüschel, so geht durch einen beliebigen Punkt $s$ in der Ebene aus jedem Büschel je ein Kegelschnitt; diese drei Kegelschnitte $ABC$ haben zu je zweien noch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt, und zwar $B$ und $C$ den Punkt $\sigma$, $C$ und $A$ den Punkt $\sigma'$, $A$ und $B$ den Punkt $\sigma''$; die drei Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ liegen in einer Geraden $\mathfrak{L}$ und die drei Strahlen $s\sigma$, $s\sigma'$, $s\sigma''$ sind die Tangenten der drei Kegelschnitte $ABC$ im Punkte $s$; die Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ sind ferner die konjugirten Punkte von $s$ in Bezug auf die drei konjugirten Büschel. Die drei Kegelschnitte $ABC$ treffen endlich im Allgemeinen die Träger $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der drei erzeugenden Punktsysteme in drei konjugirten Punktenpaaren $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und von diesen sechs Punkten liegen zwei Mal drei in je einer Geraden: $abc$ und $\alpha\beta\gamma$, welche beide Gerade selbst durch $s$ gehen; diese drei Punktenpaare sind entweder alle drei reell oder alle drei imaginär. Die sechs Mittelpunkte der drei konjugirten Kegelschnittbüschel bilden ein vollständiges Vierseit und es giebt eine Kegelschnittschaar, welche dem letzteren einbeschrieben ist; von den beiden möglichen Kegelschnitten dieser Schaar, welche durch $s$ gehen, sind die beiden Tangenten in $s$ die vorigen Geraden $abc$ und $\alpha\beta\gamma$ und daher die Asymptoten desjenigen Strahlsystems, welches von den Tangentenpaaren aus $s$ an die Kegelschnittschaar konstituirt wird. Der Polarkegelschnitt von $s$ in Bezug auf diese Kegelschnittschaar berührt die Geraden $abc$ und $\alpha\beta\gamma$ und ist ausserdem dem Diagonaldreieck $opr$ des vollständigen Vierseits einbeschrieben; die Punkte $\sigma\sigma'\sigma''$ sind die Pole der drei Strahlen $so$, $sr$, $sp$ in Bezug auf den genannten Polarkegelschnitt und die Gerade $\mathfrak{L}$ ist also die Polare von $s$ in Bezug auf denselben.

Das Letztere folgt unmittelbar daraus, dass $a\alpha b\beta$ ein diesem Polarkegelschnitt umschriebenes Viereck ist, dessen Diagonaldreieck $s\sigma'' p$ ein Tripel in Bezug auf denselben bildet.

Wir müssen jetzt dieselben Resultate auch für den andern möglichen Fall nachweisen, wenn nämlich die beiden durch den angenommenen Punkt $s$ gehenden Strahlen, welche die Träger der drei Punktsysteme $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$ gleichzeitig in drei Paaren konjugirter Punkte treffen, nicht reell sind. Hierzu konstruiren wir uns den dem $s$ konjugirten Punkt in Bezug auf das Büschel [𝔄], dessen Mittelpunkte $g' h' g'' h''$ sind und dessen gemeinschaftliches Tripel $gho$ ist; wenn wir also $sg$, $sh$, $so$ ziehen und die vierten harmonischen, diesen zugeordneten Strahlen bestimmen, indem jedes Seitenpaar des vollständigen Vierecks $g' h' g'' h''$ das andere Paar zugeordneter Strahlen ist, so sind diese drei vierten Harmonischen die Polaren von $s$ in Bezug auf die drei Linienpaare des Büschels [𝔄] und schneiden sich in dem zu $s$ konjugirten Punkte $\sigma$; also sind die vier Strahlen $g\,(g' h' s \sigma)$ vier harmonische Strahlen, ebenso auch $h\,(g' h' s \sigma)$ und in gleicher Weise $g\,(g'' h'' s \sigma)$ und $h\,(g'' h'' s \sigma)$; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g\,(g' h' s \sigma) = h\,(g' h' s \sigma)$$

folgt aber, dass die sechs Punkte $g h g' h' s \sigma$ auf einem Kegelschnitt liegen und aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g\,(g'' h'' s \sigma) = h\,(g'' h'' s \sigma),$$

dass die sechs Punkte $ghg''h''s\sigma$ auf einem Kegelschnitt liegen; diese beiden Kegelschnitte $B$ und $C$, welche den Büscheln [𝔅] und [ℭ] angehören und durch $s$ gehen, schneiden sich also in dem vierten Punkte $\sigma$, welcher der konjugirte ist zu $s$ in Bezug auf das Büschel [𝔄] und also in der Tangente eines durch die fünf Punkte $g' h' g'' h'' s$ gelegten Kegelschnitts $A$ an dem Punkte $s$ sich befindet. Die in gleicher Weise für die Kegelschnitte $A$ und $B$, $A$ und $C$ ersichtliche Eigenschaft bestätigt also den ersten Theil des obigen Satzes. Da nun die fünf Punkte $g' h' g'' h'' s$ auf einem Kegelschnitte $A$ liegen, dessen Tangente $s\sigma$ ist, so werden, wenn wir die Strahlen $sg'$, $sh'$ als ein Paar konjugirter Strahlen, $sg''$, $sh''$ als ein zweites Paar eines neuen Strahlsystems auffassen, deren Durchbohrungssehnen $g' h'$ und $g'' h''$ mit $A$ sich in $o$ treffen, $so$ und $s\sigma$ ein drittes Paar dieses Strahl-

systems ($s$) sein (§ 31). Dieses Strahlsystem ($s$), welches durch die beiden Strahlenpaare $sg'$, $sh'$ und $sg''$, $sh''$ bestimmt wird, hat nun auch $sg$ und $sh$ zu einem Paar konjugirter Strahlen und ist dasjenige, welches von den Tangentenpaaren aus $s$ an die Kegelschnittschaar gebildet wird, welche dem vollständigen Vierseit $ghg'h'g''h''$ einbeschrieben ist, oder (nach § 48) dasjenige Strahlsystem, welches dem Polarkegelschnitt des Punktes $s$ in Bezug auf diese Kegelschnittschaar zugehört; folglich sind $so$ und $s\sigma$ ein Paar konjugirte Strahlen für den genannten Polarkegelschnitt; anderseits berührt dieser Polarkegelschnitt die Seiten des Diagonaldreiecks $orp$ und $o\sigma$ ist, wie wir gesehen haben, der vierte harmonische Strahl zu $os$, $or$, $op$, dem $os$ zugeordnet, also sind auch $os$ und $o\sigma$ konjugirte Strahlen in Bezug auf den Polarkegelschnitt und daher $\sigma$ der Pol von $so$ in Bezug auf denselben; in gleicher Weise folgt, weil der Polarkegelschnitt von $s$ in Bezug auf die dem vollständigen Vierseit einbeschriebene Schaar unverändert bleibt, dass der Pol von $rs$ der Punkt $\sigma'$ und von $ps$ der Punkt $\sigma''$ ist, und da die drei Strahlen $os$, $rs$, $ps$ durch einen Punkt $s$ gehen, so müssen die drei Pole $\sigma\sigma'\sigma''$ in einer Geraden $\mathfrak{L}$ liegen, welche die Polare von $s$ ist. Hierdurch ist der zweite Theil des obigen Satzes erwiesen und damit zugleich ein elementarer Satz gewonnen:

Wenn man die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits $gh$, $g'h'$, $g''h''$ mit einem beliebigen Punkte $s$ der Ebene verbindet und zu jedem dieser Strahlen den vierten harmonischen Strahl konstruirt, z. B. zu $gs$ und den beiden sich in $g$ kreuzenden Seiten des Vierseits den vierten harmonischen, welcher $gs$ zugeordnet ist, ebenso zu $hs$ u. s. f., so schneiden sich solche Strahlen, die durch je zwei Gegenecken, z. B. $g$ und $h$ gehen, in einem Punkte $\sigma$, die vierten harmonischen Strahlen durch $g'$ und $h'$ in $\sigma'$ und die durch $g''$ und $h''$ in $\sigma''$ der Art, dass die drei Schnittpunkte $\sigma\sigma'\sigma''$ in einer Geraden liegen.

Ein besonderer Fall des polaren Nebensatzes ist sehr bekannt, nämlich: „Die Verbindungslinien der Mitten der drei Seitenpaare eines vollständigen Vierecks laufen durch einen Punkt“ (Schwerpunkt).

Die drei konjugirten Kegelschnittbüschel [$\mathfrak{A}$] [$\mathfrak{B}$] [$\mathfrak{C}$] haben

weitere bemerkenswerthe Eigenschaften: Legt man aus irgend einem Punkte $a$ der Geraden $\mathfrak{A}$ das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt $B$ des Büschels [$\mathfrak{B}$], dessen Mittelpunkte $g h g'' h''$ sind, und mögen die Berührungspunkte $t t'$ heissen, so geht die Polare $t t'$ von $a$ in Bezug auf $B$ durch den konjugirten Punkt $\alpha$ des Punktsystems ($x$, $\mathfrak{x}$), weil $\alpha$ der vierte harmonische, dem $a$ zugeordnete Punkt zu $a g h$ ist. Die vier Punkte $g h t t'$ auf dem Kegelschnitt $B$ besitzen aber die Eigenschaft, dass sie mit irgend einem andern Punkte dieses Kegelschnitts verbunden vier harmonische Strahlen liefern (§ 27), folglich sind ebensowohl $g'' (g h t t')$ als auch $h'' (g h t t')$ je vier harmonische Strahlen und aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g'' (g h t t') = h'' (h g t t') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\S\ 8)$$

ergiebt sich, dass die Schnittpunkte entsprechender Strahlen, also die vier Punkte $g' h' t t'$ mit $g'' h''$ auf einem Kegelschnitt $A$ liegen und dass die Punkte $g' h' t t'$ vier harmonische Punkte dieses Kegelschnitts $A$ sind (§ 27), folglich $t t'$ durch den Pol von $g' h'$ gehen muss; der Pol von $g' h'$ in Bezug auf den Kegelschnitt $A$ muss aber auf $g h$ liegen, weil $o g h$ ein Tripel in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist, also ist der Schnittpunkt von $t t'$ mit $g h$, d. h. der Punkt $\alpha$ der Pol von $g' h'$ oder $\alpha g'$ und $\alpha' h'$ Tangenten des Kegelschnitts $A$ in den Punkten $g'$, $h'$. Da ferner $o g h$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $g' h' g'' h''$ ist und die Tangenten des dem letzteren umschriebenen Kegelschnitts $A$ in $g' h'$ sich auf der Diagonale $g h$ im Punkte $\alpha$ treffen, so müssen auch die Tangenten des Kegelschnitts $A$ in $g'' h''$ sich auf der Diagonale $g h$ schneiden in dem zu $g h \alpha$ harmonisch liegenden, dem $\alpha$ zugeordneten Punkte, also in $a$ (§ 27). Der Kegelschnitt $A$ hat also $a g''$ und $a h''$ zu Tangenten in den Punkten $g''$ und $h''$. Fassen wir das Gefundene zusammen, so erhalten wir: Legt man aus irgend einem Punkte $a$ der Geraden $\mathfrak{A}$ das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt des Büschels [$\mathfrak{B}$], so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $A$, welcher durch die vier Punkte $g' h' g'' h''$ geht und $a g''$, $a h''$ zu Tangenten hat; verändern wir daher den Kegelschnitt $B$ des Büschels [$\mathfrak{B}$], halten aber den Punkt $a$ fest, so verändern sich die Berührungspunkte $t t'$, während der Kegelschnitt $A$, auf welchem sie liegen müssen, derselbe bleibt, also:

Legt man aus irgend einem Punkte $a$ der Geraden

𝔄 an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels [𝔅] die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt $A$ des Büschels [𝔄], welcher $ag''$ $ah''$ zu Tangenten hat. Weil dieser Kegelschnitt $A$ aber auch $\alpha g'$ und $\alpha h'$ zu Tangenten hat, so folgt: Legt man aus irgend einem Punkte $\alpha$ der Geraden 𝔄 an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels [ℭ] die Tangentenpaare, so ist der Ort ihrer Berührungspunkte ein bestimmter Kegelschnitt $A$ des Büschels [𝔄], welcher $\alpha g'$, $\alpha h'$ zu Tangenten hat, und zwar entsteht, wenn $a$ und $\alpha$ harmonisch liegen zu $g$, $h$, für den Punkt $a$ und das Büschel [𝔅] derselbe Kegelschnitt $A$, wie für den Punkt $\alpha$ und das Büschel [ℭ], ebenso auch für den Punkt $a$ und das Büschel [ℭ] derselbe Kegelschnitt **A**, wie für den Punkt $\alpha$ und das Büschel [𝔅]; die Kegelschnitte $A$ und **A** sind aber verschieden; sie gehören beide dem Büschel [𝔄] an, aber der erstere hat $ag''$, $ah''$ zu Tangenten, der andere $ag'$, $ah'$ und zugleich der erstere $\alpha g'$, $\alpha h'$, der andere $\alpha g''$, $\alpha h''$.

Verändern wir jetzt den Punkt $a$ (und $\alpha$) auf 𝔄, so durchläuft der Kegelschnitt $A$ (und **A**) das ganze Büschel [𝔄] und die Kegelschnitte $A$ und **A** erfüllen dasselbe auf doppelte Weise. Wir sehen hieraus, wie das Büschel [𝔄] aus dem konjugirten Büschel [𝔅] oder [ℭ] hervorgeht; in gleicher Weise entsteht das Büschel [𝔅] auf doppelte Art aus den Büscheln [𝔄] und [ℭ] und endlich das Büschel [ℭ] aus den Büscheln [𝔄] und [𝔅]. Geht man anderseits von einem beliebigen Kegelschnittbüschel mit vier Mittelpunkten aus, so kann man die beiden andern zu ihm konjugirten Büschel dadurch ableiten, dass man ein Linienpaar des ersten Kegelschnittbüschels auffasst; nimmt man in der einen gemeinschaftlichen Sekante dieses Linienpaars einen Punkt $a$ an und legt aus $a$ die Tangentenpaare an sämmtliche Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher mit der Veränderung von $a$ das eine konjugirte Büschel erzeugt; in gleicher Art liefert die andere gemeinschaftliche Sekante das dritte konjugirte Büschel. Kommen in dem anfänglich angenommenen Büschel drei reelle Linienpaare vor, so giebt es drei Mal solche je drei konjugirte Büschel, im Ganzen also sieben Kegelschnittbüschel, da das ursprüngliche drei Mal zählt.

Die beiden oben betrachteten Kegelschnitte $A$ und $\mathbf{A}$ stehen mit den beiden Punkten $a$ und $\alpha$, welchen sie entsprechen, in einem eigenthümlichen Zusammenhange: Da der Ort der Berührungspunkte aller an die Kegelschnitte des Büschels [𝔅] aus dem Punkte $a$ gelegten Tangentenpaare der Kegelschnitt $A$ ist, so wird es, wenn irgend eine durch $a$ gelegte Transversale den Kegelschnitt $A$ in den Punkten $t$ und $\tau$ trifft, zwei Kegelschnitte des Büschels [𝔅] geben, welche die Transversale in den Punkten $t$ und $\tau$ berühren und es werden daher $t$ und $\tau$ die Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems sein, welches von den Kegelschnitten des Büschels [𝔅] auf der Transversale ausgeschnitten wird. Betrachten wir nun den Kegelschnitt $\mathbf{A}$, der durch $g'h'g''h''$ geht und dessen Tangenten $ag'$, $ah'$ sind; möge die vorige durch $a$ gezogene Transversale ihn in $r$ und $\varrho$ treffen, so sind $g'h'r\varrho$ vier harmonisch gelegene Punkte dieses Kegelschnitts (§ 27), folglich

$$g''(g'h'r\varrho) \quad \text{und} \quad h''(g'h'r\varrho)$$

je vier harmonische Strahlen; aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$g''(g'h'r\varrho) = h''(h'g'r\varrho)$$

folgt nun, dass die sechs Punkte $ghr\varrho g''h''$ auf einem Kegelschnitte liegen, welcher natürlich dem Büschel [𝔅] angehört; es sind daher $r$, $\varrho$ ein Paar konjugirter Punkte jenes Punktsystems auf der Transversale, welches $t$ und $\tau$ zu Asymptotenpunkten hat; $r$, $\varrho$ liegen also zu $t$, $\tau$ harmonisch und diese vier Punkte sind in der Art paarweise zugeordnet, dass je zwei Schnittpunkte mit einem der Kegelschnitte $A$ und $\mathbf{A}$ zugeordnete Punkte sind; jede durch den Punkt $a$ gezogene Transversale trifft daher die beiden Kegelschnitte $A$ und $\mathbf{A}$ in vier harmonisch gelegenen Punkten, von denen je zwei Schnittpunkte mit demselben Kegelschnitt zugeordnete sind; dasselbe gilt offenbar für den Punkt $\alpha$. Das Verhalten der beiden Kegelschnitte $A$ und $\mathbf{A}$ zu den Punkten $a$ und $\alpha$ ist daher genau dasselbe, wie es in der Kreistheorie bei zwei sich rechtwinklig schneidenden Kreisen und ihren Mittelpunkten sich darbietet; hat man zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise, so ist aus den Elementen bekannt, dass jede durch einen der beiden Kreismittelpunkte gehende Transversale die Kreise in vier harmonisch gelegenen Punkten trifft, von denen die Schnittpunkte mit je einem Kreise zugeordnete sind. Die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft besteht mithin in folgendem Satze:

Legt man aus irgend einem Punkte $a$ einer gemeinschaftlichen Sekante eines Kegelschnittbüschels die Tangentenpaare an dasselbe, so liegen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $A$; legt man aus dem konjugirten Punkte $\alpha$ zu $a$ in Bezug auf das Büschel ebenfalls die Tangentenpaare an die Kegelschnitte des Büschels, so liegen die Berührungspunkte auf einem andern Kegelschnitt **A**; die beiden Kegelschnitte $A$ und **A** haben zu den Punkten $a$ und $\alpha$ die eigenthümliche Lage, dass jede durch $a$ oder $\alpha$ gehende Transversale von den beiden Kegelschnitten in vier harmonischen Punkten getroffen wird, von denen je zwei Schnittpunkte desselben Kegelschnitts zugeordnete sind.

Weitere Eigenschaften, welche konjugirte Kegelschnittbüschel darbieten (wenn z. B. aus einem beliebigen Punkte der Ebene die Tangentenpaare an die Kegelschnitte der Büschel gelegt werden, wobei die Berührungspunkte auf einer Kurve dritten Grades liegen und diese drei Kurven dritten Grades in Bezug auf die drei konjugirten Kegelschnittbüschel in eigenthümliche Verbindung treten), müssen wir hier übergehen, um nicht die Grenzen, welche diesem Buche gesteckt sind, zu überschreiten. Es bleibt noch übrig, den im Eingange dieses Paragraphen berührten besonderen Fall von drei konjugirten Kegelschnittbüscheln, welcher schon in den Elementen auftritt, mit dem hier behandelten allgemeinen Falle in Verbindung zu setzen. Nehmen wir nämlich an, dass von den drei erzeugenden Punktsystemen $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ und $(z, \zeta)$ eines den besonderen Charakter hat, dass sein Träger die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ ist und dasselbe aus allen Paaren unendlich-entfernter Punkte besteht, welche in je zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, also dasjenige Punktsystem auf $\mathfrak{G}_\infty$, dessen Asymptotenpunkte die beiden imaginären Kreispunkte auf der unendlich-entfernten Geraden sind (§ 35) und ist $(x, \xi)$ dieses besondere Punktsystem, dessen Träger $\mathfrak{A}$ also $\mathfrak{G}_\infty$ ist, dagegen $(y, \eta)$ ein beliebiges, etwa hyperbolisches Punktsystem mit den Asymptotenpunkten $g' h'$ auf dem Träger $\mathfrak{B}$, so wird der Träger $\mathfrak{C}$ des dritten Punktsystems diejenige Gerade sein, welche in dem Mittelpunkte $o$ des Punktsystems $(y, \eta)$, der dem unendlich-entfernten konjugirt ist, d. h. in der Mitte $o$ zwischen $g' h'$ senk-

recht steht auf 𝔅, und das dritte Punktsystem $(z, \zeta)$ auf 𝔈, welches nothwendig ein elliptisches sein muss (§ 41), wird erhalten, indem wir durch $y$ einen beliebigen Strahl $yz$ und durch $\eta$ einen darauf senkrechten $\eta\zeta$ ziehen, welche 𝔈 in $z$ und $\zeta$ treffen; $o$ wird ebenfalls der Mittelpunkt dieses Punktsystems sein und $z\zeta$ liegen also auf entgegengesetzten Seiten von $o$ so, dass

$$oy \,.\, o\eta + oz \,.\, o\zeta = 0,$$

ist, also die Potenzen der beiden Punktsysteme auf 𝔅 und 𝔈 gleich aber entgegengesetzt werden. Die von solchen drei Punktsystemen erzeugten konjugirten Kegelschnittbüschel nehmen einen besonders einfachen Charakter an, indem zwei von ihnen **konjugirte Kreisschaaren** werden und das dritte ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, welches in den Elementen unerwähnt zu bleiben pflegt. In der That das Büschel [𝔈] wird eine gewöhnliche Kreisschaar, welche durch die beiden reellen gemeinschaftlichen Punkte $g'h'$ geht, weil die imaginären Kreispunkte auf $\mathfrak{G}_\infty$ allen Kegelschnitten dieses Büschels gemeinschaftlich sind, also alle Kreise werden; diese Kreise haben ihre Mittelpunkte auf 𝔈 und treffen dasselbe in je zwei konjugirten Punkten seines Punktsystems. Das Büschel [𝔅] wird ebenfalls eine Kreisschaar mit der ideellen gemeinschaftlichen Sekante 𝔈; sie hat nämlich ihre Mittelpunkte auf 𝔅 und jeder Kreis derselben trifft in je zwei konjugirten Punkten $y, \eta$ des gegebenen Punktsystems; die Kreise dieser Schaar haben also die Strecke zwischen je zwei konjugirten Punkten $y\eta$ zu Durchmessern. Die Asymptotenpunkte $g'h'$ repräsentiren insbesondere die Nullkreise dieser Schaar. Die beiden genannten Kreisschaaren heissen bekanntlich konjugirte Kreisschaaren, indem jeder Kreis der einen jeden der andern rechtwinklig schneidet. Das dritte Büschel [𝔄] besteht endlich aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, welche die reellen Punkte $g'h'$ zu Büschelmittelpunkten haben und das Punktsystem $(z, \zeta)$ auf dem Träger 𝔈 zu demjenigen, welches allen Kegelschnitten dieses Büschels zugehört; dadurch ist es schon bestimmt und besteht offenbar aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, da es den in § 47 aufgestellten Bedingungen dafür genügt, dass ein Büschel mit zwei reellen und zwei imaginären Mittelpunkten ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln sei; je zwei unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen sind also die unendlich-entfernten Punkte

einer Hyperbel dieses Büschels; der Punkt $o$ ist der Mittelpunkt aller dieser Hyperbeln; der Mittelpunktskreis reducirt sich daher auf einen Punkt $o$ und je zwei durch $o$ gehende rechtwinklige Strahlen sind die Asymptoten einer Hyperbel dieses Büschels; da die Hyperbeln ausserdem durch die reellen Punkte $g'h'$ gehen, so sind sie leicht zu konstruiren (§ 26). (Vergl. § 60.)

Wir erwähnen noch im Allgemeinen, dass bei drei konjugirten Kegelschnittbüscheln hinsichtlich ihrer besonderen Beschaffenheit überhaupt nur zwei Fälle eintreten können: entweder 1) hat jedes der drei konjugirten Büschel vier reelle Mittelpunkte, was der von uns behandelte Fall ist, oder 2) eines der drei konjugirten Büschel hat zwei reelle und zwei imaginäre Mittelpunkte, das andere ebenfalls und das dritte vier imaginäre Mittelpunkte, wovon die beiden Kreisschaaren und das Büschel gleichseitiger Hyperbeln ein besonderer Fall ist; denn nach § 41 hängen die drei erzeugenden Punktsysteme $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$ immer so mit einander zusammen, dass entweder alle drei hyperbolisch oder eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind.

Der in diesem Paragraphen durchgeführten Betrachtung steht die gleichlaufende polare Nebenbetrachtung zur Seite, welche von zwei beliebig angenommenen Strahlsystemen ausgeht (wie in § 48), von denen ein drittes in bestimmter Weise abhängt; diese drei Strahlsysteme bestimmen zu je zweien in Verbindung gebracht drei konjugirte Kegelschnittschaaren, deren Eigenschaften in ganz gleicher Weise, wie die obigen der konjugirten Büschel, abgeleitet werden können. Da diese Uebertragung ohne alle Schwierigkeit ausgeführt werden kann, so übergehen wir dieselbe, sowie die Wiederholung der gewonnenen Resultate, welche mit denselben Worten ausgesprochen werden können unter der bekannten Veränderung in der Bedeutung der angewendeten Bezeichnung.

## § 51. Besondere Fälle von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren: Kegelschnitte, die sich doppelt berühren, confokale Kegelschnitte.

Kegelschnittbüschel und Schaaren bieten eine Anzahl von besonderen Fällen dar, welche hervorgehen aus der besonderen Beschaffenheit und Lage der sie erzeugenden Gebilde oder bestimmenden Elemente und welche von grösserem oder geringerem

Interesse sind. Wir haben bereits als besondere Schaar die einem Dreiseit einbeschriebene Parabelschaar gefunden, welche die unendlich-entfernte Gerade zur vierten gemeinschaftlichen Tangente hat, ferner das Büschel gleichseitiger Hyperbeln, dessen vier Mittelpunkte in eigenthümlicher Verbindung stehen, endlich die Kreisschaar (Kreisbüschel), welche aus den Elementen bekannt ist, aber auch aus der allgemeinen Erzeugung durch zwei Punktsysteme hervorgeht, wenn das eine derselben dasjenige ist, welches auf der unendlich-entfernten Geraden durch je zwei in rechtwinkligen Richtungen liegende Punkte bestimmt wird und dessen Asymptotenpunkte die imaginären Kreispunkte sind. In diesem Paragraphen sollen noch einige besondere Fälle von Interesse untersucht werden.

Wenn von den beiden erzeugenden Punktsystemen $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, welche sämmtlichen Kegelschnitten des Büschels gleichzeitig zugehören, eines parabolisch ist, d. h. seine beiden Asymptotenpunkte zusammenfallen (es seien $g$ und $h$ auf $\mathfrak{A}$), so hat dieser Punkt zu seinem konjugirten jeden beliebigen andern des Trägers und jeder beliebige Punkt des Trägers wiederum $g$ zu seinem konjugirten (§ 16); die Gerade $\mathfrak{C}$, welche die konjugirten Punkte des Schnittpunktes $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in beiden Punktsystemen verbindet, geht also durch $g$ und das dritte Punktsystem $(z, \zeta)$ auf $\mathfrak{C}$ wird folglich auch parabolisch und hat ebenfalls seine zusammenfallenden Asymptotenpunkte in $g$. Alle Kegelschnitte des Büschels berühren daher die Gerade $\mathfrak{A}$ in dem Punkte $g$ und gehen ausserdem durch die reellen oder imaginären Asymptotenpunkte des andern gegebenen Punktsystems $(y, \eta)$. Das gemeinschaftliche Tripel des Büschels reducirt sich in diesem Falle auf den Schnittpunkt $p$ der Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und den doppelt zu zählenden Punkt $g$, in welchem sich sämmtliche Kegelschnitte des Büschels berühren; von den drei unter den Kegelschnitten des Büschels vorkommenden Linienpaaren ist das eine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; die beiden andern coincidiren und gehen von $g$ nach den beiden Asymptotenpunkten des Punktsystems auf $\mathfrak{B}$. Der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels geht durch den Schnittpunkt $p$ der beiden Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, durch den Mittelpunkt $m_b$ des Punktsystems auf $\mathfrak{B}$, durch den Punkt $g$, in welchem er die Gerade $\mathfrak{C}$ zur Tangente hat und, falls das Punktsystem auf $\mathfrak{B}$ hyperbolisch ist und zu Asymptotenpunkten $g'h'$ hat, auch durch die Mitten

der beiden Strecken $gg'$ und $gh'$; wenn es dagegen elliptisch ist, so ist er durch die vorigen Bedingungen noch nicht vollständig bestimmt; erinnern wir uns, dass die Mitte von $gm_b$ der Mittelpunkt des gesuchten Kegelschnitts sein muss, so wird also die Tangente in $m_b$ parallel laufen mit $\mathfrak{C}$ und hierdurch ist der Mittelpunktskegelschnitt unzweideutig bestimmt; zugleich erkennen wir, dass er Hyperbel sein muss, das Büschel also aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln besteht, welche durch zwei Parabeln von einander geschieden werden.

Aehnlich verhält es sich mit einer Kegelschnittschaar, bei welcher eines der beiden erzeugenden Strahlsysteme parabolisch angenommen wird und deren Kegelschnitte ein und dieselbe Gerade in einem festen Punkte berühren, während sie ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben; wir unterlassen hier die nähere Ausführung, weil sowohl jenes specielle Büschel, als auch diese besondere Schaar von untergeordneterem Interesse ist, als eine noch speciellere, zu der wir gelangen, wenn wir beide erzeugenden Punktsysteme oder beide erzeugenden Strahlsysteme parabolisch annehmen; hier tritt nämlich in beiden Fällen dasselbe Gebilde auf, welches gleichzeitig als Kegelschnitt-Büschel und -Schaar angesehen werden muss und daher auch die Eigenschaften beider Gebilde mit einigen Modifikationen in sich vereinigt. Sind nämlich zwei parabolische Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gegeben und die zusammenfallenden Asymptotenpunkte des ersten in $g$, die des zweiten in $g'$ vereinigt, so besteht das Kegelschnittbüschel aus sämmtlichen Kegelschnitten, welche in $g$ und $g'$ dieselben Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben, also sich selbst in diesen beiden Punkten (doppelt) berühren. Wir können gleichzeitig die Punkte $g$ und $g'$ als Mittelpunkte zweier parabolischen Strahlsysteme auffassen, deren zusammenfallende Asymptoten beziehlich die Strahlen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind; die Kegelschnitte der durch diese beiden Strahlsysteme erzeugten Schaar berühren sämmtlich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beziehlich in den Punkten $g$ und $g'$ und werden daher mit den Kegelschnitten jenes Büschels identisch. In dieser Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte kommt sowohl das Punktenpaar $gg'$ vor, dessen Verbindungslinie doppelt gezählt als specieller Kegelschnitt angesehen werden muss, wie auch das Linienpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, dessen Schnittpunkt $p$ sei. Aus den bekannten

Eigenschaften des Büschels und der Schaar folgt hier insbesondere: **Jede Gerade $\mathfrak{L}$ in der Ebene eines Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte wird in einem Punktsystem geschnitten von den Kegelschnitten und die Tangentenpaare aus jedem Punkte $P$ an dieselben bilden ein Strahlsystem; das Punktsystem ist stets hyperbolisch und hat einen Asymptotenpunkt auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne; der andere Asymptotenpunkt ist der vierte harmonische dem Schnittpunkt mit der Berührungssehne zugeordnete, während die Schnittpunkte mit den beiden gemeinschaftlichen Tangenten das andere Paar zugeordneter Punkte sind; es giebt daher nur einen einzigen Kegelschnitt dieser Schaar, welcher die Transversale $\mathfrak{L}$ berührt und zwar in dem eben konstruirten vierten harmonischen Punkte; ebenso ist das Strahlsystem in dem Punkte $P$ immer hyperbolisch und $Pp$ eine Asymptote desselben, $Pg$ und $Pg'$ ein Paar konjugirte Strahlen, so dass der vierte harmonische zu $Pp$ zugeordnete Strahl $Pt$ die Tangente an dem einzigen Kegelschnitte dieses Büschels ist, welcher durch $P$ geht; die Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte dieses Büschels liegen auf derjenigen Geraden, welche durch $p$ und die Mitte der Berührungssehne $gg'$ geht.** Diese Gerade ist zugleich der eine Theil des Mittelpunktskegelschnitts, welchen jedes Büschel besitzt und der hier in ein Linienpaar zerfällt; der andere Theil ist die Berührungssehne $gg'$ selbst; denn da diese als ein zusammengefallenes Linienpaar aufzufassen ist, so kann jeder Punkt von ihr als Mittelpunkt angesehen werden. Die Kegelschnitte dieser sich doppelt berührenden Schaar zerfallen im Allgemeinen in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche von einander getrennt werden einmal durch das Punktenpaar $gg'$ und das andere Mal durch die einzig vorkommende Parabel, deren Mittelpunkt der unendlich-entfernte Punkt der vorhin konstruirten Mittelpunktslinie ist. Die sämmtlichen Kegelschnitte dieses Büschels haben ersichtlicher Weise den Punkt $p$ und die Verbindungslinie $gg'$ zum Pol und zur Polare und das Strahlsystem, welches dem ersteren, das Punktsystem, welches der letzteren in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels zugehört, ist für alle dasselbe und beide Systeme liegen perspektivisch. Hiernach lässt sich diese Kegelschnittschaar auch in anderer Weise erzeugen: W e n n e i n P u n k t s y s t e m a u f d e m T r ä g e r $\mathfrak{L}$ u n d e i n m i t j e n e m p e r s p e k t i v i s c h e s S t r a h l s y s t e m, d e s s e n M i t t e l p u n k t $o$ i s t,

gegeben sind, so bilden sämmtliche Kegelschnitte, in Bezug auf welche diese beiden Gebilde die dem Punkte $o$ und der Geraden $\mathfrak{L}$ zugehörigen Systeme sind, eine Schaar von Kegelschnitten, die sich doppelt berühren. Ist das gegebene Punktsystem und also auch das mit ihm perspektivische Strahlsystem hyperbolisch, so berühren sich sämmtliche Kegelschnitte in den beiden Asymptotenpunkten jenes Punktsystems und haben in diesen Punkten die Asymptoten des Strahlsystems zu gemeinschaftlichen Tangenten; sind dagegen beide Systeme elliptisch, so ist die Kegelschnittschaar nichtsdestoweniger vollständig bestimmt und kann reell konstruirt werden; in diesem Falle sagen wir der Analogie wegen: Die Kegelschnitte haben eine imaginäre doppelte Berührung. Die oben angegebenen Eigenschaften behalten ihre Gültigkeit; denn da für alle Kegelschnitte der Schaar $o$ und $\mathfrak{L}$ Pol und Polare sind, so wird, wenn wir irgend einen Punkt $s$ auf der Geraden $\mathfrak{L}$ annehmen und den konjugirten Punkt $\sigma$ zu $s$ in dem gegebenen Punktsysteme mit $o$ verbinden, $o\sigma$ die Polare von $s$ für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar sein; wenn also irgend eine durch $s$ gezogene Gerade in $t$ die Polare $o\sigma$ trifft, so werden $s$ und $t$ harmonisch liegen zu sämmtlichen Schnittpunktpaaren, in welchen die Transversale $st$ von den Kegelschnitten der Schaar getroffen wird, und wenn wir anderseits irgend einen Punkt in der Polare $o\sigma$ annehmen, so werden diese und die Verbindungslinie mit $s$ harmonisch liegen zu allen Tangentenpaaren aus dem angenommenen Punkte an die Kegelschnitte der Schaar; jene Punktenpaare auf der Transversale bilden also ebenso ein Punktsystem, wie diese Tangentenpaare aus dem Punkte ein Strahlsystem, woraus denn das Weitere sich von selbst ergiebt. Die reelle Konstruktion der Kegelschnitte dieser sich doppelt berührenden Schaar für den Fall, dass die beiden Berührungspunkte und also auch die gemeinschaftlichen Tangenten imaginär sind, lässt sich so ausführen: Zieht man irgend einen Strahl durch $o$, welcher die Berührungssehne $\mathfrak{L}$ in $s$ treffen mag und nimmt auf demselben ein Paar harmonisch-zugeordneter Punkte $p$ und $\pi$ zu $o$ und $s$ als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel an, welche nach den Paaren konjugirter Punkte $x$, $\xi$ des auf $\mathfrak{L}$ gegebenen Punktsystems hingehen, so erzeugen dieselben einen Kegelschnitt der Schaar, welcher der Ort des Schnittpunktes $(px, \pi\xi)$ oder $(\pi x, p\xi)$ ist; verändern wir

das Paar $p$ und $\pi$, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte dieser Schaar. Diese Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte entspringt also auch aus der Annahme zweier Punktsysteme, von denen das eine hyperbolisch ist und einen Asymptotenpunkt in dem Träger des andern hat. Einige sehr einfache Fälle solcher Schaaren gehen aus besonderer Annahme von $o$ und $\mathfrak{L}$ hervor: 1) liegt $o$ im Unendlichen, so ist $\mathfrak{L}$ ein Durchmesser sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar und diese sind alle concentrisch, da sie den Mittelpunkt des Punktsystems auf $\mathfrak{L}$ zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte $m$ haben; ist das Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ hyperbolisch, so berühren sich also sämmtliche Kegelschnitte in den Endpunkten eines allen gemeinschaftlichen Durchmessers; ist es elliptisch, so müssen sämmtliche Kegelschnitte Hyperbeln sein, welche $m$ zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und da $mo$ und $\mathfrak{L}$ ein Paar konjugirte Durchmesser aller dieser Hyperbeln sind, so bilden die Asymptoten dieser Hyperbelschaar mit imaginärer doppelter Berührung selbst ein Strahlsystem, welches $\mathfrak{L}$ und $mo$ zu Asymptoten hat; 2) geht $\mathfrak{L}$ in die Unendlichkeit, so ist $o$ gemeinschaftlicher Mittelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte der Schaar und das gegebene Strahlsystem $(o)$ das System der konjugirten Durchmesser; ist dieses also hyperbolisch, so besteht die Schaar aus lauter Hyperbeln, welche denselben Mittelpunkt und dieselben Asymptoten haben, nämlich die Asymptoten des Strahlsystems $(o)$; ist dieses dagegen elliptisch, so besteht die Kegelschnittschaar aus ähnlichen und ähnlich-liegenden concentrischen Ellipsen; ist insbesondere das Strahlsystem $(o)$ ein Kreissystem, so wird die Kegelschnittschaar mit doppelter imaginärer Berührung im Unendlichen eine Schaar concentrischer Kreise. (Poncelet, traité des propriétés projectives des figures pag. 228).

Aus dem Vorstehenden geht u. a. die Lösung der Aufgabe hervor: Durch drei gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, welcher einen gegebenen Kegelschnitt $K$ doppelt berührt.*) Es giebt vier Kegelschnitte, welche diesen Bedingungen genügen, doch scheint es, als ob dieselben nur dann reell vorhanden sind, wenn entweder alle drei gegebenen Punkte $pqr$ innerhalb oder alle drei ausserhalb des gegebenen Kegel-

*) Siehe Steiner: „Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte"; Crelle's Journal Bd. XLV S. 222.

schnitts liegen; zieht man nämlich die drei Verbindungslinien $pq$, $qr$, $rp$, so trifft jede derselben den Kegelschnitt $K$ in zwei andern Punkten, welche als ein zweites Paar konjugirter Punkte eines Punktsystems aufgefasst werden können; liegen nun $pqr$ innerhalb des Kegelschnitts $K$, so werden auf den drei Verbindungslinien $pq$, $qr$, $rp$ durch je zwei dieser Punkte und die beiden Schnittpunkte mit $K$ drei hyperbolische Punktsysteme bestimmt; diese befinden sich genau in derselben Lage, wie die drei zusammengehörigen Punktsysteme $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$ auf den Trägern $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ in § 41; die drei Paar Asymptotenpunkte $gh$, $g'h'$, $g''h''$ liegen daher zu je dreien auf vier geraden Linien: $gg'g''$, $gh'h''$, $hg'h''$, $hh'g''$. Jede dieser vier Geraden trifft nun den Kegelschnitt $K$ in zwei solchen Punkten, in welchen ihn ein durch $pqr$ und diese Punkte selbst gelegter Kegelschnitt doppelt berührt (reell oder imaginär), denn es ist ersichtlich, dass ein Kegelschnitt, welcher durch $p$ gelegt wird und $K$ in den beiden Schnittpunkten einer dieser vier Geraden doppelt berührt, nothwendig durch $q$ und $r$ gehen muss; also hat die vorgelegte Aufgabe im Allgemeinen vier Lösungen, sobald die drei Punktsysteme auf $pq$, $qr$, $rp$ hyperbolisch sind; dies ist aber der Fall, sobald entweder die drei Punkte $pqr$ innerhalb des Kegelschnitts $K$ liegen, oder alle drei ausserhalb; sollte in dem letzteren Falle die Verbindungslinie $pq$ den Kegelschnitt $K$ nicht treffen, so können wir doch leicht die Asymptotenpunkte $gh$ auf ihr bestimmen, indem wir nämlich zwei auf einander liegende Punktsysteme: das erste, welches der Geraden $pq$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K$ zugehört, also elliptisch in diesem Fall, das andere hyperbolisch mit den Asymptotenpunkten $p$ und $q$, auffassen und das gemeinschaftliche Paar konjugirter Punkte (§§ 16 und 31) beider Punktsysteme bestimmen, welches nothwendig reell ist; dies ist das gesuchte Punktenpaar $g$, $h$; sobald also $pqr$ alle drei ausserhalb des Kegelschnitts $K$ liegen, sind ebenfalls die drei Punktsysteme auf $pq$, $qr$, $rp$ hyperbolisch und die Aufgabe hat vier reelle Lösungen. Sobald aber von den drei gegebenen Punkten $pqr$ einer innerhalb und die beiden andern ausserhalb des Kegelschnitts $K$ liegen, oder umgekehrt, ist nur eines von den drei Punktsystemen auf $pq$, $qr$, $rp$ hyperbolisch, die beiden andern elliptisch; von den sechs Ecken des vollständigen Vierseits $gg'g''hh'h''$ ist also nur ein Paar Gegenecken

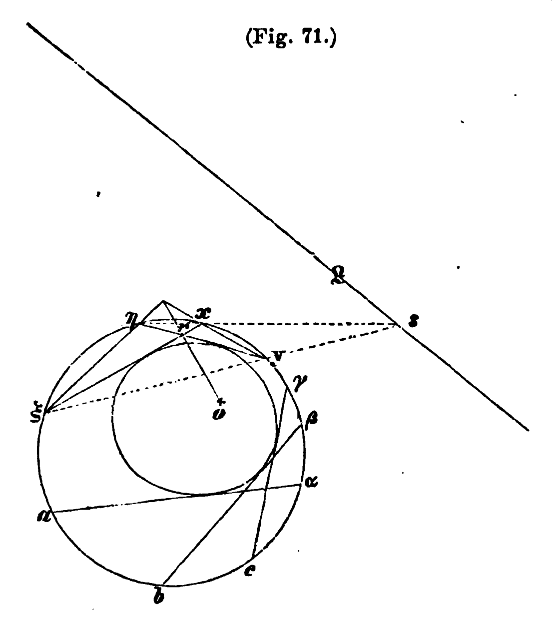
reell und die vier Seiten imaginär; die Aufgabe lässt also keine reelle Lösuug zu.

Fassen wir aus der Schaar Kegelschnitte mit doppelter (reeller oder imaginärer) Berührung nur zwei ins Auge, $K$ und $K'$, so erkennen wir interessante Beziehungen, welche dieselben darbieten. Sind $o$ und $\mathfrak{L}$ das besondere Paar Pol und Polare für beide Kegelschnitte, denen dasselbe Strahl- und Punktsystem in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, und welche wir kurz die Berührungssehne und ihren Pol nennen wollen, so liegt $o$ innerhalb beider Kegelschnitte und $\mathfrak{L}$ trifft keinen von beiden, wenn die doppelte Berührung eine imaginäre ist; dagegen liegt o ausserhalb beider und $\mathfrak{L}$ trifft beide in denselben zwei reellen Punkten, wenn die Kegelschnitte eine reelle doppelte Berührung haben. Nehmen wir nun irgend eine Transversale, welche den Kegelschnitt $K$ in den Punkten $t$ und $t_1$, die Berührungssehne $\mathfrak{L}$ in $s$ treffen möge, so schneiden sich die Tangenten in $t$ und $t_1$ an dem Kegelschnitt $K$ in einem Punkte $r$ und $ro$ ist die Polare von $s$ für beide Kegelschnitte; die vier Strahlen $rt$, $rt_1$, $ro$ und $rs$ sind harmonisch, die ersteren beiden und die letzteren beiden zugeordnet; trifft nun die Tangente in $t$ den andern Kegelschnitt $K'$ in zwei Punkten $x\xi$, die zweite Tangente für $t_1$ aber in dem Punktenpaar $x_1\xi_1$ und wir denken uns die Verbindungslinie $xs$ gezogen, so wird dieselbe den Kegelschnitt $K'$ in demjenigen zweiten Punkte treffen, welcher der vierte harmonische dem $x$ zugeordnete ist, während $s$ und der Schnittpunkt $(xs, ro)$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist. Dieser vierte harmonische Punkt muss aber auf dem vierten harmonischen Strahl zu $rx$, $ro$, $rs$ liegen, und da dieses der Strahl $rt_1$ ist, welcher den Kegelschnitt $K'$ in $x_1$ und $\xi_1$ trifft, so muss $xs$ den Kegelschnitt $K'$ in $x_1$ oder $\xi_1$ treffen; gehe nun $xx_1$ durch $s$, so muss auch ersichtlicherweise $\xi\xi_1$ durch $s$ gehen und es schneiden sich $x\xi_1$ und $x_1\xi$ in einem Punkte $p$ der Geraden $ro$, indem $prs$ ein Tripel in Bezug auf den Kegelschnitt $K'$ sind. Wir haben hieraus folgenden Satz: Hat man zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte und zieht zwei beliebige Tangenten an dem einen, welche den andern in den Punktenpaaren $x$, $\xi$ und $x_1\xi_1$ treffen, so liegt von den drei Schnittpunkten $(xx_1, \xi\xi_1)$ $x\xi_1$, $x_1\xi)$ $(x\xi, x_1\xi_1)$ der eine auf der gemeinschaftlichen Berührungssehne $\mathfrak{L}$ und

die beiden andern auf der Polare des ersteren, welche durch den gemeinschaftlichen Pol $o$ der Berührungssehne geht. Der erste Punkt liegt mit den beiden Berührungspunkten in gerader Linie. Halten wir jetzt eine der beiden Tangenten fest und bewegen die andere am Kegelschnitt $K$ herum, so bleibt der Berührungspunkt $t_1$ und die Punkte $x_1 \xi_1$ fest; $s$ beschreibt eine gerade Punktreihe auf $\mathfrak{L}$ und $x_1 s$, $\xi_1 s$ also projektivische Strahlbüschel, die zugleich mit dem von $t_1 t$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch sind. Wir schliessen daraus folgenden Satz: Bewegt sich bei zwei einander doppelt berührenden Kegelschnitten $K$ und $K'$ eine veränderliche Tangente um den einen $K$ herum und schneidet jedesmal den andern $K'$ in den Punktenpaaren $x$ und $\xi$, so beschreiben $x$ und $\xi$ zwei krumme Punktreihen auf diesem Kegelschnitt, welche mit irgend zwei Peripheriepunkten $B$ und $\mathbf{B}$ auf $K'$ verbunden zwei projektivische Strahlbüschel liefern, und die Berührungspunkte der von dem ersten Kegelschnitt bewegten Tangente bilden gleichfalls eine Punktreihe auf demselben, welche mit einem seiner Peripheriepunkte verbunden ein mit jenen beiden projektivisches Strahlbüschel liefert. Solche zwei krumme Punktreihen $x$ und $\xi$, welche auf demselben Kegelschnitt ausgeschnitten werden durch die Strahlen zweier projektivischer Strahlbüschel, die ihre Mittelpunkte in zwei beliebigen Peripheriepunkten des Kegelschnitts haben und deren entsprechende Strahlen immer zwei entsprechende Punkte $x$, $\xi$ auf dem Kegelschnitt bestimmen, heissen krumm-projektivische Punktreihen und es zeigt sich für dieselben die Umkehrung des vorigen Satzes als allgemein gültig: Hat man zwei krumm-projektivische Punktreihen auf demselbem Kegelschnitt, so umhüllt die Verbindungslinie entsprechender Punkte einen neuen Kegelschnitt, welcher mit dem gegebenen eine doppelte (reelle oder imaginäre) Berührung hat. In der That, da drei Paar willkührlich als entsprechend auf dem Kegelschnitt angenommene Punkte $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$, $c$ und $\gamma$ die beiden krumm-projektivischen Gebilde bestimmen und für jedes vierte Paar entsprechender Punkte $x$, $\xi$ die Strahlbüschel $B(abcx)$ und $\mathbf{B}(\alpha\beta\gamma\xi)$ dasselbe Doppelverhältniss haben, wenn $B$ und $\mathbf{B}$ zwei beliebige

Peripheriepunkte des Kegelschnitts bedeuten, so beschreiben auch $a\xi$ und $\alpha x$ zwei projektivische Strahlbüschel, während wir $a\alpha$ festhalten und $x\xi$ verändern (Fig. 71); diese liegen aber perspek-

(Fig. 71.)



tivisch, weil in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen hineinfallen; der Ort des Schnittpunkts $(a\xi, \alpha x)$ ist also eine gerade Linie; nehmen wir anstatt $a$ und $\alpha$ ein anderes Paar $b\beta$, so erhalten wir dieselbe gerade Linie, weil sowohl $(a\beta, \alpha b)$ als auch $(a\gamma, \alpha c)$ und $(b\gamma, \beta c)$ auf derselben Geraden liegen (wegen des Pascal'schen Sechsecks $a\beta c\alpha b\gamma$); es ist daher, wenn $x\xi$ und $y\eta$ irgend zwei Paar entsprechender Punkte der beiden krummprojektivischen Gebilde bedeuten, der Ort des Schnittpunktes $(x\eta, y\xi)$ eine feste Gerade $\mathfrak{L}$ und die Verbindungslinie der beiden andern Schnittpunkte $(x\xi, y\eta)$ und $(xy, \xi\eta)$ läuft daher durch einen festen Punkt $o$, den Pol der Geraden $\mathfrak{L}$ in Bezug auf den Kegelschnitt. Der Punkt $o$ und die Gerade $\mathfrak{L}$ sind vollständig und eindeutig bestimmt, sobald die Beziehung der beiden krummprojektivischen Gebilde durch drei Paar als entsprechend festgesetzte Punkte des Kegelschnitts fixirt ist; jeder Punkt des Kegelschnitts gehört sowohl der einen, als der andern krummen Punktreihe an, der ihm entsprechende in dem einen und dem andern

Sinne ist aber nicht derselbe zweite Punkt des Kegelschnitts, sondern es sind verschiedene; die Punkte, in welchen $\mathfrak{L}$ den Kegelschnitt trifft, sind zusammenfallende entsprechende Punkte der beiden Gebilde und können reell oder imaginär sein. Bezeichnen wir den Schnittpunkt $(x\eta, y\xi) = s$ auf der Geraden $\mathfrak{L}$ und $(x\xi, y\eta) = r$, so ist $or$ der Pol von $s$ wegen der Eigenschaft des Vierecks im Kegelschnitt; dem Punkte $o$ gehört ein bestimmtes Strahlsystem, seiner Polare $\mathfrak{L}$ ein bestimmtes mit jenem perspektivisches Punktsystem in Bezug auf den Kegelschnitt zu, von jenem sind $os$ und $or$ ein Paar konjugirter Strahlen, von diesem die Schnittpunkte der Linien $rs$ und $ro$ mit $\mathfrak{L}$ ein Paar konjugirter Punkte. Denken wir uns nun einen Kegelschnitt, welchem dasselbe Strahlsystem in $o$ und dasselbe Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ zugehört und welcher ausserdem $x\xi$ berührt, wodurch dieser vollständig und eindeutig bestimmt ist (siehe oben), oder mit andern Worten, welcher den gegebenen Kegelschnitt in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen $\mathfrak{L}$ ihn schneidet, und der ausserdem $x\xi$ zur Tangente hat, so müssen auch für ihn $ro$ und $rs$ konjugirte Strahlen sein, also da $rx$ eine Tangente ist, so muss die andere der vierte harmonische dem $rx$ zugeordnete Strahl sein, d. h. (wegen des Vierecks $x\xi y\eta$) die Gerade $ry$ oder $y\eta$; wir sehen also, dass dieser Kegelschnitt auch $y\eta$ berührt, und verändern wir $y\eta$, so verändern sich zwar $r$ und $s$, aber der oben bestimmte Kegelschnitt, welchem das Strahlsystem in $o$ und das Punktsystem auf $\mathfrak{L}$ zugehört, bleibt derselbe; es berühren also alle Verbindungsstrahlen $y\eta$ entsprechender Punkte der beiden krummprojektivischen Gebilde einen Kegelschnitt, welcher den Träger der beiden Gebilde doppelt berührt w. z. b. w.; jeder Strahl hat zum Berührungspunkte den vierten harmonischen Punkt, der dem Schnittpunkte mit der Berührungssehne $\mathfrak{L}$ zugeordnet ist.

Auf die zahlreichen Folgerungen, welche aus dieser Grundeigenschaft einander doppelt berührender Kegelschnitte hervortreten, gestattet der Raum nicht, näher einzugehen.*) Wir be-

*) Wir verweisen in dieser Beziehung auf die Abhandlung Goepel's: „Ueber Projektivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde". Crelle's Journal Bd. XXXVI S. 317 und die Erweiterung derselben: „Ueber die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde" von Schröter in dem Crelle-Borchardt'schen Journal Bd. LIV S. 31.

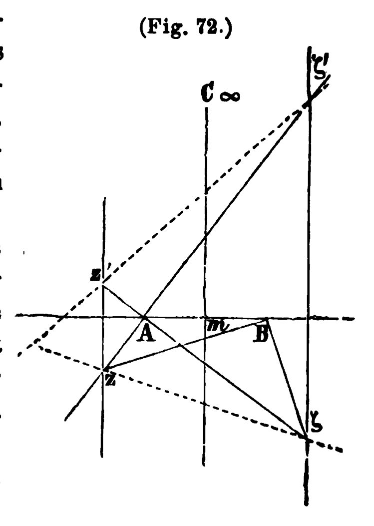
merken nur, dass zwei besondere Fälle dieser allgemeineren Betrachtung in dem Laufe unserer Untersuchungen von besonderer Wichtigkeit geworden sind; erstens nämlich, wenn der Kegelschnitt aus einem Linienpaar besteht, wo dann die beiden krummen Gebilde zwei gewöhnliche gerade projektivische Punktreihen werden und ihr Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, welcher mit dem Linienpaar der beiden Träger eine doppelte Berührung hat (§ 21); zweitens, wenn die beiden krummen Gebilde auf dem Kegelschnitt die besondere involutorische Lage haben, dass einem Punkte des Kegelschnitts als Element beider Gebilde aufgefasst in dem jedesmaligen andern ein und derselbe Punkt entspricht; in diesem Falle laufen alle Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt und die entsprechenden Punkte mit einem Peripheriepunkte des Kegelschnitts verbunden liefern ein Strahlsystem (§ 31); der doppelt berührende Kegelschnitt zerfällt in ein Punktenpaar. In gleicher Weise, wie die Punkte eines Kegelschnitts eine krumme Punktreihe, bilden die Tangenten desselben ein krummes Tangentenbüschel und die Punktreihe, in welcher sie eine beliebige feste Tangente treffen, lässt sich mit der Punktreihe, in welcher sie irgend eine zweite feste Tangente treffen, in projektivische Beziehung setzen der Art, dass die Tangenten des Kegelschnitts einander paarweise entsprechen und man an demselben Kegelschnitt zwei krumm-projektivische Tangentenbüschel erhält; der Ort des Schnittpunktes je zweier entsprechender Tangenten wird wieder ein Kegelschnitt, welcher den Träger der beiden Tangentenbüschel doppelt berührt. Dies tritt in ganz analoger Weise zu Tage, wie das oben bewiesene Resultat und bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Unter den besonderen Fällen von Kegelschnitt-Büscheln und -Schaaren, von denen die eben betrachtete Schaar einander doppelt berührender Kegelschnitte eine hervorragende Bedeutung hat, könnten wir noch diejenigen untersuchen, bei welchen die Kegelschnitte des Büschels in einem gegebenen Punkte eine dreipunktige Berührung haben und a) durch einen vierten gemeinschaftlichen Punkt gehen, b) eine vierte gemeinschaftliche Tangente haben, endlich wenn die Kegelschnitte des Büschels in einem gegebenen Punkte eine vierpunktige Berührung haben. Doch wollen wir die nähere Untersuchung dieser besonderen Fälle dem Leser überlassen und nur noch eine specielle Kegel-

schnittschaar erwähnen, welche häufiger auftritt. Wenn nämlich die beiden erzeugenden Strahlsysteme einer Kegelschnittschaar (§ 48) $(A)$ und $(B)$ zwei Kreissysteme sind, so haben die Kegelschnitte dieser Schaar die Mittelpunkte $A$ und $B$ zu gemeinschaftlichen Brennpunkten, denn es giebt in der Ebene eines Kegelschnitts nur zwei reelle Punkte, für welche die zugehörigen Strahlsysteme in Bezug auf den Kegelschnitt Kreissysteme sind, und dies sind die Brennpunkte des Kegelschnitts (§ 35); also bilden sämmtliche Kegelschnitte, welche $A$ und $B$ zu ihren gemeinschaftlichen Brennpunkten haben, eine besondere Kegelschnittschaar mit vier imaginären Tangenten; die Brennpunkte sind als das einzig reelle Paar Gegenecken dieses imaginären Vierseits anzusehen. Wir nennen diese Kegelschnittschaar eine Schaar confokaler Kegelschnitte und können zur reellen Konstruktion derselben nach den früheren allgemeinen Betrachtungen auf folgende Weise gelangen: Das dritte von den beiden gegebenen Kreissystemen $(A)$ und $(B)$ abhängige Strahlsystem $(C)$ wird nämlich besonderer Art, indem sein Mittelpunkt in die Unendlichkeit geht und derjenige unendlich-entfernte Punkt $C_\infty$ wird, welcher in senkrechter Richtung zu $AB$ liegt. Das Strahlsystem $(C_\infty)$ wird ein hyperbolisch-gleichseitiges, dessen beide Asymptoten die in der Mitte $m$ zwischen $AB$ errichtete Senkrechte und die unendlich-entfernte Gerade $G_\infty$ sind; je zwei konjugirte Strahlen desselben sind zwei solche, die zu $mC_\infty$ parallel laufen und gleich weit von ihr abstehen. Die beiden Asymptoten des Strahlsystems $(C_\infty)$ und die Gerade $AB$ sind das gemeinschaftliche Tripel konjugirter Strahlen für alle Kegelschnitte der Schaar, folglich ist $m$ der Mittelpunkt und die beiden Senkrechten $mC_\infty$ und $AmB$ die Axen für sämmtliche Kegelschnitte, was auch a priori klar ist. Denken wir uns irgend ein Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(C_\infty)$, d. h. zwei von $m$ gleich weit abstehende parallele Gerade, welche senkrecht auf $AB$ stehen, und drehen um $A$ (oder $B$) einen rechten Winkel, dessen Schenkel jene beiden Parallelen in den Punkten $z\mathfrak{z}$ (und $z'\mathfrak{z}'$) durchbohren, so umhüllt die Verbindungslinie $z\mathfrak{z}$ einen Kegelschnitt der Schaar, dessen Tangenten in zwei gegenüberliegenden Scheiteln das angenommene Paar Paralleler ist (Fig. 72). Verändern wir dieses Paar, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte der konfokalen Schaar; diese zerfällt demnach in eine Gruppe Ellipsen und eine

Gruppe Hyperbeln, je nachdem jenes Paar Paralleler ausserhalb der Strecke $AB$ liegt oder zwischen $A$ und $B$ hindurchgeht. Die beiden Gruppen werden von einander getrennt einmal durch das Punktenpaar $AB$, oder deren doppelt gedachte Verbindungslinie, welche als Parabel aufgefasst werden kann, und anderseits durch die doppelt gedachte unendlichentfernte Gerade $G_\infty$, in welche diejenige Parabel, die in der Schaar vorkommen muss, übergeht; die doppelt gedachte Gerade $mC_\infty$ ist zwar auch als ein besonderer Kegelschnitt der Schaar aufzufassen; er steht aber isolirt da in der Hyperbelgruppe. Die Mittelpunktslinie der Schaar wird unbestimmt, was denn auch damit übereinstimmt, dass $m$ der Mittelpunkt sämmtlicher Kegelschnitte der confokalen Schaar ist. Die Polar-Eigenschaften dieser besonderen Kegelschnittschaar zeigen einige Eigenthümlichkeiten, welche sich sowohl aus der allgemeinen Betrachtung (§ 48), als auch aus den Fokaleigenschaften des Kegelschnitts (§ 36) ergeben. Die Winkel zwischen dem Tangentenpaar aus einem Punkte $P$ an einen Kegelschnitt der Schaar haben nämlich dieselben beiden zu einander rechtwinkligen Halbirungsstrahlen, wie die Winkel zwischen den Strahlen $PA$ und $PB$; folglich bilden sämmtliche Tangentenpaare aus $P$ an die Kegelschnitte der konfokalen Schaar ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem, dessen Asymptoten die beiden zu einander senkrechten Halbirungsstrahlen der Winkel zwischen dem Strahlenpaar $PA$, $PB$ sind. Es giebt also durch den beliebig angenommenen Punkt $P$ immer zwei reelle Kegelschnitte der Schaar, von denen einer Ellipse, der andere Hyperbel ist; sie schneiden sich rechtwinklig in diesem Punkte; wir erkennen hieraus, dass in der konfokalen Kegelschnittschaar weder zwei Ellipsen, noch zwei Hyperbeln einen reellen gemeinschaftlichen Punkt haben können, dass aber jede Ellipse jede Hyperbel in vier reellen (zu $m$ symmetrisch liegenden) Punkten trifft und dass sie sich überall rechtwinklig durchschneiden.

(Fig. 72.)



Dies lässt sich auch so aussprechen: Je zwei konjugirte Gerade in Bezug auf die Schaar confokaler Kegelschnitte stehen auf einander senkrecht. Ermitteln wir von irgend einem Punkte $P$ den Polarkegelschnitt in Bezug auf die Schaar, so erkennen wir, dass derselbe eine Parabel sein muss, weil er allemal dem gemeinschaftlichen Tripel konjugirter Strahlen für die Schaar eingeschrieben ist und dasselbe hier aus den drei Geraden $AB$, $mC_\infty$ und $\mathfrak{G}_\infty$ besteht; ein Kegelschnitt, der $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente hat, ist aber Parabel (§ 26). Diese Parabel hat die Verbindungslinie $Pm$ zur Leitlinie, weil die durch $m$ gehenden Axen jedes Kegelschnitts der Schaar und die durch $P$ gehenden Halbirungsstrahlen der Winkel zwischen $PA$ und $PB$ zwei Paar zu einander rechtwinklige Tangenten dieser Parabel sind; der Brennpunkt derselben findet sich also auch leicht, indem man von diesem der Parabel umschriebenen vollständigen Vierseit denjenigen Diagonalpunkt aufsucht, welcher nicht in der Diagonale $mP$ liegt. Die beiden konjugirten Kegelschnittschaaren (§ 50), welche zu der confokalen Kegelschnittschaar gehören und durch die drei Strahlsysteme $(A)$ $(B)$ $(C_\infty)$ erzeugt werden, bestehen, wie leicht zu sehen ist, aus Parabeln, weil $\mathfrak{G}_\infty$ eine Asymptote von $(C_\infty)$ ist, und zwar wird die eine Schaar gebildet von sämmtlichen Parabeln, welche $A$ zum Brennpunkt und jede durch $B$ gehende Gerade zur Leitlinie haben, die andere Schaar von sämmtlichen Parabeln, welche $B$ zum Brennpunkt und jede durch $A$ gehende Gerade zur Leitlinie haben; diese Parabeln berühren gemeinschaftlich die in der Mitte $m$ auf $AB$ senkrecht stehende zweite Asymptote des Strahlsystems $(C_\infty)$ u. s. w. — Im Allgemeinen ist noch zu erwähnen, dass, wenn von den beiden erzeugenden Strahlsystemen $(A)$ und $(B)$ nur eines ein Kreissystem, das andere ein beliebiges hyperbolisches oder elliptisches Strahlsystem ist, alsdann eine Kegelschnittschaar zum Vorschein kommt, welche einen Brennpunkt gemeinschaftlich hat und ausserdem zwei reelle oder imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, je nachdem das andere Strahlsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; auch diese Kegelschnittschaaren bieten manche Eigenthümlichkeiten dar.

## § 52. Gemischte Kegelschnittschaaren.

Wenn wir Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts als Bestimmungsstücke desselben annehmen, so ist er im Allgemeinen

durch fünf dieser Elemente ein- oder mehrdeutig bestimmt und zwar: Durch fünf Punkte oder fünf Tangenten eindeutig (§ 20), durch vier Punkte und eine Tangente oder durch vier Tangenten und einen Punkt zweideutig (§ 39), endlich durch drei Punkte und zwei Tangenten oder durch drei Tangenten und zwei Punkte vierdeutig (§ 39). Durch vier dieser Bestimmungsstücke ist der Kegelschnitt nicht bestimmt, sondern es giebt eine unendliche Reihe von Kegelschnitten, welche vier Bedingungen der Art erfüllen, dass sie durch gegebene Punkte gehen oder gegebene Gerade berühren. Von solchen unendlichen Reihen von Kegelschnitten haben wir bisher nur zwei einander gegenüberstehende in Betracht gezogen: Das Kegelschnittbüschel als die Totalität aller durch vier Punkte gehenden Kegelschnitte und die Kegelschnittschaar als die Totalität aller vier Gerade berührenden Kegelschnitte mit Berücksichtigung auch der Fälle, in denen von den vier gemeinschaftlichen Punkten oder Tangenten Paare imaginär sind. Obwohl nun diese beiden Gebilde von hervorragender Bedeutung sind, so lassen sich doch noch andere derartige Reihen von Kegelschnitten bilden, nämlich zunächst wieder zwei einander gegenüberstehende Gebilde: a) sämmtliche Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte gehen und eine feste Gerade berühren, und b) sämmtliche Kegelschnitte, welche drei feste Gerade berühren und durch einen festen Punkt gehen, und sodann ein sich selbst gegenüberstehendes, also alleinstehendes Gebilde: c) sämmtliche Kegelschnitte, welche zwei feste Gerade berühren und durch zwei feste Punkte gehen. Diese drei Gebilde, welche „gemischte Kegelschnittschaaren“ heissen mögen, sollen jetzt näher untersucht werden.

Ebenso wie Steiner das Kegelschnittbüschel aus dem Strahlbüschel entstehen lässt (§ 38), können wir uns eine gemischte Kegelschnittschaar von drei Punkten und einer Tangente aus einem krummen Tangentenbüschel (§ 51), d. h. den sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts erzeugen in folgender Art: Denken wir uns einen Kegelschnitt $K$ und zwei beliebige Punkte desselben $B$ und $B_1$ als die Mittelpunkte von Strahlbüscheln, eine beliebige Tangente $t$ des Kegelschnitts $K$ als den perspektivischen Durchschnitt zweier Strahlbüschel, welche in $B$ und $B_1$ ihre Mittelpunkte haben, so wird die projektivische Beziehung dieser beiden Strahlbüschel in $B$ und $B_1$ durch die Gerade $t$ vollständig

bestimmt und durch die Veränderung der Tangente $t$ am Kegelschnitt $K$ erhalten wir unendlich-viele Paare von projektivischen Strahlbüscheln in $B$ und $B_1$, deren paarweise Beziehung jedesmal unzweideutig festgestellt ist. Endlich haben wir noch zwei projektivische Strahlbüschel in $B$ und $B_1$, welche den Kegelschnitt $K$ erzeugen. Denken wir uns nun diese unendlich-vielen Paare projektivischer Beziehungen in $B$ und $B_1$ in sich festgehalten, aber um die Mittelpunkte $B$ und $B_1$ so gedreht, dass die beiden den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Strahlbüschel in perspektivische Lage gelangen, also die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf eine Gerade $\mathfrak{L}$ zu liegen kommen, so werden jetzt zwei solche Strahlbüschel, welche vor der Drehung eine Tangente $t$ zum perspektivischen Durchschnitt hatten, sich im Allgemeinen nicht mehr in perspektivischer Lage befinden, also einen Kegelschnitt erzeugen; alle diese Kegelschnitte gehen durch $B$ und $B_1$; sie gehen ausserdem durch einen dritten festen Punkt $C$, den Schnittpunkt derjenigen beiden Strahlen, welche vor der Drehung in der Verbindungslinie $B\,B_1$ vereinigt waren, und welche für alle projektivischen Beziehungen (bei der perspektivischen Lage) ein Paar entsprechender Strahlen waren, und endlich berühren diese Kegelschnitte sämmtlich die Gerade $\mathfrak{L}$, weil vor der Drehung alle $t$ den Kegelschnitt $K$ berührten; aus den gemeinschaftlichen Punkten von $t$ und $K$ werden nämlich nach der Drehung die gemeinschaftlichen Punkte des aus $t$ entspringenden Kegelschnitts mit $\mathfrak{L}$, und da jene beiden zusammenfallen, so müssen auch diese beiden zusammenfallen. Wir erhalten also in der That eine gemischte Kegelschnittschaar von drei Punkten $B\,B_1\,C$ und einer Tangente $\mathfrak{L}$ auf (so zu sagen) organischem Wege aus den sämmtlichen Tangenten eines Kegelschnitts.

In ganz analoger Weise kann die gegenüberstehende gemischte Kegelschnittschaar von drei Tangenten und einem Punkte, welche allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sein sollen, aus einer krummen Punktreihe (§ 50), d. h. den sämmtlichen Punkten eines Kegelschnitts erzeugt werden. Nehmen wir zwei feste Tangenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ eines Kegelschnitts $K$ und betrachten einen veränderlichen Punkt $p$ desselben als Projektionspunkt für zwei projektivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche sich in perspektivischer Lage befinden, so erhalten wir mit der Veränderung von $p$ unendlich-viele Paare projektivischer Punktreihen auf $\mathfrak{A}$

und $\mathfrak{A}_1$, deren Beziehung vollständig bestimmt ist; endlich werden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ noch von den Tangenten des Kegelschnitts $K$ in zwei projektivischen Punktreihen getroffen, die sich nicht in perspektivischer Lage befinden. Denken wir uns nun diese unendlich-vielen Paare projektivischer Beziehungen in sich festgehalten, aber die Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$, ohne ihre Lage zu verändern, auf sich selbst so verschoben, dass die beiden letzten den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Punktreihen in perspektivische Lage gelangen (was bekanntlich auf unendlich-viele Arten geschehen kann), so werden nach der Verschiebung je zwei vorhin perspektivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sich im Allgemeinen nicht mehr in perspektivischer Lage befinden, sondern einen Kegelschnitt erzeugen; alle so erhaltenen Kegelschnitte berühren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und eine dritte Gerade $\mathfrak{C}$, die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte auf den Trägern nach der Verschiebung, welche vorher in ihrem Schnittpunkte vereinigt waren und für jedes Paar der unendlich-vielen projektivischen Beziehungen bei perspektivischer Lage ein Paar entsprechender Punkte sind und also auch bleiben; endlich gehen sämmtliche aus den Punkten $p$ entspringende Kegelschnitte durch einen festen Punkt $P$, den Projektionspunkt der beiden projektivischen Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche vor der Verschiebung den Kegelschnitt $K$ erzeugten und nach der Verschiebung perspektivisch zu liegen kommen. Wir erhalten also eine gemischte Kegelschnittschaar von drei gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}$ und einem gemeinschaftlichen Punkte $P$, hervorgegangen aus den sämmtlichen Punkten $p$ eines Kegelschnitts.

Auch umgekehrt können wir, sobald die bestimmenden Elemente einer solchen gemischten Kegelschnittschaar, also a) drei Punkte $B\,B_1\,C$ und eine Gerade $\mathfrak{L}$ oder b) drei Gerade $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}$ und ein Punkt $P$ gegeben sind, den Kegelschnitt $K$ herstellen, aus dessen Tangenten oder Punkten das ganze Gebilde durch Drehung oder Verschiebung hervorgeht. Wir denken uns nämlich im Falle a) in $B$ und $B_1$ zwei perspektivische Strahlbüschel, welche die Gerade $\mathfrak{L}$ zum perspektivischen Durchschnitt haben, und drehen diese beiden Strahlbüschel, deren projektivische Beziehung dadurch bestimmt ist, um solche Winkel, dass die Strahlen $BC$ und $B_1\,C$ zusammenfallen, dann erzeugen jene Strahlbüschel den Kegelschnitt $K$, oder b) wir denken uns $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ als die Träger zweier perspektivischer Punktreihen, welche $P$ zu

ihrem Projektionspunkte haben, und verschieben, indem wir diese projektivische Beziehung festhalten, die Träger auf sich selbst um solche Strecken, dass die Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$) und ($\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{C}$) in den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$) hineinfallen; dann erzeugen jene beiden nicht mehr perspektivischen Punktreihen den Kegelschnitt $K$.

Diese Entstehung der beiden gemischten Kegelschnittschaaren giebt ebensowohl Aufschluss über ihre Mächtigkeit, welche gleich ist der von den Tangenten oder Punkten eines Kegelschnitts, wie über die Eigenschaften beider Gebilde. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Schaar Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen und eine gerade Linie berühren, mit $S\,(3\,p,\ 1\,l)$ und die Schaar Kegelschnitte, welche drei gerade Linien berühren und durch einen Punkt gehen, mit $S\,(3\,l,\ 1\,p)$, so zeigt sich zunächst der Doppelsatz:

| | |
|---|---|
| Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen zwei Kegelschnitte der Schaar $S\,(3\,p,\ 1\,l)$. | Eine beliebige Gerade in der Ebene berühren im Allgemeinen zwei Kegelschnitte der Schaar $S\,(3\,l,\ 1\,p)$. |

Denn fassen wir zum Beweise des Satzes links irgend zwei Tangenten $t$ des erzeugenden Kegelschnitts $K$ auf, so entspringen aus diesen beiden Tangenten zwei Kegelschnitte der Schaar $S\,(3\,p,\ 1\,l)$, welche ausser den drei gemeinschaftlichen Punkten $B\,B_1\,C$ noch denjenigen vierten Punkt gemein haben müssen, in welchem sich nach der Drehung die beiden Strahlen von $B$ und $B_1$ treffen, welche zum Schnittpunkte der beiden Tangenten $t$ hingehen; also umgekehrt, da durch einen beliebigen Punkt $o$ nur zwei Tangenten $t$ an den Kegelschnitt $K$ möglich sind, so gehen auch durch einen beliebigen Punkt $o'$ der Ebene nur zwei Kegelschnitte der Schaar $S\,(3\,p,\ 1\,l)$; und ebenso rechts. Ferner zeigt sich:

| | |
|---|---|
| Eine beliebige Gerade in der Ebene wird im Allgemeinen von vier Kegelschnitten der Schaar $S\,(3\,p,\ 1\,l)$ berührt. | Durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen im Allgemeinen vier Kegelschnitte der Schaar $S\,(3\,l,\ 1\,p)$. |

Denn denken wir uns zum Beweise des Satzes links eine Gerade $\mathfrak{G}$ als den perspektivischen Durchschnitt noch zweier pro-

jektivischer Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in $B$ und $B_1$ placirt sind und welche mit jener Gruppe von Strahlbüschelpaaren unveränderlich zusammenhängen, so werden dieselben vor der Drehung einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugt haben und so viel Tangenten $t$, als die Kegelschnitte $K$ und $\mathfrak{K}$ gemeinschaftlich haben, werden durch die Drehung in Kegelschnitte verwandelt, welche die Gerade $\mathfrak{G}$ berühren; also im Allgemeinen vier; dasselbe zeigt sich gleicherweise bei dem Satze rechts.

Auch über die Natur der in der Schaar $S(3p, 1l)$ vorkommenden Kegelschnitte giebt die obige Entstehungsweise Aufschluss; da nämlich alle Punkte, welche nach der Drehung in die Unendlichkeit gelangen, vor derselben auf einem Kreise liegen (dem „Drehkreise" § 38), welcher das Erzeugniss zweier gleicher und gleichlaufender Strahlbüschel ist, so werden alle diejenigen Tangenten $t$ des erzeugenden Kegelschnitts $K$, welche den Drehkreis in zwei reellen Punkten schneiden, in Hyperbeln, diejenigen, welche ihn berühren, in Parabeln und diejenigen, welche ihn nicht treffen, in Ellipsen verwandelt; solche Tangenten $t$, welche durch den Mittelpunkt des Drehkreises gehen, werden nach der Drehung in gleichseitige Hyperbeln übergehen, weil die unendlich-entfernten Punkte unter rechtwinkligen Richtungen erscheinen. Wir haben also folgendes Ergebniss:

In der gemischten Kegelschnittschaar $S(3p, 1l)$ kommen im Allgemeinen vier Parabeln vor, welche zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln von einander trennen; unter letzteren befinden sich im Allgemeinen nur zwei gleichseitige Hyperbeln; insbesondere enthält die Schaar drei Linienpaare, welche ihre Doppelpunkte in der Geraden $\mathfrak{L}$ haben und jedesmal aus zwei Geraden bestehen, deren eine die Verbindungslinie zweier von den $3p$ ist und die andere die Verbindungslinie des dritten mit dem Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ und der vorigen Verbindungslinie. Diese drei Linienpaare entspringen nämlich aus denjenigen beiden Tangenten $t$ des Kegelschnitts $K$, welche in den Punkten $B B_1$ berühren, weil die projektivische Beziehung hier den parabolischen Charakter annimmt, und drittens aus der Tangente des Kegelschnitts $K$ in demjenigen Punkte $D$, in welchem sich vor der Drehung zwei Strahlen schnitten, welche nach der-

selben in die Verbindungslinie $B B_1$ zusammenfallen, weil für diese $t$ die perspektivische Lage erhalten bleibt.

Für die Schaar $S(3l, 1p)$ lässt sich leicht der Ort der Mittelpunkte sämmtlicher Kegelschnitte ermitteln; ziehen wir nämlich durch irgend einen Punkt $p$ des erzeugenden Kegelschnitts $K$ ein Paar Parallele zu den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, so treffen dieselben in den Punkten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{q}_1$ und diese behalten ihre Eigenschaft, Durchschnittspunkte der Parallelstrahlen (§ 12) zu sein, auch nach der Verschiebung. Wir erhalten dadurch nach der Verschiebung ein dem jedesmaligen Kegelschnitte der Schaar umbeschriebenes Parallelogramm, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts wird. Der Ort des Mittelpunktes des ersten Parallelogramms ändert aber durch die Verschiebung nur seine Lage in der Ebene, indem er sich selbst kongruent bleibt, und dieser Ort ist, wie leicht zu sehen, ein dem erzeugenden Kegelschnitt $K$ ähnlicher Kegelschnitt; denn bezeichnen wir den Schnittpunkt der Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{e}$ (oder $\mathfrak{f}_1$) als Punkte der beiden den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Punktreihen und die Berührungspunkte mit $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1$, so erzeugen die Strahlbüschel $\mathfrak{f}p$ und $\mathfrak{e}_1 p$ den Kegelschnitt $K$; bezeichnen wir aber mit $\varepsilon$ und $\varphi_1$ die Mitten der Strecken $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{f}_1$, mit $\pi$ die Mitte von $\mathfrak{e}p$, so sind $\varepsilon\pi$ $\varphi_1\pi$ parallel resp. mit $\mathfrak{f}p$ und $\mathfrak{e}_1 p$, erzeugen also einen ähnlichen und ähnlich-liegenden Kegelschnitt, welcher in $\varepsilon$ und $\varphi_1$ die Träger $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ berührt; nach der Verschiebung nimmt dieser Kegelschnitt zwar eine andere Lage ein, bleibt aber dem $K$ ähnlich und wir haben mithin folgendes Resultat:

Sämmtliche Kegelschnitte der gemischten Schaar $S(3l, 1p)$ haben ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt, welcher ähnlich ist dem erzeugenden Kegelschnitt $K$. Stellen wir uns noch die Gerade $\mathfrak{D}$ her, welche diejenigen beiden entsprechenden Punkte auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ der den Kegelschnitt $K$ erzeugenden Punktreihen verbindet, die nach der Verschiebung in dem Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1)$ vereinigt werden, d. h. die Gerade $\mathfrak{D}$, welche parallel zu $\mathfrak{C}$ und symmetrisch rücksichtlich des Schnittpunktes $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1)$ liegt, und welche nothwendig eine Tangente des erzeugenden Kegelschnitts $K$ ist, so können wir nach dem in § 43 gefundenen Kriterium leicht entscheiden, welcher Art die Kegelschnitte der gemischten Schaar $S(3l, 1p)$ sein werden; der Kegelschnitt $K$, welcher die drei Geraden $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}$

berührt, liegt entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des von jenen drei Geraden gebildeten Dreiseits. In dem ersten Falle liegt er ganz in einem der Räume $(e)$ (§ 43, Fig. 62) und ist nothwendig Ellipse; die Kegelschnitte der Schaar bestehen also in diesem Falle aus lauter Ellipsen und auch der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Ellipse. Im zweiten Falle ist der Kegelschnitt $K$ entweder Ellipse und liegt dann ganz in einem der Räume $(h)$, welche den Seiten des Dreiseits anliegen; die Kegelschnitte der Schaar bestehen in diesem Falle aus lauter Hyperbeln und der Mittelpunktskegelschnitt ist Ellipse; oder der Kegelschnitt $K$ ist Hyperbel und liegt dann mit einem Zweige in einem Raume $(h)$ und mit dem andern in dem gegenüberliegenden Raume $(e)$; die Kegelschnitte der Schaar bestehen dann aus einer Gruppe Ellipsen und einer Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; der Mittelpunktskegelschnitt ist Hyperbel und die beiden unendlich-entfernten Punkte derselben sind die Mittelpunkte der beiden in der Schaar vorkommenden Parabeln. Das in § 43 angegebene Kriterium giebt auch unmittelbar Aufschluss über die Natur der gemischten Kegelschnittschaar je nach der Lage der sie bestimmenden Elemente, nämlich der drei Geraden $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}$ und des Punktes $P$. Es zeigt sich nämlich, dass die drei Geraden $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}$ das Gebiet der ganzen Ebene in 7 Räume theilen: den endlichen Raum des von ihnen gebildeten Dreiseits, die drei unendlichen den Seiten anliegenden Räume und die drei unendlichen den Ecken anliegenden Scheitelräume; je nachdem der Punkt $P$ in dem einen oder andern dieser Räume liegt, ändert sich die Natur der gemischten Kegelschnittschaar, und zwar: 1) Wenn der gegebene Punkt $P$ innerhalb des endlichen Dreiecksraumes, den die drei gegebenen Geraden $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}$ begrenzen, gelegen ist, so besteht die Schaar aus lauter Ellipsen und auch der Mittelpunktskegelschnitt ist eine Ellipse; 2) wenn der Punkt $P$ in einem der drei unendlichen Scheitelräume, welche an die Ecken des Dreiseits anstossen, gelegen ist, so besteht die Schaar aus lauter Hyperbeln und der Mittelpunktskegelschnitt ist wiederum eine Ellipse; 3) wenn der Punkt $P$ in einem der drei den Seiten des Dreiseits anliegenden unendlichen Räume gelegen ist, so zerfällt die Schaar in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln, welche durch zwei Parabeln von einander getrennt werden; der Mittelpunktskegelschnitt ist Hyperbel und der

eine Zweig derselben enthält die Mittelpunkte der Ellipsen, der andere die der Hyperbeln, während die beiden unendlich-entfernten Punkte dieser Mittelpunktshyperbel die Mittelpunkte der beiden Parabeln der Schaar sind.

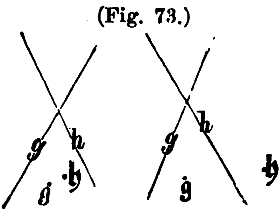
Wir brechen hier die Betrachtung der beiden noch wenig untersuchten Kegelschnittschaaren $S(3p, 1l)$ und $S(3l, 1p)$ ab und überlassen die vielen noch unerledigten Fragen, welche sich daran knüpfen, dem Leser. Die hier gegebene Entstehungsweise derselben scheint eine ergiebige und empfehlenswerthe Quelle für ihre Untersuchung; sie lässt uns nur in dem Falle im Stich, wenn von den $3p$ oder $3l$ ein Paar imaginär angenommen wird, d. h. a) wenn ein Punkt $p_1$ eine Gerade $l$ und ein (elliptisches) Punktsystem gegeben ist und alle Kegelschnitte, welche durch $p$ gehen, $l$ berühren und das gegebene Punktsystem zu ihrem zugehörigen haben, die gemischte Kegelschnittschaar bilden, oder b) wenn eine Gerade $l$, ein Punkt $p$ und ein (elliptisches) Strahlsystem gegeben ist und alle Kegelschnitte, welche $l$ berühren, durch $p$ gehen und das gegebene Strahlsystem zu dem ihnen zugehörigen haben, die gemischte Kegelschnittschaar bilden. Zur Konstruktion der Kegelschnitte dieser Schaaren können wir gelangen, indem wir a) einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{p}$ die Gerade $l$ durchlaufen lassen und jedesmal den Kegelschnitt konstruiren, welcher in $\mathfrak{p}$ die $l$ berührt, durch $p$ geht und das gegebene Punktsystem zu seinem zugehörigen hat (§ 31); b) indem wir einen veränderlichen Strahl $\mathfrak{t}$ um $p$ drehen und jedesmal den Kegelschnitt konstruiren, welcher in $p$ die $\mathfrak{t}$ berührt, ausserdem $l$ berührt und das gegebene Strahlsystem zu dem ihm zugehörigen hat. Diese Konstruktionen gestatten, wenn auch nicht einen so unmittelbaren Einblick, wie die obige organische Entstehungsweise, doch eine klare Anschauung dieser gemischten Kegelschnittschaaren und eine Handhabe für ihre Untersuchung, die übrigens zum Theil schon auf Kurven höheren Grades führt.

Wir haben noch die dritte gemischte Kegelschnittschaar $S(2p, 2l)$ von zwei festen Punkten und zwei festen Tangenten in Betracht zu ziehen oder, wenn wir uns von der Realität dieser Paare unabhängig machen wollen, alle Kegelschnitte aufzusuchen, welche gleichzeitig ein gegebenes Punktsystem und ein gegebenes Strahlsystem zu den ihnen zugehörigen haben. Das Verhalten dieser gemischten Kegelschnitt-

schaar lässt sich leicht aus einem speciellen Falle erkennen, wenn wir nämlich alle Kreise in Betracht ziehen, welche zwei gegebene Gerade berühren, da diese auf der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ ausserdem zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte haben (§ 35); aber auch allgemein zeigt sich leicht Folgendes:

Sei gegeben ein Strahlsystem ($x$, $\xi$), dessen Mittelpunkt $B$ und ein Punktsystem ($y$, $\eta$) auf dem Träger $\mathfrak{A}$, so wird es im Allgemeinen ein Mal vorkommen, dass ein Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems durch ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems hindurchgeht (§§ 16 u. 31); ein solches gemeinschaftliches Paar ist immer reell vorhanden, sobald eines oder beide Systeme elliptisch sind oder wenn beide Systeme hyperbolisch sind mit den Asymptoten $g$, $h$ und den Asymptotenpunkten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, falls die letzteren durch die ersteren nicht getrennt werden, d. h. die Punkte $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ entweder in demselben Winkelraume oder in zwei Scheitelräumen von den vier durch $g$ und $h$ gebildeten Winkelräumen enthalten sind; wenn aber $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ in zwei neben einander liegenden Winkelräumen enthalten sind (Fig. 73), so giebt es kein solches perspektivisch liegendes Paar konjugirter Elemente. Dann giebt es aber überhaupt gar keinen reellen Kegelschnitt der Schaar; denn ein Kegelschnitt, welcher $g$, $h$ berührt und durch $\mathfrak{g}$ geht, ist vollständig in dem Winkel- und seinem Scheitelraume enthalten, in welchem $\mathfrak{g}$ liegt, mag er Ellipse, Hyperbel oder Parabel sein; er kann also nie durch einen Punkt $\mathfrak{h}$ gehen, welcher in einem der Neben-Scheitelräume liegt. Die Schaar enthält also in diesem Falle keinen einzigen reellen Kegelschnitt. Sehen wir daher von diesem illusorischen Falle ab, so giebt es ein Strahlenpaar $l$ und $\lambda$ des Strahlsystems ($B$), welches den Träger $\mathfrak{A}$ in einem Paar konjugirter Punkte $p$ und $\pi$ des auf ihm gegebenen Punktsystems trifft, und dasselbe ist nach dem Früheren leicht zu konstruiren. Diese besonderen perspektivisch-liegenden Paare $l$, $\lambda$ und $p$, $\pi$ konjugirter Elemente beider gegebenen Systeme beherrschen nun die gemischte Kegelschnittschaar. Geht nämlich $l$ durch $p$ und $\lambda$ durch $\pi$, so wird, weil $p$ und $\pi$ konjugirte Punkte in Bezug auf jeden Kegelschnitt dieser Schaar sein müssen, die Polare von $p$ durch $\pi$ gehen; sie muss aber anderseits

(Fig. 73.)



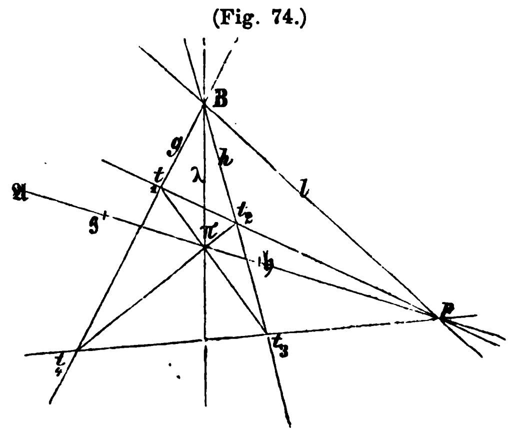
auch den Pol von $l$ enthalten, weil $l$ durch $p$ geht; der Pol von $l$ muss wiederum auf der Geraden $\lambda$ liegen, weil $l$ und $\lambda$ konjugirte Gerade für alle Kegelschnitte der Schaar sind; es sind also nur zwei Möglichkeiten vorhanden, entweder ist $\pi$ selbst der Pol von $l$, oder wenn er es nicht ist, so muss $\lambda$ die Polare von $p$ sein; die Kegelschnitte der Schaar zerfallen daher in zwei Gruppen: für die erste Gruppe sind $p$ und $\lambda$ Pol und Polare, für die zweite Gruppe sind $\pi$ und $l$ Pol und Polare. Bezeichnen wir diese beiden Gruppen, in welche die gemischte Kegelschnittschaar zerfällt, durch $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$, so ergiebt sich folgendes Verhalten: Weil in der Gruppe $[p, \lambda]$ die Polare $\lambda$ von $p$ durch $B$ geht, so muss auch die Polare von $B$ durch $p$ gehen, und weil der Pol $p$ von $\lambda$ auf $\mathfrak{A}$ liegt, so muss auch der Pol von $\mathfrak{A}$ auf $\lambda$ liegen, dagegen in der Gruppe $[\pi, l]$ geht die Polare von $B$ beständig durch $\pi$ und der Pol von $\mathfrak{A}$ liegt immer auf $l$. Wir haben also folgendes Resultat:

Die gemischte Kegelschnittschaar von zwei festen Tangenten, deren Schnittpunkt $B$, und zwei festen Punkten, deren Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ sei, zerfällt in zwei Gruppen von Kegelschnitten; für jede derselben geht die Polare von $B$ (Berührungssehne der beiden festen Tangenten) durch je einen festen Punkt $p$ und $\pi$, welche auf $\mathfrak{A}$ liegen, und der Pol der Geraden $\mathfrak{A}$ (Schnittpunkt der Tangenten in den beiden festen Punkten) liegt auf je einer festen Geraden $\lambda$ und $l$, welche durch $B$ gehen; die Geraden $\lambda$ und $l$ gehen resp. durch die Punkte $\pi$ und $p$ und sind zugeordnet harmonische Strahlen zu den beiden festen Tangenten, sowie $p$ und $\pi$ zugeordnet-harmonische Punkte zu den beiden festen Punkten der Schaar sind.

Für den vollständig reellen Fall, wenn beide Systeme $(B)$ und $(\mathfrak{A})$ hyperbolisch sind, also die Asymptoten $g\, h$ des Strahlsystems die beiden festen Tangenten und die Asymptotenpunkte $\mathfrak{g}\, \mathfrak{h}$ des Punktsystems die beiden festen Punkte der gemischten Kegelschnittschaar sind, ist zu bemerken, dass die Kegelschnitte von jeder der beiden Gruppen paarweise mit einander zusammenhängen: Ziehen wir nämlich irgend einen Strahl durch $p$, welcher $g$ und $h$ in den Punkten $t_1$ und $t_2$ trifft, so wird auch, wenn wir $t_1$ und $t_2$ mit $\pi$ verbinden und die Schnittpunkte dieser

Verbindungsstrahlen mit $h$ und $g$ durch $t_3$ und $t_4$ bezeichnen, die Verbindungslinie $t_3 t_4$ durch $p$ laufen müssen (Fig. 74), denn die

(Fig. 74.)



Strahlen $g\,h\,l\,\lambda$ sind harmonisch und aus der harmonischen Eigenschaft des Vierecks folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung. Es giebt hiernach zwei Kegelschnitte der Gruppe $[p, \lambda]$, deren einer in $t_1 t_2$, der andere in $t_3 t_4$ die Geraden $g\,h$ berührt und durch $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}$ geht; anderseits giebt es aber auch zwei Kegelschnitte der Gruppe $[\pi, l]$, deren einer in $t_1 t_3$, der andere in $t_2 t_4$ die Geraden $g\,h$ berührt und ausserdem durch $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}$ geht; diese vier Kegelschnitte, welche paarweise den beiden Gruppen angehören, berühren sich in den vier Punkten $t_1 t_2 t_3 t_4$ derartig, dass jeder aus der einen Gruppe die beiden andern aus der andern Gruppe berührt; die vier Punkte $t_1 t_2 t_3 t_4$ liegen ferner mit den festen Punkten $\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}$ in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, weil $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ zugeordnete harmonische Punkte sind zu $p$ und $\pi$, zwei Diagonalpunkten des vollständigen Vierecks $t_1 t_2 t_3 t_4$. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ hat $B p \pi$ zu einem Tripel konjugirter Punkte, folglich ist $p \pi$ die Polare von $B$ in Bezug auf ihn und daher $B\mathfrak{g}$ und $B\mathfrak{h}$ seine Tangenten in den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$. Verändern wir den willkührlich durch $p$ gezogenen Strahl, so verändert sich auch das Viereck der vier Berührungspunkte $t_1 t_2 t_3 t_4$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; ersteres behält das feste Diagonaldreieck $B p \pi$ und ein Seitenpaar $g\,h$ unverändert, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ beschreibt eine Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte, welche in den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die gemeinsamen Tangenten $B\mathfrak{g}$ und $B\mathfrak{h}$ haben. In analoger

Weise ordnen sich die Kegelschnitte der gemischten Schaar zu zwei und zwei Paaren, wenn man auf $l$ einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ nimmt, ihn mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ verbindet und die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrahlen mit $\lambda$, abwechselnd mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ verbindet, welche beiden Linien sich wiederum auf $l$ schneiden; man erhält dadurch ein Vierseit, dessen Diagonaldreiseit $\mathfrak{A} l \lambda$ ist und von dem ein Paar Gegenecken $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ ist; die vier Seiten dieses Vierseits sind die Tangenten von vier Kegelschnitten, welche paarweise den beiden Gruppen $[p, \lambda]$ und $[\pi, l]$ angehören und sich derartig berühren, dass jeder aus der einen Gruppe die beiden andern aus der andern Gruppe berührt. Die vier Seiten dieses Vierseits und die beiden Geraden $g$ und $h$ sind sechs Tangenten eines Kegelschnitts, der $\mathfrak{A} l \lambda$ zum Tripel konjugirter Strahlen hat und daher die Geraden $g$ und $h$ in denjenigen beiden Punkten berührt, in welchen sie von $\mathfrak{A}$ geschnitten werden; verändern wir den willkührlich angenommenen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Geraden $l$, so verändert sich sowohl jenes Vierseit, als auch dieser Kegelschnitt und letzterer durchläuft eine sich doppelt berührende Kegelschnittschaar, deren beide Berührungspunkte die Schnittpunkte von $g$ und $h$ mit der Geraden $\mathfrak{A}$ sind.

## § 53. Die gemeinschaftlichen Punkte, Tangenten und das gemeinsame Tripel konjugirter Punkte und Strahlen für zwei beliebig angenommene Kegelschnitte.

Zwei willkührlich in der Ebene angenommene Kegelschnitte können höchstens vier gemeinschaftliche Punkte und vier gemeinschaftliche Tangenten haben, denn durch fünf dieser Elemente ist der Kegelschnitt im Allgemeinen eindeutig bestimmt und zwei Kegelschnitte, welche dieselben fünf Punkte gemeinschaftlich hätten, müssten identisch zusammenfallen. Die Frage nach der Realität dieser gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten, sowie die Konstruktion derselben ist für viele geometrische Untersuchungen von unerlässlicher Bedeutung, insbesondere für die Konstruktion des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar, welche beiden Gebilde durch zwei Kegelschnitte vollständig und eindeutig bestimmt werden. Es soll daher diese Frage nachträglich beantwortet werden. Ein Kegelschnitt theilt die unendliche Ebene in zwei Gebiete, welche wir das äussere und innere Gebiet nennen; ersteres wird erfüllt von sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts,

letzteres von keiner getroffen. Denken wir uns eine veränderliche Tangente an dem Contour eines Kegelschnitts herumbewegt, so durchstreift dieselbe das ganze äussere Gebiet doppelt; denn halten wir den Berührungspunkt in der Tangente fest, so theilt er jedesmal dieselbe in zwei unendliche Hälften, und während der Berührungspunkt den Contour des Kegelschnitts einmal durchläuft, durchstreift jede der beiden Hälften das ganze äussere Gebiet. Bei der Hyperbel bildet das äussere Gebiet ein zusammenhängendes Ganze von unendlicher Ausdehnung; das innere Gebiet besteht aus zwei getrennten (im Unendlichen zusammenhängenden) Theilen ebenfalls von unendlicher Ausdehnung. Die Bewegung der Tangente mit ihrem Berührungspunkt längs des Contours der Hyperbel zeigt den Zusammenhang der beiden Hyperbelzweige im Unendlichen (§ 26). Das innere Gebiet der Ellipse ist von endlicher Ausdehnung, das äussere von unendlicher; bei der Parabel sind beide von unendlicher Ausdehnung und jedes in sich zusammenhängend.

Wenn wir zwei beliebige Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in der Ebene willkührlich annehmen, so können drei wesentlich verschiedene Fälle rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage eintreten, nämlich 1) ist das innere Gebiet des einen ganz in dem inneren Gebiete des anderen enthalten und zugleich enthält das äussere Gebiet des letzteren ganz das äussere Gebiet des ersteren, d. h. der eine Kegelschnitt liegt ganz innerhalb des anderen, oder 2) das innere Gebiet des einen liegt ganz in dem äusseren Gebiet des anderen und zugleich das äussere Gebiet des ersteren enthält ganz das innere des andern, d. h. der eine Kegelschnitt liegt ganz ausserhalb des anderen, oder 3) das innere Gebiet des einen greift theilweise über in das innere Gebiet des anderen. In den Fällen 1) und 2) können die Kegelschnitte keinen reellen Punkt gemeinschaftlich haben, im Falle 3) müssen sie gemeinschaftliche Punkte haben und zwar nothwendig zwei oder vier; denn verfolgen wir den Contour des einen, so muss ein auf demselben sich bewegender Punkt aus dem äusseren Gebiete des anderen in das innere Gebiet desselben übertreten bei der Annahme, dass ein Theil der inneren Gebiete sich deckt; der sich bewegende Punkt muss aber auch wiederum aus dem inneren Gebiet in das äussere zurückkehren, von wo wir ihn ausgehen liessen; bei dem kontinuirlichen Durchlaufen des zusammenhängenden (bei der

Hyperbel durchs Unendliche zusammenhängenden) Contours; er muss also mindestens zwei Mal die Grenze überschreiten, kann es aber auch vier Mal, d. h. zwei Kegelschnitte haben entweder keinen oder zwei oder vier gemeinschaftliche Punkte; haben sie einen gemeinschaftlichen Punkt, so müssen sie noch einen zweiten reellen Punkt gemeinschaftlich haben, können aber auch noch drei haben; haben sie drei reelle Punkte gemein, so müssen sie noch einen vierten reellen gemeinschaftlichen Punkt haben. Hieraus folgt unmittelbar das gegenüberstehende Ergebniss: Haben zwei Kegelschnitte eine reelle gemeinschaftliche Tangente, so müssen sie noch eine zweite haben, können aber auch noch drei andere gemeinschaftliche Tangenten haben; denn wenn wir zwei Kegelschnitte mit einer reellen gemeinschaftlichen Tangente in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt als Basis polarisiren (§ 36), so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche einen reellen Punkt gemein haben, folglich nothwendig noch einen zweiten oder drei andere gemeinschaftliche Punkte; die ursprünglichen beiden Kegelschnitte haben daher nothwendig noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente, oder auch drei; hieraus folgt: Zwei Kegelschnitte haben entweder keine oder zwei oder vier gemeinschaftliche Tangenten.

Wie nun gemeinschaftliche Punkte und Tangenten bei zwei Kegelschnitten zusammen auftreten, erkennen wir am deutlichsten, indem wir das gemeinschaftliche Tripel konjugirter Punkte und Strahlen in Bezug auf beide Kegelschnitte aufsuchen. Irgend ein Punkt $\mathfrak{p}$ in der Ebene hat in Bezug auf jeden der beiden gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ eine bestimmte Polare; suchen wir solche Punkte in der Ebene auf, für welche die beiden Polaren zusammenfallen; und anderseits, jede Gerade in Bezug auf einen Kegelschnitt hat einen bestimmten Pol; suchen wir solche Gerade auf, welche für beide Kegelschnitte denselben Pol haben; eine Lösung der ersten Frage giebt zugleich eine Lösung der zweiten, wie ersichtlich ist, und zwei Lösungen geben sofort eine dritte, denn seien $x$ und $X$, $y$ und $Y$ zwei Paar Pole und Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte, so muss der Schnittpunkt $(X, Y)$ und die Verbindungslinie $xy$ ein drittes Paar Pol und Polare für beide Kegelschnitte sein. Mehr, als drei Lösungen der

Frage können aber nicht existiren, sobald die gegebenen Kegelschnitte von einander verschieden sind, denn wären $x$ und $X$, $y$ und $Y$, $xy = Z$ und $(X, Y) = z$ diese drei Paar Pole und Polaren und noch ein viertes Paar $u$ und $U$, so liessen sich unendlich-viele neue Paare herstellen, nämlich $xu = V$ und $(X, U) = v$ u. s. f., und aus diesen wieder neue, was einen netzartigen Fortgang hat; auf jeder Verbindungslinie wie z. B. $xy$ wäre ein Punktsystem bekannt, welches beiden Kegelschnitten gleichzeitig zugehörte, und die beiden Asymptotenpunkte wären allemal ein Paar gemeinschaftlicher Punkte beider Kegelschnitte (reell oder imaginär), die beiden Kegelschnitte hätten also unendlich-viele gemeinschaftliche Punkte und wären somit identisch. Nach dieser vorläufigen Bemerkung kommt es nun darauf an, jene besonderen Punkte zu finden, deren Polaren in Bezug auf beide Kegelschnitte zusammenfallen; bewegen wir zu diesem Zweck einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{p}$ auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$, so wird seine Polare in Bezug auf den ersten Kegelschnitt $K$ ein Strahlbüschel beschreiben, welches um den Pol $o$ der Geraden $\mathfrak{G}$ sich dreht und projektivisch ist mit der von $\mathfrak{p}$ beschriebenen Punktreihe auf dem Träger $\mathfrak{G}$ (§ 30); ebenso die Polaren von den Punkten $\mathfrak{p}$ in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt $K_1$; diese beiden projektivischen Strahlbüschel, deren Mittelpunkte $o$ und $o_1$ sind, erzeugen selbst einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch $o$ und $o_1$ geht und die Eigenschaft besitzt, dass sich in jedem Punkte $\mathfrak{q}$ desselben die Polaren eines gewissen Punktes $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ schneiden, also auch umgekehrt: Die Polaren eines jeden Punktes $\mathfrak{q}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ treffen sich in einem Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$; wenn wir jetzt eine zweite Gerade $\mathfrak{G}'$ annehmen und von einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{p}'$ durchlaufen lassen, so erhalten wir in derselben Weise wie vorhin einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher durch die Pole $o'$ und $o_1'$ der Geraden $\mathfrak{G}'$ rücksichtlich der Kegelschnitte $K$ und $K_1$ hindurchgeht und alle Punkte $\mathfrak{q}'$ enthält, deren Polaren in Bezug auf $K$ und $K_1$ sich in einem Punkte $\mathfrak{p}'$ der Geraden $\mathfrak{G}'$ treffen. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben nun einen unmittelbar anzugebenden Punkt gemein; der Schnittpunkt $P$ der Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ hat nämlich in Bezug auf $K$ und $K_1$ zwei Polaren, welche sich in $Q$ treffen, und durch $Q$ müssen offenbar

beide Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ hindurchgehen; sie haben nach dem Obigen nothwendig noch einen oder drei andere gemeinschaftliche Punkte, welche die Lösung der vorgelegten Frage darbieten; sei $x$ ein gemeinschaftlicher Punkt der Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ ausser dem bekannten $Q$, so müssen, weil er in $\mathfrak{K}$ liegt, seine Polaren rücksichtlich $K$ und $K_1$ sich in einem Punkte $\mathfrak{x}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ treffen, und weil er in $\mathfrak{K}'$ liegt, müssen sie sich in einem Punkte $\mathfrak{x}'$ der Geraden $\mathfrak{G}'$ treffen; die Punkte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ fallen aber nicht zusammen in $P$, weil sonst $x$ in $Q$ läge; folglich müssen die Polaren von $x$ rücksichtlich beider Kegelschnitte $K K_1$ in die Gerade $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$ zusammenfallen, d. h. $x$ ist ein Punkt der gesuchten Art. Wir schliessen also: Es giebt in der Ebene im Allgemeinen drei Punkte $x y z$ der Art, dass für jeden derselben die Polaren rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ zusammenfallen; von diesen drei Punkten muss einer immer reell sein. Nehmen wir an, es wären alle drei reell, so zeigt sich ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen ihnen und ihren Polaren für die Kegelschnitte $K$ und $K_1$. Wenn nämlich die Polare von $x$ in Bezug auf $K$ und $K_1$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ resp. die Geraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ trifft und die Polare von $y$ in $\eta$ und $\eta'$, so muss auch der Schnittpunkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \eta\eta')$ ein solcher Punkt sein, dass er dieselbe Polare $xy$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $KK_1$ hat; es giebt aber nur noch einen einzigen dritten Punkt dieser Art, nämlich $z$, den vierten Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, folglich muss der Punkt $(\mathfrak{x}\mathfrak{x}', \eta\eta')$ mit $z$ coincidiren und seine Polare, welche in $\zeta$ und $\zeta'$ resp. die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ trifft, muss die Verbindungslinie $xy$ sein; es ist also $z$ der Pol von $xy$ und in gleicher Weise $x$ der Pol von $yz$ und $y$ der Pol von $zx$; die drei Punkte $xyz$ liegen daher so, dass jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern ist, d. h. sie bilden ein Tripel konjugirter Punkte für beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$, und die Verbindungslinien:

$$(yz) = X \qquad (zx) = Y \qquad (xy) = Z$$

ein Tripel konjugirter Strahlen. Hierdurch ist zugleich die zweite oben aufgestellte Frage beantwortet, nämlich solche Gerade in der Ebene zweier gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ zu finden, deren Pole in Bezug auf beide zusammenfallen; denn eine solche Gerade muss die Träger $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in zwei derartigen Punkten $\mathfrak{p}$

und $\mathfrak{p}'$ treffen, dass der Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{p}$ in Bezug auf $K$ und $K_1$ mit dem Schnittpunkt der Polaren von $\mathfrak{p}'$ zusammenfällt, und solcher Geraden giebt es, wie wir gesehen haben, nur die drei $\xi\xi'$, $\eta\eta'$, $\zeta\zeta'$ oder $X$, $Y$, $Z$. Also: **Es giebt in der Ebene im Allgemeinen drei Gerade $XYZ$ der Art, dass für jede derselben die Pole rücksichtlich zweier gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ zusammenfallen; von diesen drei Geraden muss eine immer reell sein; sind alle drei reell, so bilden sie ein Tripel konjugirter Strahlen für beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$, d. h. der Pol jeder ist der Schnittpunkt der beiden andern.** Da von dem gemeinschaftlichen Tripeldreieck, dessen Ecken $xyz$ und gegenüberliegende Seiten $X\,Y\,Z$ gleichzeitig beziehungsweise ein Tripel konjugirter Punkte und Strahlen für beide gegebenen Kegelschnitte sind, entweder alle Ecken und Seiten reell sind oder nur eine Ecke $x$ und die gegenüberliegende Seite $X$, so brauchen wir auch nur diese beiden immer reellen Elemente, deren Konstruktion oben angegeben ist, zu ermitteln und können die übrigen auf folgende Art aus ihnen finden: Die Polare $X$ von $x$ ist der Träger zweier verschiedenen Punktsysteme, welche beziehungsweise den Kegelschnitten $K$ und $K_1$ zugehören; haben dieselben ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte (§§ 16 und 31), so muss dasselbe aus den Punkten $y$ und $z$ bestehen; dieses Punktenpaar kann also nur dann imaginär sein, wenn die beiden auf $X$ befindlichen Punktsysteme, welche den Kegelschnitten $K$ und $K_1$ zugehören, beide hyperbolisch sind und die Asymptotenpunkte derselben sich gegenseitig trennen, oder mit andern Worten, wenn die Gerade $X$ beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in je zwei reellen Punkten schneidet, von denen das eine Paar durch das andere und zugleich dieses durch jenes getrennt wird. Wenn die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ keinen reellen Punkt gemein haben, also in der oben mit 1) und 2) bezeichneten Lage sich befinden, bei welcher entweder der eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb des andern gelegen ist, dann ist es ersichtlich, dass jede Gerade, welche beide in reellen Punktenpaaren schneidet (also auch $X$), sie nothwendig so treffen muss, dass die Schnittpunktenpaare nicht durch einander getrennt werden, als schliessen wir: **Zwei Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemein haben, müssen nothw**

reelles Tripel konjugirter Punkte $xyz$ gemeinschaftlich haben, denn es giebt überhaupt keine Gerade in der Ebene zweier so gelegener Kegelschnitte, welche dieselben in Punktenpaaren träfe, die einander trennen, also auch kein $X$ der Art. Anderseits haben zwei Kegelschnitte, welche vier reelle gemeinschaftliche Punkte haben, immer ein reelles gemeinsames Tripel $xyz$, welches a priori zu bestimmen von früher her bekannt ist, nämlich das Diagonaldreieck des von den vier Schnittpunkten gebildeten vollständigen Vierecks; also bleibt dafür, dass die beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ von dem gemeinsamen Tripel allein $x$ und $X$ reell haben, der einzige Fall übrig, dass die beiden Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben; wir schliessen also: Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, so ist von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Punkt $x$ und seine Polare (die Verbindungslinie der beiden andern) reell. Denn wäre das Tripel $x\,y\,z$ vollständig reell und die Kegelschnitte hätten nur einen reellen Punkt $\alpha$ gemeinschaftlich, so würde, wenn wir $\alpha\,x$ ziehen, welches $X$ in $\mathfrak{x}$ träfe, der vierte harmonische Punkt zu $\alpha\,x\,\mathfrak{x}$, dem $\alpha$ zugeordnet, nothwendig auch ein gemeinschaftlicher Punkt beider Kegelschnitte, also der zweite Punkt $\beta$ sein müssen; in gleicher Weise würden wir aber noch zwei andere gemeinschaftliche Punkte erhalten, indem wir $\alpha$ mit $y$ und $z$ verbinden und die gleiche Konstruktion ausführen; wenn also die Kegelschnitte ein reelles gemeinschaftliches Tripel und nur einen Punkt gemein hätten, so müssten sie vier reelle gemeinschaftliche Punkte haben; es kann mithin, wenn sie nur zwei reelle Schnittpunkte gemein haben, das Tripel nicht vollständig reell sein, sondern nur $x$ und $X$, und zugleich müssen die beiden reellen gemeinschaftlichen Punkte mit $x$ in gerader Linie liegen; und umgekehrt: Wenn von dem gemeinschaftlichen Tripel zweier Kegelschnitte allein ein Tripelpunkt $x$ und seine zugehörige Polare $X$ reell sind, so müssen die beiden Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Punkte haben. Ganz ähnlich verhält es sich mit den gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte. Wenn zwei Kegelschnitte vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so haben sie ein vollständig reelles gemeinschaftliches Tripeldreieck, nämlich das Diagonaldreieck des von jenen vier Tangenten gebildeten vollständigen Vierseits. Ebenso: Wenn zwei Kegel-

schnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, so müssen sie ein reelles Tripel konjugirter Strahlen (und Punkte) besitzen. Dies folgt durch Polarisation aus dem oben Nachgewiesenen: dass, wenn zwei Kegelschnitte keinen reellen Punkt haben, ihr gemeinsames Tripel vollständig reell sein muss. Denn polarisiren wir die beiden gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$, von welchen angenommen wird, dass sie keine gemeinschaftliche Tangente reell haben, so erhalten wir zwei neue Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt gemein haben, und da diese ein reelles gemeinschaftliches Tripel haben, so müssen auch jene ein solches haben, indem aus Pol und Polare eines Kegelschnitts durch Polarisation allemal wieder Polare und Pol des Polarerzeugnisses wird (§ 30), also auch aus einem Tripel konjugirter Punkte ein Tripel konjugirter Strahlen, was ja gleichzeitig ein Tripel konjugirter Punkte ist. Wenn endlich die gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ nur zwei gemeinschaftliche Tangenten reell haben, so kann ihr gemeinschaftliches Tripel nicht ganz reell sein, sondern nur $X$ und $x$; denn wären alle drei konjugirten Strahlen $X\,Y\,Z$ des Tripels reell, so müssten die Kegelschnitte, sobald sie nur eine reelle gemeinschaftliche Tangente hätten, alle vier reell haben; wir finden nämlich, wenn $\alpha$ die erste wäre, die drei übrigen, indem wir durch jeden Schnittpunkt derselben mit $X$, $Y$, $Z$ den vierten harmonischen ihr zugeordneten Strahl konstruiren, während je ein Tripelstrahl und die Verbindungslinie jenes Schnittpunktes mit dem Pol dieses Tripelstrahls das andere Paar zugeordneter Strahlen sind. Also: **Wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, so ist von ihrem gemeinschaftlichen Tripel allein ein Tripelstrahl $X$ und sein Pol $x$ (der Schnittpunkt der beiden andern) reell; und auch umgekehrt: Wenn allein $X$ und $x$ reell ist, so müssen die Kegelschnitte zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben.** Hieraus folgt in Verbindung mit dem Obigen: **Zwei Kegelschnitte, welche nur zwei reelle Schnittpunkte haben, müssen zwei und nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen, und umgekehrt.** (Vgl. § 61.)

Hieraus ersehen wir, dass bei zwei beliebig angenommenen Kegelschnitten $K$ und $K_1$ rücksichtlich ihrer gemeinschaftlichen

Punkte und Tangenten, überhaupt nur folgende fünf Fälle eintreten können:

A) Das gemeinschaftliche Tripel $xyz$, und $X=(yz)$, $Y=(zx)$, $Z=(xy)$ ist vollständig reell:

I. Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt und keine reelle Tangente gemeinschaftlich.

II. Die beiden Kegelschnitte haben keinen reellen Punkt, aber vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.

III. Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte, aber keine reelle Tangente gemeinschaftlich.

IV. Die beiden Kegelschnitte haben vier reelle Punkte und vier reelle Tangenten gemeinschaftlich.

B) Von dem gemeinschaftlichen Tripel ist nur ein Tripelpunkt $x$ und ein Tripelstrahl $X$, seine Polare, reell:

V. Die beiden Kegelschnitte haben nur zwei reelle Punkte und gleichzeitig nur zwei reelle Tangenten gemeinschaftlich.

Wie nun in diesen fünf Fällen das gemeinsame Tripel rücksichtlich der beiden gegebenen Kegelschnitte gelegen ist, lässt sich auf folgende Weise erkennen: Ein Tripel konjugirter Punkte für einen Kegelschnitt liegt (§ 30) immer so zu demselben, dass ein Tripelpunkt in dem inneren Gebiete des Kegelschnitts, die beiden andern in dem äusseren Gebiete enthalten sind oder von den drei konjugirten Strahlen zwei den Kegelschnitt in zwei reellen Punktenpaaren und der dritte nicht schneidet. Das gemeinschaftliche Tripel zweier Kegelschnitte kann demnach, wenn es vollständig reell ist, nur auf zwei Arten zu denselben gelegen sein:

| | entweder ($\alpha$) | | oder ($\beta$) |
|---|---|---|---|
| $x$ | innerhalb $K$, innerhalb $K_1$ | $x$ | ausserhalb $K$, ausserhalb $K_1$ |
| $y$ | ausserhalb $K$, ausserhalb $K_1$ | $y$ | innerhalb $K$, ausserhalb $K_1$ |
| $z$ | ausserhalb $K$, ausserhalb $K_1$ | $z$ | ausserhalb $K$, innerhalb $K_1$ |
| $X$ | trifft weder $K$, noch $K_1$ | $X$ | trifft $K$ und $K_1$ |
| $Y$ | trifft $K$ und $K_1$ | $Y$ | trifft nicht $K$, aber $K_1$ |
| $Z$ | trifft $K$ und $K_1$ | $Z$ | trifft $K$, aber nicht $K_1$. |

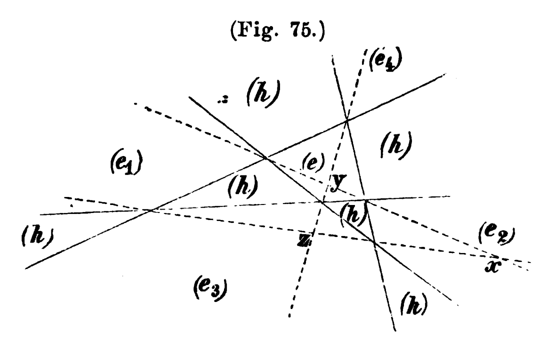
In dem Falle I. liegt das Tripel nach der Art ($\alpha$), denn da von den beiden Kegelschnitten der eine ganz in dem innern Gebiete des andern enthalten ist (s. oben 1)), so kann der Fall ($\beta$) nicht eintreten, denn läge $K_1$ ganz innerhalb $K$, so müsste jeder Punkt innerhalb $K_1$ a fortiori auch innerhalb $K$ liegen, folglich wäre kein $z$ möglich; es muss daher der Fall ($\alpha$) eintreten.

Im Falle II. liegt das Tripel nach der Art ($\beta$), denn da der eine Kegelschnitt ganz ausserhalb des andern liegen muss (s. oben 2)), so giebt es keinen Punkt, der innerhalb beider liegt; der Fall ($\alpha$) kann also nicht eintreten, weil es kein $x$ giebt, folglich muss der Fall ($\beta$) eintreten.

In dem Falle III. liegt das Tripel nach der Art ($\beta$); dies folgt aus dem vorigen Falle durch Polarisation; denn das polarisirte Gebilde des vorigen giebt zwei Kegelschnitte, welche keine reellen Tangenten, aber vier reelle Punkte gemein haben, und das Tripel konjugirter Punkte geht in das Tripel konjugirter Strahlen über; es ist aber offenbar, dass beide übereinstimmend liegen müssen, folglich liegt das Tripel im Falle III. so, wie im Falle II. nach der Art ($\beta$).

In dem Falle IV. liegt das Tripel nach der Art ($\alpha$); denken wir uns, da die vier gemeinschaftlichen Tangenten reell sind, die ganze Schaar der dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte, so erfüllen dieselben, wie wir wissen (§ 44), nur die fünf elliptischen Räume ($e$), während die sechs hyperbolischen Räume ($h$) frei bleiben (Fig. 75), und auf diese fünf elliptischen

(Fig. 75.)




Räume vertheilen sich die Kegelschnitte der Schaar in zwei Gruppen Ellipsen und zwei Gruppen Hyperbeln der Art, dass die

eine Gruppen Ellipsen ganz in dem Raume $(e)$, die eine Gruppe Hyperbeln ganz in den Räumen $(e_1)$ und $(e_2)$, die andere Gruppe Ellipsen ganz in dem Raume $(e_3)$ und die letzte Gruppe Hyperbeln ganz in den Räumen $(e_3)$ und $(e_4)$ enthalten ist. Wenn also zwei Kegelschnitte dieser Schaar $K$ und $K_1$ reelle Schnittpunkte haben sollen, wie in IV., so müssen sie entweder beide im Raume $(e)$ oder beide in $(e_1)$ und $(e_2)$ oder beide in $(e_3)$ oder beide in $(e_3)$ und $(e_4)$ oder einer in $(e_3)$ und der andere in $(e_3)$ und $(e_4)$ enthalten sein, denn diese Räume $e$ schliessen sich gegenseitig aus; bei diesen fünf Annahmen liegt aber immer das Tripel $xyz$ nach der Art $(\alpha)$; liegen nun beide Kegelschnitte im Raume $(e)$, so liegt $x$ ausserhalb beider und auch $z$; sind beide in $(e_1)$ und $(e_2)$ enthalten, so liegen $y$ und $z$ ausserhalb beider; sind sie in $(e_3)$ enthalten, so liegt $x$ und $y$ ausserhalb beider; sind beide in $(e_3)$ und $(e_4)$ enthalten, so liegen wiederum $x$ und $y$ ausserhalb beider, und endlich auch, wenn einer in $(e_3)$, der andere in $(e_3)$ und $(e_4)$ enthalten ist. Unter allen möglichen Annahmen liegt also im Falle IV. das Tripel $xyz$ nach der Art $(\alpha)$.

In dem Falle V. liegt der reelle Tripelpunkt $x$ ausserhalb beider Kegelschnitte und seine Polare $X$ schneidet beide Kegelschnitte in reellen Punktenpaaren, welche einander trennen, wie wir dies schon oben gesehen haben.

Es ist noch zu bemerken, dass, während die Lage der Fälle I, II, IV, V bei jeder Art von zwei Kegelschnitten (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten kann, der Fall III. nur möglich ist, wenn wenigstens einer der beiden Kegelschnitte Hyperbel ist. Dies folgt wiederum durch Polarisation des Falles II., wo jeder Kegelschnitt ganz in dem äusseren Gebiet des andern liegt, also kein Punkt existirt, welcher gleichzeitig innerhalb beider sich befindet. Das Polar-Erzeugniss eines Kegelschnitts $K$ wird aber nur Ellipse, wenn der Mittelpunkt der Basis innerhalb $K$ liegt (§ 30), und da es keinen Punkt giebt, welcher gleichzeitig innerhalb $K$ und $K_1$ liegt im Falle II., so muss das Polarerzeugniss der Art sein, dass wenigstens einer der beiden erzeugten Kegelschnitte Hyperbel ist (oder auch beide); weil aber durch Polarisation des Falles II. der Fall III. hervorgeht, so muss von zwei Kegelschnitten, welche vier reelle Punkte, aber keine reelle Tangente gemein haben, wenigstens einer Hyperbel sein.

Wir müssen noch eines besonderen Falles Erwähnung thun, welcher eine Ausnahme macht. Aus der vorigen Untersuchung geht nämlich hervor, dass im Allgemeinen zwei Kegelschnitte nur ein einziges Tripel konjugirter Punkte gemeinschaftlich haben, von dem entweder alle drei Punkte $x\,y\,z$ oder nur einer und seine Polare $X$ reell sind; die beiden auf $X$ befindlichen Punktsysteme, welche den beiden Kegelschnitten zugehören, haben als gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte $y$ und $z$ und können, solange sie von einander verschieden sind, nur ein einziges gemeinschaftliches Paar besitzen; es kann aber der besondere Fall eintreten, dass diese beiden Punktsysteme identisch sind; alsdann haben sie unendlich-viele Paare konjugirter Punkte gemeinschaftlich und die beiden Kegelschnitte haben unendlich-viele Tripel konjugirter Punkte gemeinschaftlich, welche indessen eine Ecke $x$ und die gegenüberliegende Seite $X$ gemein haben. Die Kegelschnitte haben dann (§ 51) eine reelle oder ideelle doppelte Berührung und es folgt hieraus, dass zwei Kegelschnitte, auch ohne identisch zu sein, mehr als ein gemeinschaftliches Tripel haben können; dass sie dann aber eine (reelle oder ideelle) doppelte Berührung haben müssen und den unendlich-vielen gemeinschaftlichen Tripeln eine Ecke und die gegenüberliegende Seite (Polare) gemeinsam ist.

Nachdem wir vermittelst des aufgefundenen gemeinschaftlichen Tripels zweier Kegelschnitte alle möglichen Fälle hinsichtlich der Realität ihrer gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten erörtert haben, bleibt es noch übrig, eine direkte Konstruktion der letzteren anzugeben, indem das gemeinschaftliche Tripel, dessen Konstruktion oben gegeben wurde, als bereits ermittelt angenommen wird. Um gemeinschaftliche Punkte zweier Kegelschnitte $K$ und $K_1$ aufzufinden, kommt es darauf an, solche Gerade in der Ebene zu ermitteln, welchen in Bezug auf beide Kegelschnitte dasselbe Punktsystem zugehört, denn eine solche Gerade muss reelle oder ideelle gemeinschaftliche Sekante beider Kegelschnitte sein, je nachdem jenes Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; um anderseits gemeinschaftliche Tangenten zweier Kegelschnitte zu finden, kommt es darauf an, solche Punkte in der Ebene zu ermitteln, denen in Bezug auf beide Kegelschnitte dasselbe Strahlsystem zugehört; denn die Asymptoten eines solchen Strahlsystems, wenn es hyperbolisch ist, müssen gemeinschaftliche

Tangenten beider Kegelschnitte sein, und wenn es elliptisch ist, so nennen wir einen solchen Punkt den Durchschnittspunkt zweier imaginärer gemeinschaftlicher Tangenten beider Kegelschnitte. Jene Geraden und diese Punkte aufzufinden giebt uns das gemeinschaftliche Tripel ein Hülfsmittel an die Hand; denn ein Tripelpunkt $x$ und seine Polaren $X$ besitzen die Eigenschaft, dass auf irgend einem durch $x$ gezogenen Strahl der Schnittpunkt $\xi$ mit $X$ und der Punkt $x$ ein Paar konjugirter Punkte für beide Kegelschnitte ist, also die beiden Punktsysteme auf diesem durch $x$ gezogenen Strahl, welche den beiden Kegelschnitten zugehören, das Punktenpaar $x\xi$ zu einem gemeinschaftlichen Paar konjugirter Punkte haben; drehen wir jetzt einen Strahl um $x$, so kann es vorkommen, dass auf ihm noch ein zweites Paar konjugirter Punkte beiden Punktsystemen gemeinschaftlich wird, und dann müssen sie identisch sein, weil zwei Paare konjugirter Punkte das Punktsystem bestimmen; also eine gemeinschaftliche Sekante wäre gefunden. Lassen wir nun, wie am Anfange unserer Betrachtung, einen Punkt $\mathfrak{p}$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ durchlaufen und treffen sich die Polaren von $\mathfrak{p}$ rücksichtlich der beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in dem veränderlichen Punkte $\mathfrak{q}$, so beschreibt $\mathfrak{q}$, wie wir gesehen haben, einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel $xyz$ umschrieben ist, und jedem Punkte $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ entspricht ein bestimmter Punkt $\mathfrak{q}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ von der Beschaffenheit, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein Paar konjugirter Punkte beider gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ ist. Dem Punkte $x$ entspricht der Schnittpunkt $\xi$ der Geraden $\mathfrak{G}$ mit $X$, den Punkten $yz$ (wenn sie reell sind) die Schnittpunkte $\eta\zeta$ der Geraden $\mathfrak{G}$ mit $Y$ und $Z$. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ immer ein Paar konjugirter Punkte ist für $K$ und $K_1$ und $x$ und $\xi$ ein zweites Paar, so folgt aus dem in § 31 bewiesenen Satze, dass die Schnittpunkte $(x\mathfrak{p}, \xi\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^1$ und $(x\mathfrak{q}, \xi\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^1$ ebenfalls ein Paar konjugirter Punkte für beide Kegelschnitte sein muss; weil aber der letztere $\mathfrak{p}^1$ auf $\mathfrak{G}$ liegt, so muss der erstere auf $\mathfrak{K}$ liegen, d. h. die Verbindungsstrahlen $x\mathfrak{p}$ und $\xi\mathfrak{q}$ treffen sich in einem Punkte $\mathfrak{q}^1$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, dessen konjugirter Punkt $\mathfrak{p}^1$ auf $\mathfrak{G}$ derjenige ist, in welchem $x\mathfrak{q}$ die Gerade $\mathfrak{G}$ trifft, oder mit andern Worten: Verbinden wir $x$ mit einem Paar konjugirter Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, resp. auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$, so treffen die Verbindungsstrahlen, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ zum andern Male in einem neuen Paar konjugirter Punkte $\mathfrak{p}^1$ und $\mathfrak{q}^1$.

Hieraus geht hervor, dass die beiden Verbindungsstrahlen $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ mit der gleichzeitigen Bewegung von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem erzeugen. Sind nämlich $o$ und $o_1$ die Pole der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Kegelschnitte $K$ und $K_1$, so beschreiben $o\mathfrak{q}$ und $o_1\mathfrak{q}_1$, die Polaren von $\mathfrak{p}$, zwei projektivische Strahlbüschel mit der von $\mathfrak{p}$ durchlaufenen Punktreihe, erzeugen also jenen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch $x$ geht; folglich beschreibt auch $x\mathfrak{q}$ ein mit $o\mathfrak{q}$, also mit der Punktreihe $(\mathfrak{p})$ projektivisches Strahlbüschel; $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ beschreiben mithin zwei concentrische projektivische Strahlbüschel, welche so auf einander liegen, dass die Schenkel entsprechender gleicher Winkel verkehrt auf einander fallen; denn wir haben gesehen, dass, wenn $x\mathfrak{p}$ mit $x\mathfrak{q}^1$ coincidirt, $x\mathfrak{q}$ auf $x\mathfrak{p}^1$ fallen muss; nach § 17 bilden daher $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem; dieses Strahlsystem lässt sich leicht anschauen, sobald die Gerade $\mathfrak{G}$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ bekannt sind; denn wir haben gesehen, dass zwei konjugirte Strahlen $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ desselben den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in den Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}^1$ durchbohren, deren Verbindungssehne durch den festen Punkt $\mathfrak{x}$ geht, woraus noch einfacher folgt, dass $x\mathfrak{p}$ und $x\mathfrak{q}$ ein Strahlsystem erzeugen; jeder durch $\mathfrak{x}$ gehende Strahl trifft also den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in solchen zwei Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}^1$, welche mit $x$ verbunden zwei Strahlen liefern, die in den konjugirten Punkten $\mathfrak{p}^1$ und $\mathfrak{p}$ der Geraden $\mathfrak{G}$ begegnen. Hieraus wird es nun leicht, die eigentlich vorgelegte Frage zu beantworten; denn ist das eben ermittelte Strahlsystem $[x]$ hergestellt und wir drehen einen veränderlichen Strahl um $x$, indem wir den jedesmal ihm konjugirten Strahl aus diesem Strahlsystem hinzufügen, so trifft ersterer den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und letzterer die Gerade $\mathfrak{G}$ (und zugleich umgekehrt) allemal in zwei Punkten $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$, welche für $K$ und $K_1$ gleichzeitig konjugirt sind; sobald daher zwei solche konjugirte Strahlen des Strahlsystems $[x]$ zusammenfallen, müssen auf diesem Doppelstrahl nicht allein die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, sondern auch die Punkte $x$ und der Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ mit $X$ je ein Paar konjugirter Punkte für $K$ und $K_1$ sein, und da durch zwei Paar konjugirter Punkte ein Punktsystem vollständig und eindeutig bestimmt ist, so muss diesem Doppelstrahl in Bezug auf $K$ und $K_1$ dasselbe Punktsystem zugehören, oder er muss (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Sekante der Kegelschnitte $K$ und $K_1$ sein. Es kommt also Alles darauf an, die Asymptoten des Strahlsystems $[x]$ zu finden; dieselben

werden dadurch leicht ermittelt, dass wir durch $\mathfrak{x}$ das Tangentenpaar an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ legen und die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$ mit $x$ verbinden. Die vollständige Auflösung der Aufgabe: „Die gemeinschaftlichen Punkte zweier beliebig gegebener Kegelschnitte $K$ und $K_1$ zu finden", lässt sich also folgendermassen zusammenfassen:

Man nehme von den Punkten $\mathfrak{p}$ einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ die Polaren in Bezug auf $K$ und $K_1$, welche sich paarweise in einem veränderlichen Punkte $\mathfrak{q}$ treffen, dessen Ort ein bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist; dasselbe mache man mit einer zweiten Geraden $\mathfrak{G}^1$, so erhält man einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^1$. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^1$ haben einen reellen Punkt $Q$ gemein, den Schnittpunkt der Polaren von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^1) = P$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K^1$. Sie haben daher im Allgemeinen noch drei andere Punkte $xyz$ gemein (von denen wenigstens einer $x$ und die Gerade $X$, auf welcher die beiden andern liegen, reell sein muss). Die drei Verbindungslinien $(y, z) = X$ $(z, x) = Y$, $(x, y) = Z$ treffen $\mathfrak{G}$ in den Punkten $\xi\eta\zeta$; die Tangentenpaare aus diesen Schnittpunkten an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegt mögen die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$, $\beta\beta^1$, $\gamma\gamma^1$ haben, dann sind die sechs Linien $x\alpha$, $x\alpha^1$, $y\beta$, $y\beta^1$, $z\gamma$, $z\gamma^1$ sechs gemeinschaftliche Sekanten der beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ und müssen sich zu je dreien in vier Punkten treffen, welche die gesuchten sind.

Hieraus ergiebt sich beiläufig ein Satz, welcher auch auf direktem Wege zu verificiren ist:

Hat man einem Dreieck $xyz$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umschrieben und werden die Seiten des Dreiecks $yz$, $zx$, $xy$ von einer beliebigen Transversale resp. in den Punkten $\xi\eta\zeta$ getroffen; legt man aus $\xi\eta\zeta$ die Tangentenpaare an $\mathfrak{K}$ und bestimmt die Berührungspunkte derselben: $\alpha\alpha^1$, $\beta\beta^1$, $\gamma\gamma^1$, so schneiden sich die sechs Verbindungsstrahlen $x\alpha$, $x\alpha^1$, $y\beta$, $y\beta^1$, $z\gamma$, $z\gamma^1$ zu je dreien in vier Punkten und sind die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks, dessen drei Diagonalpunkte $xyz$ sind.

[Anmerkung. Wir bemerken noch, dass die Lösung unserer

Aufgabe nur eine Zurückführung derselben auf eine andere ist; um nämlich die vier Schnittpunkte zweier beliebig gegebenen Kegelschnitte $KK_1$ zu finden, müssen wir drei Schnittpunkte $xyz$ zweier andern Kegelschnitte $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^1$ ermitteln, welche einen bekannten vierten Punkt $Q$ gemein haben. Diese Zurückführung ist in der Natur der Sache begründet und nicht zu eliminiren; sie ist gleichbedeutend mit der Zurückführung der Lösung der biquadratischen auf die der kubischen Gleichung; wie denn überhaupt in unserer Untersuchung eine geometrische Lösung der biquadratischen vermittelst kubischer und quadratischer Gleichungen enthalten ist.]

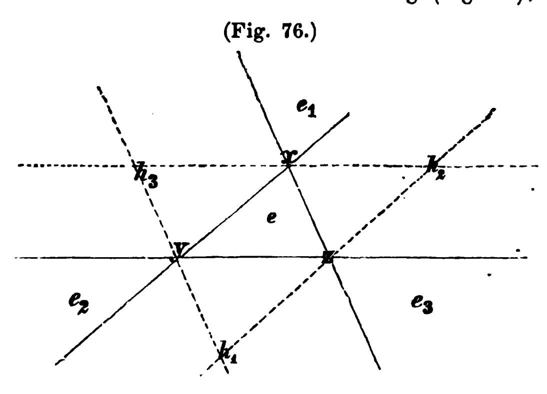
Die analoge Konstruktion der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte $K$ und $K_1$ ist nach dem bekannten Uebertragungsprinzip unmittelbar herzustellen; mit den bereits konstruirten Linien und Punkten können wir sie ein wenig abkürzen, wie folgt: Von dem Punkte $P = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^1)$ werden die beiden Polaren in Bezug auf $K$ und $K^1$, die sich in $Q$ treffen, und ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ konstruirt, welcher dieselben berührt und dem Dreiseit $XYZ$ einbeschrieben ist, also durch diese fünf Tangenten vollständig bestimmt wird; zieht man die drei Strahlen $Px$, $Py$, $Pz$, so schneiden dieselben den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ in sechs Punkten, deren Tangenten an $\mathfrak{C}$ beziehlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^1$ heissen mögen; die Schnittpunkte $(X\mathfrak{a})$ $(X\mathfrak{a}^1)$ $(Y\mathfrak{b})$ $(Y\mathfrak{b}^1)$ $(Z\mathfrak{c})$ $(Z\mathfrak{c}^1)$ sind die sechs Ecken (drei Paar Gegenecken) eines vollständigen Vierseits, welches aus den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte $KK_1$ gebildet wird und zu seinen drei Diagonalen $XYZ$ hat. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ haben die Beziehung zu einander, dass ersterer den beiden Dreiecken $xyz$, $Qoo_1$ zugleich umschrieben ist und der letztere diesen beiden Dreiecken gleichzeitig einbeschrieben ist.

Die gegebene allgemeine Lösung ist nun hinsichtlich der Realität der konstruirten gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten der Kegelschnitte $K$ und $K_1$ zu diskutiren und es sind dabei die obigen Fälle A) und B) zu unterscheiden.

A) Ist das Tripel $xyz$ und $XYZ$ vollständig reell, so kann eine gerade Linie $\mathfrak{G}$ in der Ebene zu diesem Dreieck nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder sie trifft alle drei Seiten desselben in ihren Verlängerungen (d. h. ausserhalb der Strecken $xy$, $yz$, $xz$) oder nur eine in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Drei-

ecks; da nun der Kegelschnitt 𝔎 dem Dreieck $xyz$ umschrieben ist, so müssen die drei Schnittpunkte $\xi\eta\zeta$ der Geraden 𝔊 mit den Dreiecksseiten entweder alle drei ausserhalb 𝔎 liegen oder nur einer ausserhalb und die beiden andern innerhalb; von den sechs Berührungspunkten $\alpha\alpha^1$ $\beta\beta^1$ $\gamma\gamma^1$ sind mithin entweder alle oder nur zwei reell und es giebt daher auch entweder sechs reelle gemeinschaftliche Sekanten oder nur zwei für die beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$, d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder vier reelle Schnittpunkte oder keinen, in dem letzten Falle aber zwei angebbare ideelle gemeinschaftliche Sekanten. Anderseits kann ein Punkt $P$ zu einem Dreiseit $XYZ$ nur auf zwei wesentlich verschiedene Arten gelegen sein: entweder seine Verbindungslinien mit den Ecken $xyz$ des Dreiseits treffen alle drei Seiten in Punkten zwischen den Ecken desselben, oder von diesen Schnittpunkten liegt nur einer zwischen den Ecken des Dreiseits und die beiden andern in den Verlängerungen der Seiten. Hiernach können wir beurtheilen, in welche Räume die drei zusammengehörigen Strahlen $Px$, $Py$, $Pz$ hineinfallen, wie auch der Punkt $P$ in der Ebene liegen mag, und müssen dazu sechszehn verschiedene Fälle unterscheiden. Die Seiten des Dreiecks $xyz$ zerfällen nämlich die ganze Ebene in sieben von einander getrennte Räume, den endlichen Dreiecksraum $e$, die drei an die Ecken $xyz$ anstossenden Scheitelräume $e_1$ $e_2$ $e_3$ von unendlicher Ausdehnung und die drei den gegenüberliegenden Seiten anliegenden Räume $h_1 h_2 h_3$ ebenfalls von unendlicher Ausdehnung (Fig. 76); es kön-

(Fig. 76.)




nen nun die drei zusammengehörigen Strahlen $Px$ $Py$ $Pz$ nur in folgende Räume hineinfallen:

in die Räume:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Px$ : | $e\,e_1 h_1$ | $e_1 h_1 e$ | $e_2 h_2 h_3$ | $e_3 h_3 h_2$ |
| $Py$ : | $e\,e_2 h_2$ | $e_1 h_1 h_2$ | $e_2 h_2 e$ | $e_3 h_3 h_1$ |
| $Pz$ : | $e\,e_3 h_3$ | $e_1 h_1 h_3$ | $e_2 h_2 h_1$ | $e_3 h_3 e$ |
| | | | | |
| $Px$ : | $e\,e_1 h_1$ | $e\,e_1 h_1$ | $e\,e_1 h_1$ | $e\,e_1 h_1$ |
| $Py$ : | $e_1 h_3 h_1$ | $e_3 h_3 h_1$ | $e_1 h_3 h_1$ | $e_3 h_3 h_1$ |
| $Pz$ : | $e_1 h_2 h_1$ | $e_2 h_2 h_1$ | $e_2 h_2 h_1$ | $e_1 h_2 h_1$ |
| | | | | |
| $Px$ : | $e_2 h_3 h_2$ | $e_3 h_3 h_2$ | $e_2 h_3 h_2$ | $e_3 h_3 h_2$ |
| $Py$ : | $e\,e_2 h_2$ | $e\,e_2 h_2$ | $e\,e_2 h_2$ | $e\,e_2 h_2$ |
| $Pz$ : | $e_2 h_1 h_2$ | $e_1 h_1 h_2$ | $e_1 h_1 h_2$ | $e_2 h_1 h_2$ |
| | | | | |
| $Px$ : | $e_3 h_2 h_3$ | $e_2 h_2 h_3$ | $e_3 h_2 h_3$ | $e_2 h_2 h_3$ |
| $Py$ : | $e_3 h_1 h_3$ | $e_1 h_1 h_3$ | $e_1 h_1 h_3$ | $e_3 h_1 h_3$ |
| $Pz$ : | $e\,e_3 h_3$ | $e\,e_3 h_3$ | $e\,e_3 h_3$ | $e\,e_3 h_3$ |

Diese sechszehn Fälle können allein auftreten und entsprechen der Lage des Punktes $P$ in je einem der 16 Räume, welche wir erhalten, indem wir noch durch $x\ y\ z$ drei Parallele zu den Dreiecksseiten ziehen, wodurch jeder der drei Räume $h$ in vier Räume zerfällt, also im Ganzen $3\,.\,4h + 4e$, d. h. 16 Räume. Der Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, welcher dem Dreieck $xyz$ einbeschrieben ist, kann nur so gelegen sein, dass er ganz enthalten ist in folgenden Räumen:

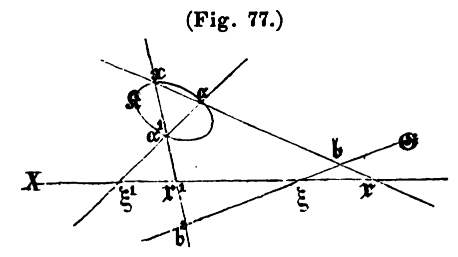
| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $e_1$ und $h_1$ | $e_2$ und $h_2$ | $e_3$ und $h_3$. |

Von den drei Strahlen $Px$, $Py$, $Pz$ können und müssen ihn daher solche in reellen Punkten treffen, welche in diese Räume hineinfallen; aus dem obigen Tableau erkennen wir aber leicht, dass, welcher dieser 7 Fälle auch angenommen wird, die drei Strahlen $Px$, $Py$, $Pz$ den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ entweder alle drei in reellen Punktenpaaren treffen, oder nur einer von ihnen; von den sechs Tangenten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}^1\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}^1$ sind also auch entweder alle oder nur zwei reell und von dem vollständigen Vierseit der vier gemeinschaftlichen Tangenten existiren daher entweder nur ein Paar Gegenecken oder drei Paar, d. h. die beiden Kegelschnitte haben entweder 4 reelle gemeinschaftliche Tangenten oder keine; in dem letzten Falle existiren aber zwei angebbare Punkte, welche als ein Paar Gegenecken des imaginären vollständigen Vierseits

anzusehen sind. Wir erkennen hieraus, dass bei A) in der That nur die vier oben mit I, II, III, IV bezeichneten Fälle auftreten können und auch wirklich auftreten müssen, wie die angegebene Konstruktion es erheischt. (Wir sehen dabei von speciellen Fällen ab, indem einige der konstruirten Punkte oder Linien zusammenfallen können, welche dann als doppelt aufzufassen sind.)

B) Ist von dem gemeinschaftlichen Tripel der gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$ nur ein Tripelpunkt $x$ und ein Tripelstrahl $X$, seine Polare oder die Verbindungslinie der beiden andern imaginären Tripelpunkte reell, so schneidet $X$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ nicht (denn schnitte es ihn, so wären die Schnittpunkte $y$ $z$ rell, was nicht der Fall ist); alle Punkte der Geraden $X$ liegen also ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, mithin auch der Punkt $\mathfrak{x}$, in welchem $\mathfrak{G}$ von $X$ getroffen wird; es giebt also aus $\mathfrak{x}$ ein reelles Tangentenpaar an $\mathfrak{K}$ und die Berührungspunkte $\alpha\alpha^1$ mit $x$ verbunden geben ein Seitenpaar des vollständigen Vierecks der vier gemeinschaftlichen Punkte von $K$ und $K_1$. Von den beiden Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ muss nun die eine in zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ treffen, die andere in zwei imaginären. Denn wir können die beiden Punktsysteme auf den Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ bestimmen, deren jedes beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich zugehört, und werden finden, dass das eine hyperbolisch, das andere elliptisch sein muss; mögen nämlich (Fig. 77) die Geraden $x\alpha$ und $x\alpha^1$ der Geraden $X$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^1$ begegnen und der Geraden $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^1$, so bestimmen die Punktenpaare $x\mathfrak{x}$ und $\alpha\mathfrak{b}$ auf der ersten, $x\mathfrak{x}^1$ und $\alpha^1\mathfrak{b}^1$ auf der zweiten die Punktsysteme, welche den Kegelschnitten $K$ $K_1$ gemeinschaftlich zugehören.

(Fig. 77.)




Die Geraden $\mathfrak{G}$ und $X$ treffen sich nun in $\xi$ und $\alpha\alpha^1$ ist die Polare von $\xi$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; trifft diese also die $X$ in $\xi^1$, so sind $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ und $\xi\xi^1$ zwei Punktenpaare desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $X$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zugehört; dieses ist nothwendig elliptisch, weil die Schnittpunkte $x$ $y$ von $X$ und $\mathfrak{K}$ imaginär sind, folglich müssen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ durch $\xi\xi^1$ getrennt werden, d. h. wenn $\xi$

zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ liegt, so liegt $\mathfrak{z}^1$ ausserhalb dieser Strecke und umgekehrt. Nun liegen $\alpha\,\alpha^1\,\mathfrak{z}^1$ in einer Geraden und $\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}^1\,\mathfrak{z}$ in einer zweiten Geraden und diese Punkte sind je drei Schnittpunkte mit den Seiten des Dreiecks $x\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$; von den Schnittpunkten $\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}^1$ wissen wir, dass sie getrennt werden durch die Dreiecksecken $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$; von den Schnittpunkten irgend einer Geraden in der Ebene wissen wir, dass nothwendig entweder keiner oder zwei zwischen den Ecken eines Dreiecks liegen müssen; es sind daher für die Lage der Punkte $\alpha\alpha^1\mathfrak{z}$ $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1\mathfrak{z}^1$ nur folgende Fälle möglich:

| $\alpha$ | $\alpha^1$ | $\mathfrak{z}^1$ | $\mathfrak{z}$ | $\mathfrak{b}$ | $\mathfrak{b}^1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| zwischen $x\mathfrak{x}$ | zwischen $x\mathfrak{x}^1$ | ausserhalb $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen oder ausserh. $x\mathfrak{x}$ | ausserhalb od. zwischen $x\mathfrak{x}^1$ |
| ausserhalb $x\mathfrak{x}$ | ausserhalb $x\mathfrak{x}^1$ | ausserhalb $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen oder ausserh. $x\mathfrak{x}$ | ausserhalb od. zwischen $x\mathfrak{x}^1$ |
| zwischen $x\mathfrak{x}$ | ausserhalb $x\mathfrak{x}^1$ | zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | ausserhalb $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen oder ausserh. $x\mathfrak{x}$ | zwischen oder ausserhalb $x\mathfrak{x}^1$ |
| ausserhalb $x\mathfrak{x}$ | zwischen $x\mathfrak{x}^1$ | zwischen $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | ausserhalb $\mathfrak{x}\mathfrak{x}^1$ | zwischen oder ausserh. $x\mathfrak{x}$ | zwischen oder ausserhalb $x\mathfrak{x}^1$ |

Durch die willkührliche Annahme der beiden ersten Kolumnen sind die vier folgenden bestimmt; bei den Kolumnen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^1$ gelten von den doppelten Bezeichnungen immer die in derselben Horizontalreihe stehenden nothwendig zusammen; das Punktsystem auf $x\alpha$ ist nun bestimmt durch die Punktenpaare $x\mathfrak{x}$ und $\alpha\mathfrak{b}$, auf $x\alpha^1$ durch die Punktenpaare $x\mathfrak{x}^1$ und $\alpha^1\mathfrak{b}^1$; die aus der Tabelle ersichtliche Lage dieser Punktenpaare zeigt aber, dass nothwendig das eine Punktsystem elliptisch, das andere hyperbolisch sein muss, folglich müssen die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in dem Falle B) zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte, aber ein reelles Paar gemeinschaftlicher Sekanten haben, welches durch $x$ geht.

Wir können nun in ähnlicher Weise zeigen, dass in diesem Falle B) anderseits auf der Geraden $X$ zwei solche reelle Punkte existiren, dass für jeden derselben die in Bezug auf die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ ihm zugehörigen Strahlsysteme identisch werden, und dass von den dadurch erhaltenen zwei Strahlsystemen nothwendig das eine hyperbolisch und das andere elliptisch ist; die Asymptoten des ersteren sind die beiden reellen gemeinschaftlichen Tangenten von $K$ und $K_1$, während die anderen

beiden imaginär sind, aber als reellen Schnittpunkt auf $X$ den Mittelpunkt des andern elliptischen Strahlsystems haben. Allein es bedarf hier keines so umständlichen Nachweises mehr, weil durch Polarisation des bereits gefundenen Resultates das andere unmittelbar zu Tage tritt; denn das Polarerzeugniss zweier Kegelschnitte, für welche von dem gemeinschaftlichen Tripel allein $x$ und $X$ reell sind, wird aus zwei neuen Kegelschnitten bestehen, für welche von dem gemeinschaftlichen Tripel allein $X$ und $x$ reell sind; da jene zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Punkte haben müssen, so müssen diese zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben; das Polar-Gebilde ist aber derselben Gattung B), wie das polarisirte, folglich tritt in der That für den Fall B) nur die einzige oben mit V. bezeichnete Möglichkeit ein, dass die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ allein zwei reelle Schnittpunkte und zugleich zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben.

Wir sind durch diese Untersuchung in den Stand gesetzt, wenn zwei beliebige Kegelschnitte $K$ und $K_1$ gegeben sind, sowohl das Büschel, als auch die Schaar Kegelschnitte herzustellen, welche durch jene beiden bestimmt werden. Hierzu bedarf es nur der oben angegebenen Konstruktion eines immer reellen gemeinschaftlichen Paares Pol und Polare $x$ und $X$ und dann des reellen Linienpaares durch $x$ und des reellen Punktenpaares auf $X$, deren ersteres ein Paar gemeinschaftlicher Sekanten der beiden Kegelschnitte und letzteres ein Paar Schnittpunkte gemeinschaftlicher Tangenten ist, oder: ersteres enthält zwei Punktsysteme, letzteres zwei Strahlsysteme, welche für beide Kegelschnitte zugleich die zugehörigen sind. Diese beiden Punktsysteme und Strahlsysteme, mögen sie nun elliptisch oder hyperbolisch sein, geben, wie wir in §§ 41 und 48 gesehen haben, eine unmittelbare reelle Konstruktion an die Hand für alle Kegelschnitte einerseits des Büschels und anderseits der Schaar, welche durch die beiden gegebenen $K$ und $K_1$ bestimmt werden. Auch zur Entstehung gemischter Kegelschnittschaaren (§ 52) geben $K$ und $K_1$ gleichfalls Anlass. Schliesslich bemerken wir noch, dass durch die vorstehende Untersuchung zu den aus den Elementen bekannten Figuren des vollständigen Vierecks und Vierseits neue hinzutreten, indem Ecken und Seiten, Diagonalpunkte und Diagonalen derselben paarweise imaginär, d. h. durch elliptische Punkt- und

Strahlsysteme vertreten werden, und zwar giebt es drei wesentlich verschiedene Arten dieser beiden Figuren, wie aus dem Obigen hervorgeht:

| Das vollständige Viereck hat: | Das vollständige Vierseit hat: |
|---|---|
| I. vier reelle Ecken, sechs reelle Seiten oder drei Paar Gegenseiten, welche sich in drei reellen Diagonalpunkten paarweise treffen. | I. vier reelle Seiten, sechs reelle Ecken oder drei Paar Gegenecken, welche paarweise verbunden drei reelle Diagonalen liefern. |
| II. keine reelle Ecke, zwei reelle Seiten, d. h. ein reelles Paar Gegenseiten, die sich in einem reellen Diagonalpunkte treffen; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär, aber ihre Durchschnittspunkte sind reell und bilden die beiden übrigen reellen Diagonalpunkte. | II. keine reelle Seite, zwei reelle Ecken, d. h. ein reelles Paar Gegenecken, deren Verbindungslinie eine reelle Diagonale ist; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär, aber ihre Verbindungslinien sind reell und bilden die beiden übrigen reellen Diagonalen. |
| III. zwei reelle Ecken und zwei imaginäre Ecken, ein reelles Paar Gegenseiten, von denen eine die beiden reellen, die andere die beiden imaginären Ecken enthält; einen reellen Diagonalpunkt, den Schnittpunkt jenes reellen Paares Gegenseiten; die beiden andern Paare Gegenseiten sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalpunkte, aber die Verbindungslinie der letzteren ist reell. | III. zwei reelle Seiten und zwei imaginäre Seiten, ein reelles Paar Gegenecken, von denen die eine der Schnittpunkt der beiden reellen, die andere der Schnittpunkt der beiden imaginären Seiten ist; eine reelle Diagonale, die Verbindungslinie dieses reellen Paares Gegenecken; die beiden andern Paare Gegenecken sind imaginär und auch die beiden andern Diagonalen, aber der Schnittpunkt der letzteren ist reell. |

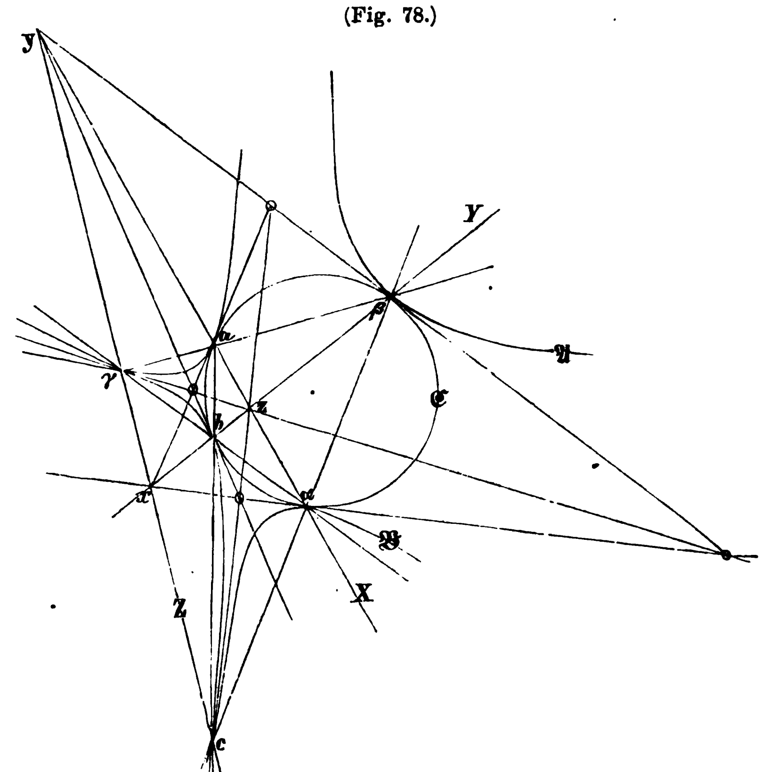
Da das vollständige Viereck (links) in allen drei Fällen ein reelles Paar Gegenseiten hat, so können wir diese als die Träger zweier Punktsysteme ansehen, deren Doppelpunkte die Ecken des vollständigen Vierecks sind, und hiernach tritt denn ein: der Fall I, wenn beide Punktsysteme hyperbolisch, der Fall II, wenn beide elliptisch, und der Fall III, wenn eines elliptisch, das andere hyperbolisch ist; ebenso kann das vollständige Vierseit (rechts)

als gebildet von den Doppelstrahlen zweier Strahlsysteme angesehen werden und es treten die drei oben aufgeführten Fälle ein, je nachdem beide Strahlsysteme hyperbolisch, beide elliptisch oder eines hyperbolisch und das andere elliptisch ist.

## §. 54. Harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte.

Wenn man einen Kegelschnitt 𝔈 und ein Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf denselben $x\,y\,z$ hat, so müssen von den Verbindungslinien $(yz) = X$ $(zx) = Y$ $(xy) = Z$ zwei den Kegelschnitt 𝔈 in reellen Punktenpaaren treffen, während die dritte ihn nicht trifft (§ 30); möge $X$ in $a$ und $\alpha$, $Y$ in $b$ und $\beta$ den 𝔈 schneiden (Fig. 78), dann weiss man, dass der Schnittpunkt

(Fig. 78.)




$(ab, \alpha\beta) = c$ und der Schnittpunkt $(a\beta, \alpha b) = \gamma$ beide auf der Polare $Z$ von $z = (a\alpha, b\beta)$ liegen müssen und dass $z\,c\,\gamma$ ein zweites Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf den Kegel-

schnitt 𝔈 sind, weil sie die Diagonalpunkte des dem Kegelschnitt einbeschriebenen vollständigen Vierecks $a\alpha b\beta$ sind; wir erkennen ferner, dass die vier Punkte $a\,\alpha\,b\,\beta$ vier harmonisch gelegene Punkte auf dem Kegelschnitt 𝔈 sind und dass auf den drei Geraden $X\,Y\,Z$ sowohl $a\,\alpha\,y\,z$, als auch $b\,\beta\,z\,x$ und endlich $c\,\gamma\,x\,y$ je vier harmonisch gelegene Punkte sind. Die hierdurch hergestellte Figur bietet interessante Eigenschaften dar. Ebenso, wie der Kegelschnilt 𝔈 durch die vier Punkte $a\alpha b\beta$ geht und in diesen $xa$, $x\alpha$, $yb$, $y\beta$ zu Tangenten hat, lassen sich zwei andere Kegelschnitte 𝔄 und 𝔅 herstellen, von denen der erstere durch $b\beta c\gamma$ geht und in diesen Punkten die Tangenten $yb$, $y\beta$, $zc$, $z\gamma$ hat, der andere aber durch $c\,\gamma\,a\,\alpha$ geht und die Tangenten $zc$, $z\gamma$, $xa$, $x\alpha$ hat. Denn der Kegelschnitt 𝔄, welcher in $b$ und $\beta$ die Tangenten $yb$ und $y\beta$ hat und ausserdem durch $c$ geht, wodurch er vollständig bestimmt ist, muss, weil er $y$ und $Y$ zu Pol und Polare hat und $\gamma$ der vierte harmonische Punkt zu $yxc$ ist, auch durch $\gamma$ gehen; er muss ferner, weil $x\,z\,b\,\beta$ vier harmonische Punkte sind, auch $x$ und $X$ zu Pol und Polare haben, folglich auch $z$ und $Z$, also $xyz$ zu einem Tripel konjugirter Punkte; da die Gerade $Z$ den Kegelschnitt 𝔄 in $c$ und $\gamma$ trifft, so müssen die Tangenten in diesen Punkten durch den Pol $z$ gehen; der Kegelschnitt 𝔄 besitzt also die behauptete Eigenschaft und in gleicher Weise 𝔅. Solche drei Kegelschnitte:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 𝔄 durch die Punkte | $b\,\beta\,c\,\gamma$ | mit den Tangenten | $yb$, $y\beta$, $zc$, $z\gamma$ |
| 𝔅 „ „ „ | $c\,\gamma\,a\,\alpha$ | „ „ „ | $zc$, $z\gamma$, $xa$, $x\alpha$ |
| 𝔈 „ „ „ | $a\,\alpha\,b\,\beta$ | „ „ „ | $xa$, $x\alpha$, $yb$, $y\beta$ |

heissen **harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte** und treten mehrfach bei geometrischen Untersuchungen auf; jeder von ihnen berührt die beiden andern doppelt und die Berührungspunkte sind die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$; das Diagonaldreieck desselben $xyz$ ist gemeinschaftlich für alle drei Kegelschnitte ein Tripel konjugirter Punkte; die vier Punkte auf jedem der drei Kegelschnitte, welche allemal zwei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits sind, bilden immer ein Quadrupel von vier harmonisch gelegenen Punkten auf jedem der drei Kegelschnitte (§ 27), d. h. irgend ein Punkt des Kegelschnitts mit diesen vier Punkten verbunden liefert allemal vier harmonische Strahlen. Die drei Kegelschnitte 𝔄 𝔅 𝔈 erscheinen also als drei harmonische Kegelschnitte, welche bei gehöriger

Zuordnung den drei Vierecken $b\beta c\gamma$, $c\gamma a\alpha$, $a\alpha b\beta$ umschrieben sind (§ 27); aus diesem Grunde heissen sie harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Gleichzeitig erscheinen dieselben drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ aber auch als drei harmonische Kegelschnitte, welche bei gehöriger Zuordnung den drei Vierseiten eingeschrieben sind, die in einem vollständigen Viereck liegen; bezeichnen wir nämlich die sechs Strahlen:

$$\begin{array}{cccccccc} xa & x\alpha & yb & y\beta & zc & z\gamma & \text{mit} \\ A & \mathbf{A} & B & \mathbf{B} & C & \mathbf{\Gamma}, & \text{so ist} \end{array}$$

ersichtlich, dass diese sechs Strahlen ein vollständiges Viereck bilden, d. h. zu je dreien sich in vier Punkten treffen, wobei $A$ und $\mathbf{A}$, $B$ und $\mathbf{B}$, $C$ und $\mathbf{\Gamma}$ die drei Paare Gegenseiten sind, denn ebenso wie

$abc$ in einer Geraden liegen, treffen sich $AB\mathbf{\Gamma}$ in einem Punkt,
$a\beta\gamma$ „ „ „ „ „ „ $A\mathbf{B}C$ „ „ „
$\alpha b\gamma$ „ „ „ „ „ „ $\mathbf{A}BC$ „ „ „
$\alpha\beta c$ „ „ „ „ „ „ $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}$ „ „ „
weil

$$\left.\begin{array}{cccccc} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \\ A & \mathbf{A} & B & \mathbf{B} & \mathbf{\Gamma} & C \end{array}\right\}\ \text{Pole und Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt } \mathfrak{C} \text{ sind;}$$

in gleicher Weise sind:

$$\left.\begin{array}{cccccc} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \\ \mathbf{A} & A & B & \mathbf{B} & C & \mathbf{\Gamma} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Pole und} \\ \text{Polaren}\end{array}\ \text{in Bezug auf } \mathfrak{A}$$

und endlich

$$\left.\begin{array}{cccccc} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \\ A & \mathbf{A} & \mathbf{B} & B & C & \mathbf{\Gamma} \end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{Pole und} \\ \text{Polaren}\end{array}\ \text{in Bezug auf } \mathfrak{B}.$$

Der Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ ist also ein dem Vierseit $B\mathbf{B}C\mathbf{\Gamma}$ einbeschriebener harmonischer Kegelschnitt, für welchen die Seitenpaare $B$ und $\mathbf{B}$, $C$ und $\mathbf{\Gamma}$ als zugeordnete aufgefasst sind, ebenso ist $\mathfrak{B}$ ein dem Vierseit $C\mathbf{\Gamma}A\mathbf{A}$ einbeschriebener harmonischer Kegelschnitt und $\mathfrak{C}$ ein dem Vierseit $A\mathbf{A}B\mathbf{B}$ einbeschriebener. Es giebt aber nach § 27 nur einen einzigen harmonischen Kegelschnitt, welcher bei gegebener Zuordnung einem gegebenen Viereck einbeschrieben oder Vierseit umschrieben ist, und zugleich ersehen wir aus der letzten Zusammenstellung, dass das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit Polarfiguren rücksichtlich jedes der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ sind, indem nur die

drei einfachen Vierecke, aus denen das vollständige Vierseit besteht, den drei einfachen Vierseiten, aus welchen das vollständige Viereck besteht, in verschiedener Weise entsprechen bei $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; da also auch die einfachen Vierseite die Polarfiguren der einfachen Vierecke sind, so müssen die jenen einbeschriebenen harmonischen Kegelschnitte die Polarfiguren der diesen umschriebenen Kegelschnitte sein; es folgt hieraus, dass die drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ die merkwürdige Eigenschaft besitzen, dass jeder seine eigene Polarfigur ist, wenn er in Bezug auf irgend einen der andern polarisirt wird. Um z. B. die Polarfigur des Kegelschnitts $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$ zu erhalten, müssen wir von den vier Punkten $b\,\beta\,c\,\gamma$ und den in ihnen stattfindenden Tangenten $B\,\mathbf{B}\,C\,\Gamma$ die Polaren und Pole rücksichtlich $\mathfrak{B}$ nehmen; erstere sind beziehlich $\mathbf{B}\,B\,C\,\Gamma$ und letztere $\beta\,b\,c\,\gamma$; der Polarkegelschnitt geht also durch dieselben vier Punkte und hat dieselben vier Tangenten in ihnen, wie der zu polarisirende; er coincidirt daher mit ihm. Dasselbe geht hervor, wenn wir den dritten Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ als Basis nehmen. Dieser eigenthümliche Zusammenhang der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$, wonach jeder sich selbst wieder erzeugt, lässt sich noch deutlicher überblicken, wenn wir von den Punkten eines dieser Kegelschnitte die Polaren in Bezug auf einen zweiten aufsuchen, welche selbst Tangenten des ersten sein müssen, und dabei zugleich die Berührungspunkte der letzteren ermitteln. Nehmen wir irgend einen Punkt $\mathfrak{a}$ auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ an, so muss seine Polare in Bezug auf $\mathfrak{B}$ eine Tangente von $\mathfrak{A}$ sein, möge sie den Berührungspunkt $\mathfrak{a}'$ haben; dann wird die Polare von $\mathfrak{a}'$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$ ebenfalls eine Tangente von $\mathfrak{A}$ sein und offenbar den zuerst angenommenen Punkt $\mathfrak{a}$ zum Berührungspunkt haben; nennen wir für den Augenblick diese beiden Tangenten in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ am Kegelschnitt $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}'}$ und ihren Schnittpunkt $\mathfrak{z}$, so ist in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}_{\mathfrak{a}'}$ Pol und Polare, ebenfalls auch $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{t}_\mathfrak{a}$, folglich auch $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$; in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ sind aber ebenfalls $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ Pol und Polare, weil seine Tangenten in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ durch $\mathfrak{z}$ gehen. Der Punkt $\mathfrak{z}$ und die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ sind daher gemeinschaftlich für beide Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Pol und Polare, sie müssten also dem gemeinschaftlichen Tripel angehören; dies ist aber $xyz$, also haben die Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei und so-

gar unendlich-viele gemeinschaftliche Tripel und dies ist (§ 53) nicht anders möglich, als wenn sie eine doppelte Berührung haben; sie haben nun in der That eine doppelte Berührung in den Punkten $c$ und $\gamma$; $z$ und $Z$ sind gemeinschaftlich Pol und Polare für beide Kegelschnitte und haben in Bezug auf beide dasselbe Strahl- und Punktsystem; alle Tripel konjugirter Punkte, welche beiden Kegelschnitten gemeinschaftlich sind, müssen daher eine Ecke in $z$ und eine Seite in $Z$ haben und es folgt daraus, dass der Punkt $\mathfrak{z}$ in $Z$ liegen und die Verbindungslinie $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ durch $z$ laufen muss. Um also die Polare eines beliebigen Punktes $\mathfrak{a}$ des Kegelschnitts $\mathfrak{A}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$ zu erhalten, ziehen wir $\mathfrak{a}z$, welches in $\mathfrak{a}'$ dem $\mathfrak{A}$ zum andern Mal begegnet; dann ist die Tangente in $\mathfrak{a}'$ an $\mathfrak{A}$ die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$; um gleicherweise die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}$ zu erhalten, ziehen wir $\mathfrak{a}y$, welches in $\mathfrak{a}''$ dem $\mathfrak{A}$ zum andern Male begegnet; die Tangente in $\mathfrak{a}''$ an $\mathfrak{A}$ ist dann die Polare von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{C}$; hieraus folgt zugleich, dass die Verbindungslinie $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''$ durch $x$ gehen muss (§ 31). Jeder durch $x$ gehende Strahl trifft also den Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ in zwei solchen Punkten, dass die Tangenten derselben die Polaren in Bezug auf $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ von ein und demselben dritten Punkte des $\mathfrak{A}$ sind, und das Analoge gilt von $y$ und $z$.

Ferner lassen sich die Mittelpunkte der drei Kegelschnitte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ leicht ermitteln; da $a\alpha$ die Berührungssehne und $x$ ihr Pol für die Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ist, so muss, wenn wir mit $\mu$ die Mitte der Berührungssehne $a\alpha$ bezeichnen, $x\mu$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gehen; ist $\mu'$ die Mitte der Sehne $b\beta$, so muss $y\mu'$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ gehen, folglich ist der Schnittpunkt $(x\mu, y\mu')$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$; ist endlich $\mu''$ die Mitte der Sehne $c\gamma$, so geht $z\mu''$ durch die Mittelpunkte der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und daher ist:

$(x\mu, y\mu') = \mathfrak{M}''$ der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$,
$(y\mu', z\mu'') = \mathfrak{M}$ „ „ „ „ $\mathfrak{A}$,
$(z\mu'', x\mu) = \mathfrak{M}'$ „ „ „ „ $\mathfrak{B}$.

Die drei Punkte $\mu\,\mu'\,\mu''$ liegen als die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits auf einer Geraden (§ 43). Da wir von den drei harmonisch zugeordneten Kegelschnitten ein ihnen gemeinsames Tripel $x\,y\,z$ und die Mittelpunkte $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{M}''$

kennen, so lässt sich nach der in § 45 gemachten Bemerkung jetzt auch die Gattung der Kegelschnitte bestimmen. Wir sehen nämlich, dass die drei Mitten $\mu\,\mu'\,\mu''$ der Diagonalen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ des vollständigen Vierseits nothwendig ausserhalb der Seiten des Diagonaldreiecks $xyz$ liegen müssen, denn es sind $yz$ zu $a\alpha$ harmonisch gelegen und die Mitte des einen Paares zugeordneter Punkte $a\alpha$ liegt offenbar ausserhalb des andern Paares zugeordneter (wegen des hyperbolischen Punktsystems); wenn aber eine Transversale die Seiten eines Dreiecks $xyz$ so trifft, dass die drei Schnittpunkte $\mu\,\mu'\,\mu''$ ausserhalb der drei Seiten $yz$, $zx$, $xy$ zu liegen kommen, so wird in dem vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $x\mu$, $y\mu'$, $z\mu''$ und dessen Diagonalpunkte $\mathfrak{M}''\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'$ sind, nothwendig einer zwischen $x\mu$, ein anderer zwischen $y\mu'$ liegen, der dritte aber ausserhalb $x\mu$ und $y\mu'$. Von den 7 Räumen, in welche die Ebene durch die Seiten des Dreiecks $xyz$ zertheilt wird, müssen also zwei hyperbolische Räume $(h)$ zwei von den Mittelpunkten enthalten, während der dritte entweder in den dritten hyperbolischen oder den gegenüberliegenden elliptischen Raum hineinfallen wird, also: Von drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten müssen entweder alle drei Hyperbeln oder einer Ellipse und die beiden andern Hyperbeln sein. Als besonderen Fall der letzten Art giebt es ein sehr einfaches Beispiel von drei harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten: Ist nämlich insbesondere $z$ der Mittelpunkt des als Ellipse angenommenen Kegelschnitts $\mathfrak{C}$ und sind die Tripelstrahlen $X$ und $Y$ die Axen der Ellipse, so werden die beiden andern zugeordnet-harmonischen Kegelschnitte zwei Hyperbeln, deren eine die Ellipse in den Scheiteln der grossen Axe, die andere in den Scheiteln der kleinen Axe doppelt berührt, indem die beiden Hyperbeln dieselben Asymptoten haben, also konjugirte Hyperbeln sind, und die Asymptoten dieser Hyperbeln in die Richtungen der beiden gleichen konjugirten Durchmesser der Ellipse fallen. Dies ist der einfachste Fall dreier harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte, welche, in Bezug auf einander polarisirt, sich selbst wiedererzeugen. Wählt man für $\mathfrak{C}$ einen Kreis, so bestehen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ aus gleichseitigen Hyperbeln, welche in den Endpunkten zweier zu einander rechtwinkligen Durchmesser den Kreis berühren und dieselben Asymptoten haben.

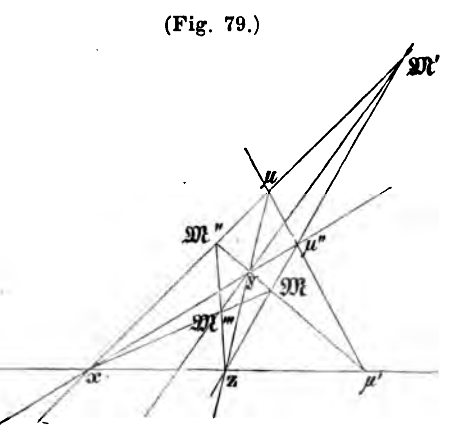
In eigenthümlicher Art tritt zu den harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}$ noch ein vierter imaginärer Kegelschnitt $\mathfrak{D}$, von dem man sagen kann, dass er dieselben Beziehungen darbietet, wie die drei reellen (vgl. § 56). Wir haben nämlich oben drei Zuordnungen der Punkte $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ zu den Geraden $A\mathbf{A}$, $B\mathbf{B}$, $C\mathbf{\Gamma}$ erkannt, wonach diese Polaren jener sind; durch jede dieser Zuordnungen wurde ein Kegelschnitt bestimmt, indem eigentlich mehr Bedingungen dadurch gesetzt waren, die sich aber nicht widersprachen; jetzt können wir noch eine vierte Zuordnung festsetzen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma \text{ Pole und} \\ \mathbf{A}\ A\ \mathbf{B}\ B\ \mathbf{\Gamma}\ C \text{ Polaren} \end{array}\right\}$$

in Bezug auf einen unbekannten zu suchenden Kegelschnitt $\mathfrak{D}$; für diesen Kegelschnitt müssen sowohl $xa\alpha$ als auch $yb\beta$ und ebenso $zc\gamma$, endlich auch $xyz$ je ein Tripel konjugirter Punkte sein. Auf den drei Tripelstrahlen $X\ Y\ Z$ kennen wir also die drei Punktsysteme, welche dem Kegelschnitt $\mathfrak{D}$ zugehören müssen; da diese alle drei elliptisch sind (wegen der harmonischen Eigenschaft des vollständigen Vierseits), so ist es ersichtlich, dass der ganze Kegelschnitt imaginär sein muss; wir erkennen dies aber auch, indem wir seinen Mittelpunkt aufsuchen; das elliptische Punktsystem, von dem $yz$ und $a\alpha$ zwei Paare konjugirter Punkte sind, hat nämlich zum Mittelpunkt denjenigen Punkt $\mathfrak{m}$, in welchem $yz$ von $x\mathfrak{M}$ getroffen wird, denn dasselbe Punktsystem gehört auch dem Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ zu, und da $x$ und $X$ Pol und Polare sind, so muss $x\mathfrak{M}$ durch $\mathfrak{m}$ gehen; die drei auf diese Weise erhaltenen Linien $x\mathfrak{M}$, $y\mathfrak{M}'$, $z\mathfrak{M}''$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{M}'''$ (nach bekannten harmonischen Eigenschaften), dem Mittelpunkte des Kegelschnitts $\mathfrak{D}$; durch diesen Mittelpunkt und das Tripel $xyz$ ist der Kegelschnitt schon vollständig bestimmt; es zeigt sich nun, dass er imaginär sein muss, weil $\mathfrak{M}'''$ in das Innere des Dreiecks $xyz$ hineinfällt (§ 45), denn die drei Punkte $\mu\ \mu'\ \mu''$ liegen, wie wir oben gesehen haben, in einer geraden Linie, welche die Seiten des Dreiecks $xyz$ in ihren Verlängerungen trifft. Da nun (Fig. 79) die Punkte $x\mu$, $y\mu'$, $z\mu''$ die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen Diagonalen sich in $\mathfrak{M}\ \mathfrak{M}'\ \mathfrak{M}''$ schneiden, so werden $x\mathfrak{M}$ und $x\mathfrak{M}'$ harmonisch getrennt durch $xy$ und $xz$, und da $x\mathfrak{M}'$ die Linie $yz$ im Punkte $\mu$ ausserhalb $yz$ trifft, so

muss $x\mathfrak{M}$ dieselbe zwischen $yz$ treffen, ebenso muss $y\mathfrak{M}'$ die Seite $zx$ zwischen ihren Endpunkten treffen und gleicherweise die dritte $z\mathfrak{M}''$; der Schnittpunkt $\mathfrak{M}'''$ liegt daher nothwendig innerhalb des Dreiecks $xyz$ und der Kegelschnitt $\mathfrak{D}$, für welchen $xyz$ ein Tripel und $\mathfrak{M}'''$ der Mittelpunkt ist, wird also imaginär. Aus dem Umstande, dass die drei Strahlen $x\mathfrak{M}$, $y\mathfrak{M}'$, $z\mathfrak{M}''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{M}'''$ schneiden oder $xyz$ das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''\mathfrak{M}'''$ ist, geht hervor, dass für den durch den Mittelpunkt $\mathfrak{M}'''$ und das Tripel $xyz$ bestimmten imaginären Kegelschnitt $\mathfrak{D}$ in der That

(Fig. 79.)




$$\left.\begin{array}{cccccc} a & \alpha & b & \beta & c & \gamma \\ \mathbf{A} & A & \mathbf{B} & B & \mathbf{\Gamma} & C \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Pole und} \\ \text{Polaren}\end{array} \text{ in Bezug auf } \mathfrak{D}$$

sind. Fügen wir diesen vierten imaginären Kegelschnitt den oben untersuchten dreien hinzu, so haben wir für diese **vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte** folgende Zusammengehörigkeit von Pol und Polare:

| für | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{C}$ | $\mathfrak{D}$ |
|---|---|---|---|---|
| Pol . . . . | $a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$ | $a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$ | $a\ \alpha\ b\ \beta\ b\ \gamma$ | $a\ \alpha\ b\ \beta\ c\ \gamma$ |
| Polare . . | $\mathbf{A}\ A\ B\ \mathbf{B}\ C\ \mathbf{\Gamma}$ | $A\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}\ B\ C\ \mathbf{\Gamma}$ | $A\ \mathbf{A}\ B\ \mathbf{B}\ \mathbf{\Gamma}\ C$ | $\mathbf{A}\ A\ \mathbf{B}\ B\ \mathbf{\Gamma}\ C$ |

Aus dieser Zusammenstellung tritt es aber klar vor die Augen, dass aus jedem der vier Kegelschnitte als Polarfigur in Bezug auf einen der übrigen er selbst hervorgeht, denn durch Polarisation wird aus Pol und Polare für die eine Figur Polare und Pol für die Polarfigur; wenn wir daher einen der vier Kegelschnitte in Bezug auf einen andern polarisiren wollen, so suchen wir von den Punkten $a\,\alpha$ .. und den Geraden $A\,\mathbf{A}$ ..., wie sie bei dem gewählten Kegelschnitte zusammengehören, die Polaren und Pole in Bezug auf die gewählte Basis und gelangen dadurch wieder zu denselben Geraden und denselben zugehörigen

Punkten; der Kegelschnitt muss also seine eigene Polarfigur sein, weil er durch diese sechs Paare von Polen und Polaren schon mehr, als bestimmt ist. Auch für den imaginären Kegelschnitt 𝔇 tritt die Eigenschaft der doppelten Berührung zu Tage; er hat nämlich mit dem Kegelschnitt 𝔄 den Punkt $x$ und die Gerade $X$ als Pol und Polare gemeinschaftlich und das Punktsystem auf $X$, welches von den Paaren $yz$ und $a\alpha$ bestimmt wird, ist ebenfalls beiden Kegelschnitten zugehörig; sie haben daher eine ideelle doppelte Berührung (§ 51) und $X$ zur gemeinschaftlichen Berührungssehne, $x$ zum Durchschnittspunkt der gemeinschaftlichen Tangenten; ebenso 𝔇 und 𝔅, $Y$ und $y$, endlich 𝔇 und ℭ, $Z$ und $z$. Wir können hiernach die vier Kegelschnitte 𝔄 𝔅 ℭ 𝔇 auf dreierlei Art in Paare je zweier gewissermassen zusammengehöriger Kegelschnitte theilen, nämlich: Die Kegelschnitte 𝔅 und ℭ haben eine reelle doppelte Berührung in den Punkten $a\alpha$, sie haben also $X$ zur gemeinschaftlichen Berührungssehne und $x$ zum Pol derselben; dagegen 𝔄 und 𝔇 haben eine ideelle doppelte Berührung mit derselben Berührungssehne $X$ und dem Pol $x$; dies ist die erste Art und ähnlich die übrigen; es gehören also zusammen:

𝔅 und ℭ, 𝔄 und 𝔇 in Bezug auf $x$ und $X$,
ℭ „ 𝔄, 𝔅 „ 𝔇 „ „ „ $y$ „ $Y$,
𝔄 „ 𝔅, ℭ „ 𝔇 „ „ „ $z$ „ $Z$.

Aus dem Obigen geht hervor, wie die vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte bei dem völlig reellen vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ und dessen Diagonalpunkte $xyz$ sind, zum Vorschein kommen; eine sehr einfache und natürliche Entstehungsweise solcher vier harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte siehe § 56. Wir übergehen hier die Erörterung der Modifikationen, welche eintreten, wenn das vollständige Vierseit nicht mehr völlig reell angenommen wird, sondern nach der Art II. oder III. (§ 53) beschaffen ist; in dem von uns angenommenen Fall tritt nun zu der bereits erwähnten Eigenschaft, dass jeder der vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte seine eigene Polare ist, noch eine etwas allgemeinere; bezeichnen wir nämlich das vollständige Vierseit, dessen vier Seiten $abc$, $a\beta\gamma$, $\alpha b\gamma$, $\alpha\beta c$ sind, mit 𝔅 und das vollständige Viereck, dessen vier Ecken $\mathbf{AB\Gamma}$, $\mathbf{A}BC$, $A\mathbf{B}C$, $AB\mathbf{\Gamma}$ sind, mit $V$, so sind 𝔅 und $V$ Polarfiguren in Bezug auf jeden der vier harmonisch-

zugeordneten Kegelschnitte, aber jedesmal entsprechen sich Ecken und Seiten in anderer Weise, was unmittelbar aus dem oben zusammengestellten Schema von Polen und Polaren der vier Kegelschnitte abzulesen ist. Es zeigt sich nun ferner, dass irgend ein dem Vierseit $\mathfrak{B}$ einbeschriebener Kegelschnitt zu seiner Polarfigur in Bezug auf jeden der vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitte ein und denselben dem Viereck $V$ umschriebenen Kegelschnitt hat. Da nämlich vier Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältniss haben, wie ihre vier Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt, so wird, wenn irgend ein dem Vierseit $\mathfrak{B}$ einbeschriebener Kegelschnitt die Seite $a\,b\,c$ in $p$ berührt, die Polare von $p$ in Bezug auf $\mathfrak{A}$ diejenige Gerade $\mathfrak{L}$ sein, welche aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse $(a\,b\,c\,p) = (\mathbf{A}\,B\,C\,\mathfrak{L})$ konstruirbar ist; diese Gerade ist gleichzeitig die Polare eines Punktes $p'$ der Geraden $\alpha\,\beta\,c$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$, da

$$(\mathbf{A}\,B\,C\,\mathfrak{L}) = (\alpha\,\beta\,c\,p');$$

aus der Gleichheit:

$$(a\,b\,c\,p) = (\alpha\,\beta\,c\,p')$$

folgt, dass sich $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $p\,p'$ in einem Punkte schneiden müssen oder $p\,z\,p'$ in einer Geraden liegen; der angenommene Kegelschnitt, welcher dem Vierseit $\mathfrak{B}$ einbeschrieben ist und $a\,b\,c$ in $p$ berührt, muss aber (§ 27) $\alpha\,\beta\,c$ in $p'$ berühren und die Polare von $p$ in Bezug auf $\mathfrak{A}$ ist identisch mit der Polare von $p'$ in Bezug auf $\mathfrak{B}$, nämlich die Gerade $\mathfrak{L}$; folglich ist die Polarfigur des angenommenen Kegelschnitts in Bezug auf die Basis $\mathfrak{A}$ und in Bezug auf die Basis $\mathfrak{B}$ derselbe, dem Viereck $V$ umschriebene Kegelschnitt und dasselbe folgt in gleicher Weise für die andern Basen.

Hieran knüpft sich umgekehrt die Aufgabe: Zu zwei in der Ebene beliebig gegebenen Kegelschnitten einen solchen dritten zu finden, in Bezug auf welchen der eine gegebene Kegelschnitt die Polarfigur des andern ist.*) Es liegt nach dem Obigen nahe, zu vermuthen, dass es im Allgemeinen

*) Diese Aufgabe hat Steiner in einer am 26. März 1846 in der Berliner Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung behandelt, wovon nur die Anzeige in den Monats-Berichten und in Crelle's Journal, Bd. 32, S. 79 sich findet. Eine analytische Behandlung des Problems hat Herr J. Rosanes in seiner Inaugural-Dissertation: de polarium reciprocarum theoria observationes, Breslau 1865, geliefert.

vier Basen geben wird, welche die gegenseitige Lage von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten besitzen, und diese Vermuthung bestätigt sich leicht. Zuvörderst ist klar, dass, wenn die beiden gegebenen Kegelschnitte $K$ und $K_1$, deren einer die Polarfigur des andern sein soll, eine reelle gemeinschaftliche Tangente haben, sie nothwendig auch einen reellen Schnittpunkt haben müssen, denn der Pol jener in Bezug auf die angenommene Basis muss sowohl ein Punkt von $K$, wie von $K_1$ sein; es folgt hieraus, dass von den in § 53 unterschiedenen Fällen, welche allein bei der gegenseitigen Lage zweier Kegelschnitte eintreten können, die Fälle II. und III. (sobald $K$ und $K_1$ vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder sobald sie vier reelle gemeinschaftliche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt haben) sofort auszuschliessen sind, also nur die Fälle I. und IV., wo das reelle gemeinschaftliche Tripel nach der Art ($\alpha$) liegt, und anderseits der Fall V., wo es nur theilweise reell ist, übrig bleiben.

Die Fälle I. und IV. (wo die beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben) lassen sich zusammen behandeln; wir ermitteln nämlich zunächst das reelle gemeinschaftliche Tripel $x\,y\,z$ und bemerken, dass Pol und Polare eines Kegelschnitts in Bezug auf irgend eine Basis polarisirt nothwendig Polare und Pol für die Polarfigur werden; wenn also $x$ und $X$ gleichzeitig für beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$, deren einer die Polarfigur des andern sein soll, Pol und Polare sind, so müssen in Bezug auf eine solche Basis die entsprechenden Elemente $X'$ und $x'$ auch für $K$ und $K_1$ gleichzeitig Polare und Pol sein; dasselbe gilt von $y$ und $Y$, $z$ und $Z$, deren entsprechende Elemente in Bezug auf die Basis $Y'$ und $y'$, $Z'$ und $z'$ seien; da nun $x\,y\,z$ und $X\,Y\,Z$ ein Tripel bilden, so bilden auch $X'\,Y'\,Z'$ und $x'y'z'$ ein Tripel und zwar ein solches, welches beiden Kegelschnitten $K$ und $K_1$ gemeinschaftlich sein muss; nun haben aber $K$ und $K_1$ nur ein gemeinschaftliches Tripel, es coincidirt daher $x'y'z'$ mit $x y z$, d. h. das gemeinschaftliche Tripel $x\,y\,z$ der beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ muss zugleich ein Tripel für die unbekannte Basis sein. Wir wissen ferner (§ 53), dass in den Fällen I. und IV. von dem gemeinschaftlichen Tripel $x y z$ nothwendig ein Tri-

pelpunkt $z$ innerhalb beider Kegelschnitte liegt und die durch ihn gehenden beiden Tripelstrahlen $X\,Y$ die Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in reellen Punktenpaaren schneiden, während der dritte Tripelstrahl $Z$, welcher die Punkte $x$ und $y$ enthält, keinen von beiden Kegelschnitten trifft. Möge der Tripelstrahl $X$ dem Kegelschnitte $K$ in $p$ und $\pi$, dem $K_1$ in $p_1$ und $\pi_1$, dagegen $Y$ dem Kegelschnitte $K$ in $r$ und $\varrho$, dem $K_1$ in $r_1$ und $\varrho_1$ begegnen; die Punkte $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$ sind Paare konjugirter Punkte eines hyperbolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $z$ und $y$ sind, und ebenso $r$ und $\varrho$, $r_1$ und $\varrho_1$ Paare konjugirter Punkte eines zweiten Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $z$ und $x$ sind. Die Tangenten in den Punkten $p\pi p_1\pi_1$ sind $xp$, $x\pi$, $xp_1$, $x\pi_1$ und in den Punkten $r\varrho r_1\varrho_1$ die Verbindungslinien: $yr$, $y\varrho$, $yr_1$, $y\varrho_1$. Wenn nun der Kegelschnitt $K_1$ die Polarfigur von $K$ sein soll in Bezug auf eine noch zu suchende Basis, so muss die Polare von $p$ in Bezug auf diese Basis, welche mit $K$ und $K_1$ das Tripel $xyz$ gemeinsam hat, einmal durch $x$ gehen, weil $p$ auf $X$ liegt, und anderseits eine Tangente der Polarfigur $K_1$ sein; sie muss also eine der beiden Tangenten $xp_1$ oder $x\pi_1$ sein und ebenso muss die Polare von $\pi$ in Bezug auf die zu suchende Basis eine der beiden Tangenten $x\pi_1$ oder $xp_1$ sein. Das Gleiche gilt für den andern Strahl $Y$. Die Polare von $r$ in Bezug auf die noch unbekannte Basis muss $yr_1$ oder $y\varrho_1$ sein und die Polare von $\varrho$: $y\varrho_1$ oder $yr_1$; hiernach stellen sich nur vier Möglichkeiten heraus: für die unbekannte Basis sind:

$$1)\quad \left.\begin{matrix} p & \pi & r & \varrho \\ p_1 & \pi_1 & r_1 & \varrho_1 \end{matrix}\right\}\ \text{je zwei konjugirte Punkte}$$

$$2)\quad \left.\begin{matrix} p & \pi & r & \varrho \\ p_1 & \pi_1 & \varrho_1 & r_1 \end{matrix}\right\}\ \text{- - - -}$$

$$3)\quad \left.\begin{matrix} p & \pi & r & \varrho \\ \pi_1 & p_1 & r_1 & \varrho_1 \end{matrix}\right\}\ \text{- - - -}$$

$$4)\quad \left.\begin{matrix} p & \pi & r & \varrho \\ \pi_1 & p_1 & \varrho_1 & r_1 \end{matrix}\right\}\ \text{- - - -}$$

Dem entsprechend werden sich vier Basen ermitteln lassen, indem auf den Tripelstrahlen $X\,Y$ die Punktsysteme bekannt sind, welche einer jeden zugehören müssen; auf $X$ bilden nämlich die vier Punkte $p\pi p_1\pi_1$ zwei Punktenpaare $p\pi$, $p_1\pi_1$ eines hyper-

bolischen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $y$ und $z$ sind; anderseits rufen dieselben vier Punkte $p \pi p_1 \pi_1$ paarweise als konjugirte Punkte aufgefasst noch zwei neue Punktsysteme hervor (§ 16), von denen nothwendig eines elliptisch, das andere hyperbolisch ist; dasjenige, bei welchem $p$ und $p_1$, $\pi$ und $\pi_1$ konjugirte Punkte sind, sei das hyperbolische $(h_1)$ und dasjenige, bei welchem $p$ und $\pi_1$, $\pi$ und $p_1$ konjugirte sind, sei das elliptische Punktsystem $(e_1)$; in gleicher Weise werden auf dem Tripelstrahl $Y$ durch die vier Punkte $r \varrho r_1 \varrho_1$ drei Punktsysteme hervorgerufen, deren erstes durch die Paare $r$ und $\varrho$, $r_1$ und $\varrho_1$ bestimmt wird und hyperbolisch ist mit den Asymptotenpunkten $z$ und $x$, während von den beiden übrigen nothwendig eines, hyperbolisch $(h_2)$, durch die Punktenpaare $r$ und $r_1$, $\varrho$ und $\varrho_1$, das andere, elliptisch $(e_2)$, durch die Punktenpaare $r$ und $\varrho_1$, $\varrho$ und $r_1$ bestimmt wird. Die gesuchte Basis hat daher auf den beiden Tripelstrahlen $X$ und $Y$

| | | | |
|---|---|---|---|
| entweder | die Punktsysteme: | | |
| | $(h_1)$ | $(h_2)$ | zu zugehörigen. |
| oder | $(h_1)$ | $(e_2)$ | |
| - | $(e_1)$ | $(h_2)$ | |
| - | $(e_1)$ | $(e_2)$ | |

Die beiden hyperbolischen Punktsysteme $(h_1)$ und $(h_2)$ auf $X$ und $Y$ haben Asymptotenpunkte, welche wir beziehungsweise mit $a \alpha$ und $b \beta$ bezeichnen wollen; diese Asymptotenpunkte sind in bekannter Weise zu ermitteln, da die Punktsysteme durch die bekannten Paare konjugirter Punkte vollständig bestimmt sind; sie stehen auch zu den elliptischen Punktsystemen $(e_1)$ und $(e_2)$ in eigenthümlicher Beziehung; weil $a \alpha$ die Asymptotenpunkte des durch die Paare konjugirter Punkte $p$ und $p_1$, $\pi$ und $\pi_1$ bestimmten Punktsystems $(h_1)$ sind, so findet die Gleichheit der Doppelverhältnisse statt:

$$(p \pi a \alpha) = (p_1 \pi_1 a \alpha) = (\pi_1 p_1 \alpha a), \qquad (§\ 6)$$

folglich sind $a$ und $\alpha$ ein Paar konjugirter Punkte desjenigen Punktsystems, welches durch die Paare $p$ und $\pi_1$, $\pi$ und $p_1$ bestimmt wird, d. h. des Punktsystems $(e_1)$, weil entsprechende gleiche Strecken $a \alpha$ und $\alpha a$ auf einander fallen (§ 16). Ferner folgt daraus, dass $y z$ die Asymptotenpunkte des durch $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$ bestimmten hyperbolischen Punktsystems sind,

$$(p p_1 y z) = (\pi \pi_1 y z) = (\pi_1 \pi z y),$$

also auch $y z$ sind ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems $(e_1)$; durch die beiden Paare $a$ und $\alpha$, $y$ und $z$ ist daher das Punktsystem $(e_1)$ bestimmt, sowie das Punktsystem $(h_1)$ durch die Asymptotenpunkte $a$ und $\alpha$ bestimmt wird; endlich bemerken wir noch, dass auch $y$ und $z$ ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems $(h_1)$ sind, also zu $a\alpha$ harmonisch liegen, was aus der Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(p\,\pi_1\,a\,\alpha) = (p_1\,\pi\,a\,\alpha) = (\pi\,p_1\,\alpha\,a)$$

folgt; denn hieraus geht hervor, dass $a\alpha$ ein Paar konjugirter Punkte für das durch $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$ bestimmte Punktsystem ist, dessen Asymptotenpunkte $y z$ sind.

In ganz gleicher Weise besitzen die Asymptotenpunkte $b\beta$ auf dem zweiten Tripelstrahl $Y$ die Eigenschaft, harmonisch zu $xz$ zu liegen, und die beiden Punktenpaare $b$ und $\beta$, $x$ und $z$ bestimmen das elliptische Punktsystem $(e_2)$, während $b$ und $\beta$ als Asymptotenpunkte das hyperbolische Punktsystem $(h_2)$ bestimmen. Endlich folgt noch, weil $a\alpha$ harmonisch liegen zu $zy$ und $b\beta$ zu $zx$, dass die Verbindungslinien $ab$ und $\alpha\beta$ sich in einem Punkte $c$ der Geraden $xy$ und ebenso $a\beta$, $\alpha b$ sich in einem Punkte $\gamma$ der vorigen Geraden $xy$ treffen müssen; also die Punkte $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sind die sechs Ecken (drei Paar Gegenecken) eines vollständigen Vierseits $\mathfrak{V}$, dessen Diagonaldreieck $x y z$ ist. Nach diesen Erörterungen werden sich jetzt die vier Basen ergeben, in Bezug auf welche $K$ und $K_1$ Polarfiguren sein sollen. Fassen wir zunächst den ersten Fall der beiden hyperbolischen Punktsysteme $(h_1)$ und $(h_2)$ ins Auge, so müsste die gesuchte Basis die Eigenschaft besitzen, dass in Bezug auf sie von $p$ die Polare $xp_1$, von $\pi$ die Polare $x\pi_1$ und auch von $p_1$ die Polare $xp$, von $\pi_1$ die Polare $x\pi$ wäre; eine solche Basis müsste also $xa$ und $x\alpha$ in den Punkten $a$ und $\alpha$ berühren; zweitens müsste sie analoger Weise $yb$ und $y\beta$ in den Punkten $b$ und $\beta$ berühren; es giebt nun aber einen solchen reellen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, wie wir aus der obigen Betrachtung harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte wissen, und derselbe ist durch die geforderten Bedingungen zwar mehr als bestimmt, aber jene Bedingungen widersprechen sich nicht. In Bezug auf eine solche Basis ist, wie leicht zu sehen, in der That der Kegelschnitt $K_1$ die Polarfigur von $K$ und umgekehrt, denn durch die vier Punkte $p\pi r\varrho$ und ihre Tangenten ist $K$ mehr als bestimmt. Im zweiten Falle giebt es einen reellen

Kegelschnitt 𝔅, welcher $xa$ und $x\alpha$ in den Punkten $a$ und $\alpha$ berührt und gleichzeitig das Punktsystem $(e_2)$, welches durch die Paare $b\beta$, $zx$ bestimmt wird, sowie das mit ihm perspektivische Strahlsystem durch $y$ zu zugehörigen hat; im dritten Falle giebt es einen reellen Kegelschnitt 𝔄, welcher $yb$ und $y\beta$ in den Punkten $b$ und $\beta$ berührt und das elliptische Punktsystem $(e_1)$, durch die Paare $a\alpha$, $zy$ bestimmt, sowie das mit ihm perspektivische Strahlsystem durch $x$ zu zugehörigen hat; endlich im vierten Falle giebt es einen imaginären Kegelschnitt 𝔇, welcher die beiden elliptischen Punktsysteme $(e_1)$ und $(e_2)$ und die mit ihnen perspektivischen Strahlsysteme durch $x$ und $y$ zu den zugehörigen hat. Für jeden dieser vier Kegelschnitte als Basis müssen $K$ und $K_1$ Polarfiguren sein, was in derselben Art, wie für den Kegelschnitt ℭ, sich ergiebt. Diese vier Basen haben aber die Eigenschaft von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten, welche sich auf das vollständige Vierseit beziehen, dessen drei Paar Gegenecken $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, und dessen Diagonaldreieck $xyz$ ist. Nach dem Früheren ist daher von den vier Basen eine imaginär, die drei andern sind reell und entweder alle drei Hyperbeln oder eine Ellipse und die beiden andern Hyperbeln. Die Konstruktion dieser Kegelschnitte ist in der Herleitung selbst enthalten. Wir können nunmehr folgendes Resultat zusammenfassen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte $K$ und $K_1$ in der Ebene gegeben, so können im Allgemeinen vier andere Kegelschnitte, von der Beschaffenheit gefunden werden, dass für jeden von ihnen als Basis die gegebenen Kegelschnitte Polarfiguren von einander sind. Diese vier Basen sind vier harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Haben $K$ und $K_1$ entweder vier reelle Schnittpunkte und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, oder vier reelle gemeinschaftliche Tangenten und keinen reellen Schnittpunkt, so ist keine der Basen reell; haben dagegen $K$ und $K_1$ entweder vier reelle Schnittpunkte und vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, oder keinen reellen Schnittpunkt und keine reelle gemeinschaftliche Tangente, so sind von den vier Basen drei reell und eine imaginär; die drei reellen Basen sind entweder alle drei Hyperbeln oder eine Ellipse, und die beiden andern Hyperbeln. Haben

$K$ und $K_1$ endlich zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten, so sind von den vier Basen nur zwei reell und eine ist Ellipse, die andere Hyperbel.

Die letzte Behauptung, welche wir anticipirt haben, bleibt noch zu erweisen; in dem Falle B) (§ 53), wenn die beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ nur zwei reelle Schnittpunkte und zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, giebt es von dem gemeinschaftlichen Tripel nur einen Punkt $x$ und seine beiden Kegelschnitten gemeinschaftliche Polare $X$, welche den einen in $p$ und $\pi$, den andern in $p_1$ und $\pi_1$ trifft; diese Punktenpaare müssen reell sein und einander trennen, so dass $p_1$ zwischen $p$ und $\pi$, $\pi_1$ ausserhalb $p\pi$ liegt, wie in § 53 gezeigt ist; die Kegelschnitte haben ferner eine reelle gemeinschaftliche Sekante, welche durch ihre beiden reellen Schnittpunkte $PQ$ und durch $x$ geht, und eine ideelle gemeinschaftliche Sekante ebenfalls durch $x$; die erstere treffe $X$ in $o$, die letztere in $\bar{\omega}$; endlich haben $K$ und $K_1$ zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, welche sich in einem Punkte $s$ der Geraden $X$ treffen, während die andern beiden imaginären gemeinschaftlichen Tangenten nur ihren reellen Schnittpunkt $\sigma$ auf $X$ haben (d. h. dem Punkte $\sigma$ gehört in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ dasselbe elliptische, dem Punkt $s$ dasselbe hyperbolische Strahlsystem zu). Die Punkte $p\pi p_1\pi_1$ stehen nun zu den vier Punkten $o\bar{\omega}s\sigma$ in einer eigenthümlichen Beziehung, auf welche wir vorher nicht aufmerksam zu machen Veranlassung hatten, deren wir aber hier bedürfen. Es sind nämlich zunächst $o$ und $\bar{\omega}$ ein Paar konjugirter Punkte des durch die beiden Paare $p\pi$ und $p_1\pi_1$ bestimmten elliptischen Punktsystems, weil $xo$ und $x\bar{\omega}$ das einzig reelle Linienpaar des durch $K$ und $K_1$ bestimmten Büschels ist, und anderseits sind auch $s$ und $\sigma$ ein Paar konjugirte Punkte desselben Punktsystems, weil sie das einzig reelle Punktenpaar der durch $K$ und $K_1$ bestimmten Schaar bilden; $X$ schneidet aber das Büschel in einem Punktsystem und die von $x$ an die Kegelschnitte der Schaar gelegten Tangentenpaare bilden ein Strahlsystem. Hierzu kommt noch ein weiterer Zusammenhang: Die vier Punkte $p\pi$, $p_1\pi_1$ bestimmen nämlich ausser dem erwähnten elliptischen Punktsysteme, in anderer Weise zu Paaren geordnet, zwei andere hyperbolische Punktsysteme (§ 16), wenn wir einmal $p$ und $p_1$, $\pi$ und $\pi_1$,

das andere Mal $p$ und $\pi_1$, $\pi$ und $p_1$ als je zwei Paare konjugirter Punkte zur Bestimmung eines Punktsystems auffassen, und es zeigt sich, dass

1) für das elliptische Punktsystem $(e)$ konjugirte Punkte sind:

$$\begin{matrix} p & p_1 & o & s \\ \pi & \pi_1 & \breve{\omega} & \sigma, \end{matrix}$$

2) für das eine hyperbolische Punktsystem $(h)$ konjugirte Punkte sind:

$$\begin{matrix} p & \pi & o & \breve{\omega} \\ p_1 & \pi_1 & s & \sigma, \end{matrix}$$

3) für das andere hyperbolische Punktsystem $(h')$ konjugirte Punkte sind:

$$\begin{matrix} p & \pi & o & s \\ \pi_1 & p_1 & \sigma & \breve{\omega}. \end{matrix}$$

Um dies nachzuweisen, wollen wir umgekehrt den Punkt $s$ für den Fall 2) als konjugirten Punkt von $o$ im Punktsysteme $(h)$ konstruiren und zeigen, dass für den so konstruirten Punkt $s$ das ihm zugehörige Strahlsystem rücksichtlich beider Kegelschnitte $KK_1$ dasselbe wird, woraus folgt, dass er der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten sein muss. Die in § 16 angegebene Konstruktion des sechsten Involutionspunktes, sobald fünf gegeben sind, lässt sich hier folgendermassen benutzen: Wir bestimmen die Schnittpunkte:

$$(P\pi,\ Qp) = \xi, \qquad (Pp_1,\ Q\pi_1) = \xi_1, \quad \text{(Fig. 80)}$$

dann trifft $\xi\xi_1$ den Träger $X$ in demjenigen Punkte $s$, welcher dem $o$ konjugirt ist für das Punktsystem $(h)$; wir erhalten denselben Punkt $s$ auch in anderer Weise, indem wir die Schnittpunkte:

$$(Pp,\ Q\pi) = \eta \quad \text{und} \quad (P\pi_1,\ Qp_1) = \eta_1$$

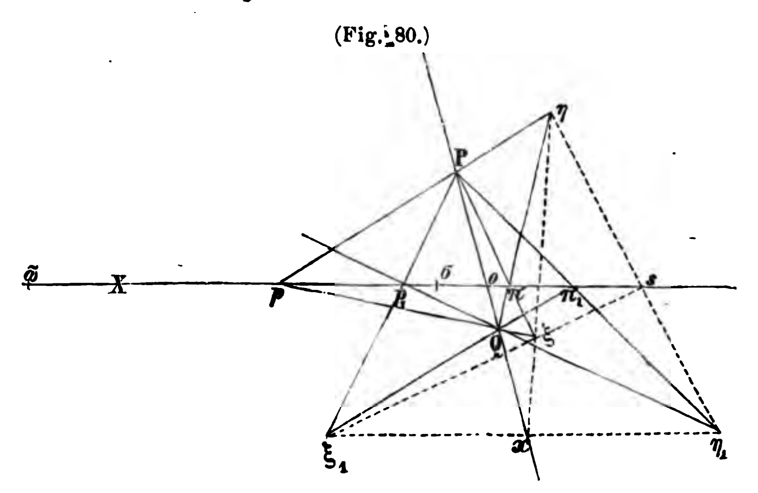
aufsuchen und $\eta\eta_1$ ziehen, welche Linie durch $s$ gehen muss.

Wir suchen jetzt die Pole der Geraden $\xi\xi_1$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ auf und werden sehen, dass sie mit $s$ in gerader Linie liegen müssen, woraus das Uebrige folgt. Um den Pol von $\xi\xi_1 s$ in Bezug auf $K$ zu erhalten, suchen wir den Schnittpunkt der Polaren von $\xi$ und $s$ für den Kegelschnitt $K$. Die Polare von $\xi$ in Bezug auf $K$ ist $\eta o$ (wegen des vollständigen Vierecks $PQp\pi$ im Kegelschnitt $K$); die Polare von $s$ in Bezug auf $K$ geht durch $x$ und den vierten harmonischen Punkt zu $sp\pi$, dem $s$ zugeordnet; sei dieser für den Augenblick $\mathfrak{s}$, also:

$$(p\,\pi\,s\,\mathfrak{s}) = -1,$$

so ist der Schnittpunkt $(\eta\,o,\ x\,\mathfrak{s})$ der Pol von $\xi\,\xi_1$ in Bezug auf $K$; wir erhalten in gleicher Weise den Pol derselben Geraden in

(Fig. 80.)




Bezug auf $K_1$, indem wir den vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{s}_1$ zu $s\,p_1\,\pi_1$ aufsuchen, also:

$$(p_1\,\pi_1\,s\,\mathfrak{s}_1) = -1$$

haben und dann den Schnittpunkt $(\eta_1\,o,\ x\,\mathfrak{s}_1)$ bestimmen. Ferner geht $\xi\eta$ durch $x$, weil $x$ der vierte harmonische Punkt zu $PQo$, dem $o$ zugeordnet ist, und $\xi\,\eta$ ist die Polare von $o$ in Bezug auf $K$, also wenn wir mit $\mathfrak{r}$ den Schnittpunkt von $\xi\,\eta$ mit $X$ bezeichnen, ist:

$$(p\,\pi\,o\,\mathfrak{r}) = -1,$$

ebenso geht auch $\xi_1\,\eta_1$ durch $x$ und ist die Polare von $o$ in Bezug auf $K_1$, also wenn wir mit $\mathfrak{r}_1$ den Schnittpunkt von $\xi_1\,\eta_1$ mit $X$ bezeichnen, ist:

$$(p_1\,\pi_1\,o\,\mathfrak{r}_1) = -1.$$

Aus diesen Beziehungen geht hervor

$$(p\,\pi\,o\,\mathfrak{r}) = (p_1\,\pi_1\,s\,\mathfrak{s}_1) \quad \text{und} \quad (p\,\pi\,s\,\mathfrak{s}) = (p_1\,\pi_1\,o\,\mathfrak{r}_1),$$

folglich haben wir in dem Punktsystem ($h$) folgende Paare konjugirter Punkte:

$$\begin{matrix} p & \pi & o & \mathfrak{r} & \mathfrak{s} & s \\ p_1 & \pi_1 & s & \mathfrak{s}_1 & \mathfrak{r}_1 & o, \end{matrix}$$

und hieraus folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(o\, s\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{s}) = (s\, o\, \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{r}_1),$$

also $o\, s$, $\mathfrak{r}\, \mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}\, \mathfrak{r}_1$ stehen in Involution, folglich ist auch:

$$(o\, s\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_1) = (s\, o\, \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}).$$

Verbinden wir die vier Punkte $o\, s\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_1$ mit $x$, so erhalten wir vier Strahlen, welche resp. durch $o\, s\, \eta\, \eta_1$ gehen, und da $s\, \eta\, \eta_1$ in gerader Linie liegen, so haben die vier Strahlen:

$$o\, x,\; o\, s,\; o\, \eta,\; o\, \eta_1$$

dasselbe Doppelverhältniss, wie die vier Punkte $s\, o\, \mathfrak{s}_1\, \mathfrak{s}$ oder die mit ihnen perspektivischen Strahlen $x\, s$, $x\, o$, $x\, \mathfrak{s}_1$, $x\, \mathfrak{s}$; wir haben daher folgende Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$o\, (x\, s\, \eta\, \eta_1) = x\, (o\, s\, \mathfrak{s}\, \mathfrak{s}_1)$$

und hieraus folgt, dass die drei Punkte:

$$s \quad (o\, \eta,\; x\, \mathfrak{s}) \quad (o\, \eta_1,\; x\, \mathfrak{s}_1)$$

in gerader Linie liegen; folglich liegen die beiden Pole der Geraden $\xi\, \xi_1\, s$ in Bezug auf beide Kegelschnitte $K$ und $K_1$ mit $s$ in gerader Linie; diese beiden durch $s$ gehenden geraden Linien sind daher konjugirte Gerade in Bezug auf beide Kegelschnitte; in ganz gleicher Weise zeigen wir, dass auch die Pole der Geraden $\eta\, \eta_1\, s$ in Bezug auf $K$ und $K_1$ mit $s$ in einer Geraden liegen; wir haben also durch $s$ zwei Paare konjugirter Gerader in Bezug auf beide Kegelschnitte (auch ist das Paar $X$ in $s\, x$ für beide Kegelschnitte konjugirt), der Punkt $s$ hat mithin für beide Kegelschnitte dasselbe zugehörige Strahlsystem und ist daher der Schnittpunkt zweier gemeinschaftlichen Tangenten von $K$ und $K_1$; folglich bilden die drei Punktenpaare $p$ und $p_1$, $\pi$ und $\pi_1$, $o$ und $s$ in der That eine Involution $(h)$; dass dann auch $\bar{\omega}$ und $\sigma$ ein viertes Paar dieses Punktsystems ist, folgt unmittelbar aus dem elliptischen Punktsystem $(e)$, in welchem $\begin{Bmatrix} p & p_1 & s & o \\ \pi & \pi_1 & \sigma & \bar{\omega} \end{Bmatrix}$ vier Paare konjugirter Punkte sind, also:

$$(p\, \pi_1\, \sigma\, o) = (\pi\, p_1\, s\, \bar{\omega}) = (p_1\, \pi\, \bar{\omega}\, s);$$

wenn also $p\, p_1$, $\pi\, \pi_1$, $o\, s$ konjugirte Punkte eines Punktsystems $(h)$ sind, so müssen es auch $\sigma$ und $\bar{\omega}$ sein. Aus den beiden Punktsystemen $(e)$ und $(h)$ folgt nun das dritte $(h')$ von selbst, denn wegen $(e)$ ist $(p\, \pi\, o\, s) = (\pi\, p\, \bar{\omega}\, \sigma)$ und wegen $(h)$

$$(\pi\, p\, \bar{\omega}\, \sigma) = (\pi_1\, p_1\, \sigma\, \bar{\omega}),$$

folglich ist auch:

$$(p\,\pi\,o\,s) = (\pi_1\,p_1\,\sigma\,\tilde{\omega});$$

ferner ist wegen $(e)$

$$(p\,\pi\,o\,\sigma) = (\pi\,p\,\tilde{\omega}\,s)$$

und wegen $(h)$

$$(\pi\,p\,\tilde{\omega}\,s) = (\pi_1 p_1\,\sigma\,o),$$

folglich

$$(p\,\pi\,o\,\sigma) = (\pi_1\,p_1\,\sigma\,o),$$

d. h. $\sigma\,o$ ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems $(h')$ und nach der vorigen Gleichheit auch $s$ und $\tilde{\omega}$ ein Paar. Hierdurch sind nun die oben ausgesprochenen Beziehungen der vier Punkte $p\,\pi\,p_1\,\pi_1$ zu den vier Punkten $o\,\tilde{\omega}\,s\,\sigma$ nachgewiesen; jene bestimmen paarweise kombinirt dieselben drei Punktsysteme $(e)$ $(h)$ $(h')$ wie diese und von den letzten vieren ist jeder der konjugirte der drei übrigen in diesen drei Punktsystemen, und auch umgekehrt. Diese beiden Quadrupel von je vier Punkten stehen also in der eigenthümlichen Verbindung mit einander, welche wir schon früher (§ 16) untersucht haben. (Sind die beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ Kreise, so sind $s$ und $\sigma$ ihre Aehnlichkeitspunkte, $X$ die Centrale, $o$ der Schnittpunkt der letzteren mit der Potenzlinie und $\tilde{\omega}$ unendlich-entfernt; die hier allgemein ausgesprochene Eigenschaft führt in dem speciellen Fall auf die bekannte Eigenschaft der „gemeinschaftlichen Potenz" beider Kreise, welche Steiner im 1. Bande des Crelle'schen Journals S. 175 betrachtet hat.)

Nach dieser vorausgeschickten Auseinandersetzung bemerken wir nun, dass, wenn es eine Basis geben soll, für welche der Kegelschnitt $K_1$ die Polarfigur von $K$ ist und also auch umgekehrt, für eine solche Basis die Polare des Punktes $p$ nothwendig durch $x$ gehen und zugleich eine Tangente von $K_1$ sein muss, also entweder $x\,p_1$ oder $x\,\pi_1$, und die Polare von $\pi$ alsdann die Gerade $x\,\pi_1$ oder $x\,p_1$ ist; da nun $x$ und $X$ gleichzeitig Pol und Polare für die gesuchte Basis sein müssen, wie wir früher erkannt haben, so stellen sich für dieselbe folgende Bedingungen heraus: 1) entweder der Basis gehört das Punktsystem $(h)$ zu, d. h. $p$ und $p_1$, $\pi$ und $\pi_1$ sind konjugirte Punkte, und da dieses Punktsystem ein hyperbolisches ist, dessen Asymptotenpunkte $a$ und $\alpha$ heissen mögen, so geht die gesuchte Basis durch $a$ und $\alpha$ und hat $x\,a$ und $x\,\alpha$ zu ihren Tangenten in diesen Punkten; oder 2) der Basis gehört das Punktsystem $(h')$ zu,

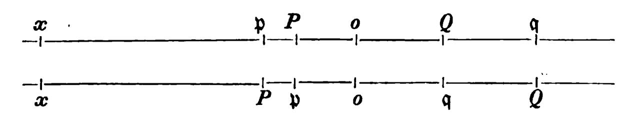
d. h. $p$ und $\pi_1$, $\pi$ und $p_1$ sind konjugirte Punkte in Bezug auf die gesuchte Basis, und da dieses Punktsystem ebenfalls hyperbolisch ist (seine Asymptotenpunkte mögen $a'\alpha'$ heissen), so müsste die Basis durch $a'\alpha'$ gehen und $xa'$, $x\alpha'$ zu Tangenten an diesen Punkten haben. Durch diese Bedingungen ist die Basis noch nicht vollkommen bestimmt. Fügen wir aber hinzu, dass für eine reelle Basis die Polare eines Schnittpunktes der Kegelschnitte $K$ und $K_1$ nothwendig eine gemeinschaftliche Tangente derselben sein muss, also entweder die Polare von $P$, $\mathfrak{P}$ und von $Q$, $\mathfrak{Q}$ oder die Polare von $P$, $\mathfrak{Q}$ und von $Q$, $\mathfrak{P}$, in jedem der beiden Fälle also nothwendig $s$ der Pol von $PQ$, d. h. $s$ und $o$ konjugirte Punkte und ebenso $\sigma$ und $\tilde{\omega}$, so erkennen wir, dass der zweite Fall des Punktsystems $(h')$ keine reelle Basis liefern kann, denn für ihn wären $s$ und $\tilde{\omega}$, $\sigma$ und $o$ je zwei konjugirte Punkte, was nicht möglich ist. Es bleibt hiernach nur der Fall 1) übrig: das Punktsystem $(h)$ hat $o$ und $s$, $\tilde{\omega}$ und $\sigma$ zu konjugirten, $a$ und $\alpha$ zu Asymptotenpunkten; die Punkte $o$ und $s$ liegen also harmonisch zu $a\,\alpha$ und werden durch diese getrennt. Um nun eine Basis zu erhalten, für welche $K$ und $K_1$ Polarfiguren von einander sind, müssen entweder $P$ und $\mathfrak{P}$ und gleichzeitig $Q$ und $\mathfrak{Q}$ oder anderseits $P$ und $\mathfrak{Q}$ und gleichzeitig $Q$ und $\mathfrak{P}$ Pol und Polare in Bezug auf die Basis sein; die reelle gemeinschaftliche Sekante $xo$, welche durch $P$ und $Q$ geht, treffe $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in den Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$; dann müssen sowohl $P$ und $Q$ zugeordnete harmonische Punkte zu $x$ und $o$ sein, als auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, wie ersichtlich ist; es sind daher $x$ und $o$ die Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems, dessen zwei Paare konjugirter Punkte $P$ und $Q$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind; diese vier Punkte bestimmen noch zwei andere Punktsysteme, von denen eines nothwendig elliptisch, das andere hyperbolisch sein muss; wenn nämlich $P$ und $\mathfrak{p}$, $Q$ und $\mathfrak{q}$ als konjugirte Punkte aufgefasst werden, so sei dies das hyperbolische und habe die Asymptotenpunkte $b$ und $\beta$; werden dagegen $P$ und $\mathfrak{q}$, $Q$ und $\mathfrak{p}$ als konjugirte Punkte aufgefasst, so sei dies das elliptische Punktsystem; für beide sind $x$ und $o$ ein Paar konjugirter Punkte, denn weil:

$$(PQxo) = -1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,x\,o) = -1,$$

so folgt:

$$(PQxo) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,o\,x) \quad \text{und auch}$$
$$(PQxo) = (\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}\,o\,x);$$

es liegen daher $x$ und $o$ harmonisch zu $b$ und $\beta$, und anderseits sind $P$ q, $Q$ p, $x\,o$ drei Paare konjugirter Punkte des elliptischen Punktsystems. Hieraus geht nun hervor, dass der Kegelschnitt, welcher durch $a\,\alpha$, $b\,\beta$ geht und $x\,a$, $x\,\alpha$ zu Tangenten hat, nothwendig die eine Basis, derjenige Kegelschnitt aber, welcher durch $a\,\alpha$ geht, in diesen Punkten von $x\,a$ und $x\,\alpha$ berührt wird und das elliptische Punktsystem, dessen zwei Paar konjugirter Punkte $b$ und $\beta$, $x$ und $o$ sind, zu dem ihm zugehörigen hat, die zweite Basis ist, für welche $K$ und $K_1$ Polarfiguren sind. Durch diese sich nicht widersprechenden Bedingungen sind die beiden reellen Basen vollständig bestimmt und es bleibt nur nachzuweisen, dass nothwendig die eine von ihnen Ellipse, die andere Hyperbel ist; dies erhellt aus folgender Bemerkung: Ziehen wir $(a\,b,\ \alpha\,\beta) = c$ und $(a\,\beta,\ \alpha\,b) = \gamma$, so liegen $c$ und $\gamma$ auf $o\,s$ und werden durch diese harmonisch getrennt; während die erstere Basis durch $b$ und $\beta$ geht, muss die zweite durch $c$ und $\gamma$ gehen und die beiden reellen Basen sind daher harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte. Da nun auch $a$ und $\alpha$ zu $o$ und $s$ harmonisch liegen, so wird entweder $o$ zwischen und $s$ ausserhalb $a\,\alpha$ liegen oder umgekehrt; im ersten Falle wird diejenige Basis, welche durch $b$ und $\beta$ geht, Ellipse, die andere Hyperbel werden, im zweiten Falle umgekehrt; denn wir wissen, dass in dem untersuchten Falle B) für die Lage der beiden Kegelschnitte $K$ und $K_1$ nothwendig $x$ ausserhalb beider liegen und $X$ beide in reellen Punktenpaaren schneiden muss; es werden daher $P$ und $Q$ zwischen sich $o$ und ausserhalb $x$ haben und in gleicher Weise auch p und q, folglich können die vier Punkte $P\,Q$ p q nur auf eine der beiden Arten gelegen sein:




und hieraus folgt, dass die beiden Asymptotenpunkte $b$ und $\beta$ des durch die Punktenpaare $P$ und p, $Q$ und q bestimmten hyperbolischen Punktsystems nothwendig ebenfalls den Punkt $o$ zwischen sich und $x$ ausserhalb haben müssen; der durch $x$ gehende Strahl $x\,o$ hat also beide Punkte $b$ und $\beta$ auf derselben Seite von $x$. Wenn nun $x\,o$ zwischen $a$ und $\alpha$ hindurchgeht, so ist der durch $b\,\beta$ gelegte Kegelschnitt, welcher $x\,a$ und $x\,\alpha$ in $a$ und $\alpha$ berührt,

nothwendig Ellipse und der andere Kegelschnitt, welcher durch $c$ und $\gamma$ geht, und $x a$ und $x \alpha$ in $a$ und $\alpha$ berührt, Hyperbel; wenn dagegen $x o$ ausserhalb $a \alpha$ diese Gerade $X$ trifft, so geht $x s$ zwischen $a \alpha$ hindurch, und der durch $a \alpha c \gamma$ gelegte Kegelschnitt wird Ellipse, der durch $a \alpha b \beta$ gelegte Hyperbel; einer von beiden Fällen kann aber nur eintreten; von den beiden reellen Basen ist daher immer eine Ellipse, die andere Hyperbel; der oben ausgesprochene Satz ist dadurch vollständig erwiesen.

---

# Vierter Abschnitt.

## Das Involutions-Netz (Polarsystem).

---

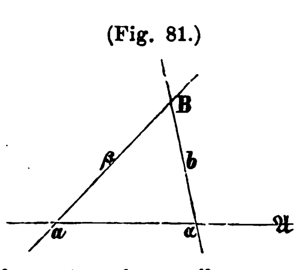
### § 55. Erklärung und Konstruktion des Netzes.

Die in den §§ 29 und 30 auseinandergesetzten Polar-Eigenschaften des Kegelschnitts haben ein eigenthümliches Entsprechen von sämmtlichen Punkten der Ebene zu sämmtlichen Geraden in ihr und eine paarweise Verkettung der Punkte einer Geraden zu einem Punktsystem, sowie der Strahlen durch einen Punkt zu einem Strahlsystem ans Licht gebracht, nämlich: Jeder Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts wird durch denselben in ein bestimmtes Strahlsystem, jede Gerade in ein bestimmtes Punktsystem verwandelt, dessen Konstruktion aus der projektivischen Erzeugung des Kegelschnitts hervorgeht. Dreht man eine Gerade um einen festen Punkt, so verändert sich das Punktsystem auf ihr; die dem festen Punkt konjugirten für jedes dieser Punktsysteme liegen auf einer Geraden (Polare des festen Punktes), und nehmen wir auf dieser Geraden verschiedene Punkte und fassen die ihnen zukommenden Strahlsysteme auf, so laufen die zu der Geraden in jedem Strahlsystem konjugirten Strahlen durch einen festen Punkt (Pol der Geraden), der mit dem zuerst angenommenen zusammenfällt. Diese Zusammengehörigkeit der Punkte und Geraden einer Ebene lässt sich nun auch unabhängig vom Kegelschnitt herstellen und führt zu dem Begriff des Involutions-Netzes oder Polarsystems.

Sämmtliche Punkte und Gerade in einer Ebene sollen derartig mit einander in ein N e t z verflochten werden, dass auf jeder Geraden die Punkte sich paarweise zu einem bestimmten Punktsystem und zugleich die durch jeden Punkt gehenden Strahlen

sich paarweise zu einem bestimmten Strahlsystem ordnen; je zwei konjugirte Punkte oder Strahlen eines solchen Punkt- oder Strahlsystems sollen *konjugirte Punkte und konjugirte Strahlen des Netzes* heissen. Ferner sollen für alle durch einen Punkt $B$ gehende Strahlen diejenigen Punkte, welche dem $B$ konjugirt sind, rücksichtlich der auf diesen Strahlen befindlichen Punktsysteme auf ein und derselben Geraden $\mathfrak{A}$ liegen und zugleich alle diejenigen Strahlen, welche dem Strahl $\mathfrak{A}$ konjugirt sind, rücksichtlich der auf $\mathfrak{A}$ liegenden Mittelpunkte von Strahlsystemen, durch ein und denselben Punkt und zwar durch den vorgenannten Punkt $B$ gehen. Der Punkt $B$ und die Gerade $\mathfrak{A}$ sollen *Pol und Polare des Netzes* heissen. Dass eine solche Verflechtung der Punkte und Geraden einer Ebene *möglich* ist, wird die sogleich anzugebende Konstruktion lehren; zuvörderst bemerken wir, dass aus der gegebenen Erklärung unmittelbar folgt: *Jedes einem Punkte $B$ zugehörige Strahlsystem liegt mit dem seiner Polare $\mathfrak{A}$ zugehörigen Punktsystem perspektivisch*; denn seien $a$ und $\alpha$ irgend ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems auf dem Träger $\mathfrak{A}$ und $B$ der Pol desselben (Fig. 81), so sind auf dem Strahl $B a$, $B$ und $a$ ein Paar konjugirter Punkte, weil gleichzeitig $\mathfrak{A}$ die Polare von $B$ ist nach dem Obigen; zweitens sind auch $\alpha$ und $a$ konjugirte Punkte, folglich ist $B\alpha$ die Polare von $a$ und ebenso $B a$ die Polare von $\alpha$; wenn nun aber $a$ der Pol von $B\alpha$ ist, so müssen $Ba$ und $B\alpha$ konjugirte Strahlen sein; denn alle zu $B\alpha$ konjugirte Strahlen müssen durch $a$ gehen; also liefert das beliebig angenommene Paar konjugirter Punkte $a\alpha$ auf dem Träger $\mathfrak{A}$, mit $B$ verbunden, ein Paar konjugirter Strahlen $B\alpha$ und $B a$ des Strahlsystems, welches dem Punkte $B$ zukommt, und es liegen daher Punktsystem und Strahlsystem perspektivisch. Die drei Punkte $a\alpha B$ sind in der Weise mit einander verknüpft, dass je zwei von ihnen konjugirte Punkte des Netzes sind, oder jeder der Pol des Verbindungsstrahles der beiden andern; sowie auch das von solchen drei Punkten gebildete Dreiseit die Eigenschaft besitzt, dass je zwei Seiten konjugirte Strahlen des Netzes sind, oder jede Seite die Polare des

(Fig. 81.)

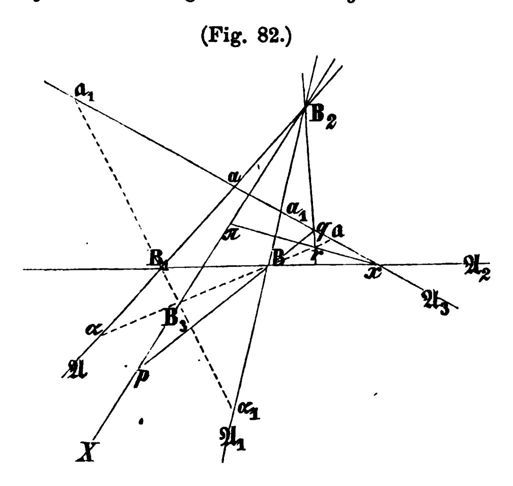


Schnittpunktes der beiden übrigen; solche drei Punkte sollen ein Tripel konjugirter Punkte und ihre drei Verbindungslinien ein Tripel konjugirter Strahlen des Netzes heissen. Wir können die vorige Eigenschaft auch umkehren: Sind $b$ und $\beta$ irgend zwei konjugirte Strahlen, die sich in $B$ treffen und sind auf diesen Trägern von Punktsystemen die dem Punkte $B$ konjugirten Punkte resp. $\alpha$ und $a$, so ist $\alpha$ der Pol von $\beta$ und $a$ der Pol von $b$, also $a\alpha B$ ein Tripel konjugirter Punkte und $b\beta\mathfrak{A}$ ein Tripel konjugirter Strahlen. Ferner folgt aus dem Obigen: Die Polaren $b$ von sämmtlichen Punkten $a$ einer Geraden $\mathfrak{A}$ laufen durch ein und denselben Punkt $B$, den Pol der Geraden $\mathfrak{A}$ und beschreiben ein Strahlbüschel, welches mit der von $a$ durchlaufenen Punktreihe projektivisch ist (weil der Punkt $a$ und der Schnittpunkt $\alpha$ seiner Polare $b$ mit dem Träger $\mathfrak{A}$ das diesem zugehörige Punktsystem bilden), und umgekehrt: Die Pole $\alpha$ sämmtlicher durch einen Punkt $B$ gehenden Strahlen $\beta$ liegen auf einer Geraden $\mathfrak{A}$, der Polare des Punktes $B$, und beschreiben eine mit dem von $\beta$ beschriebenen Strahlbüschel projektivische Punktreihe.

Das Involutions-Netz kann auf folgende Art konstruirt werden: Wenn zwei konjugirte Strahlen des Netzes und auf jedem das ihm zugehörige Punktsystem, oder wenn zwei konjugirte Punkte des Netzes und in jedem das ihm zugehörige Strahlsystem gegeben sind, so ist das Netz vollständig bestimmt. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ zwei beliebige Gerade, welche konjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, und auf jeder derselben ein Punktsystem durch zwei Paare konjugirter Punkte gegeben, so wird dem Schnittpunkt $B_2$ der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ in der ersten Geraden $\mathfrak{A}$ ein bestimmter Punkt $B_1$, und in der zweiten $\mathfrak{A}_1$ ein bestimmter Punkt $B$ für jedes der beiden Punktsysteme konjugirt sein (Fig. 82); die Verbindungslinie $BB_1$ oder $\mathfrak{A}_2$ wird die Polare von $B_2$ und die Punkte $B$ und $B_1$ werden die Pole von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ sein. Um zu einer beliebigen Geraden $\mathfrak{A}_3$ den Pol $B_3$ zu finden, suchen wir zu den Schnittpunkten $a$ und $a_1$, in welchen $\mathfrak{A}_3$ die Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ trifft, die konjugirten Punkte $\alpha$ und $\alpha_1$ auf, dann sind $B\alpha$ und $B_1\alpha_1$ die Polaren von $a$ und $a_1$, folglich der Schnittpunkt $(B\alpha, B_1\alpha_1) = B_3$ der gesuchte Pol von $\mathfrak{A}_3$; es ist klar, dass derselbe hiedurch unzweideutig

bestimmt wird, und rückwärts findet man durch dieselbe Konstruktion zu jedem beliebigen Punkte $B_3$ die Polare $\mathfrak{A}_3$. Diese

(Fig. 82.)




Konstruktion zeigt ferner, dass, wenn wir einen veränderlichen Punkt $B_4$ auf $\mathfrak{A}_3$ bewegen, seine Polare beständig durch $B_3$ läuft; denn $BB_4$ und $B_1B_4$ treffen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in den Punkten $b$ und $b_1$, und da jene zwei perspektivische Strahlbüschel beschreiben, so sind auch die von $b$ und $b_1$ durchlaufenen Punktreihen projektivisch; die zu $b$ und $b_1$ konjugirten Punkte $\beta$ und $\beta_1$, deren Verbindungslinie die gesuchte Polare $\mathfrak{A}_4$ ist, beschreiben also auch zwei projektivische Punktreihen, weil im Punktsystem $b$ und $\beta$, $b_1$ und $\beta_1$ projektivische Punktreihen beschreiben; die von $\beta$ und $\beta_1$ beschriebenen Punktreihen liegen aber perspektivisch, weil, wenn $B_4$ in den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ fällt, $b$ nach $B_1$ und $b_1$ nach $B$ gelangt und die zu ihnen konjugirten $\beta$ und $\beta_1$ in $B_2$ zusammenfallen; die Polare $\mathfrak{A}_4$ läuft also durch einen festen Punkt, und dass dieser $B_3$ ist, erhellt unmittelbar; denn gelangt $B_4$ nach $a$, so ist seine Polare $B\alpha$, und gelangt $B_4$ nach $a_1$, so ist seine Polare $B_1\alpha_1$, also der Schnittpunkt beider, d. h. $B_3$ ist der feste Punkt, durch welchen die veränderliche Polare $\mathfrak{A}_4$ läuft. Es ist zugleich ersichtlich, dass die von $B_4$ durchlaufene Punktreihe mit dem von $\mathfrak{A}_4$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch ist, denn jene liegt perspektivisch mit der Punktreihe $b$ und dieses ist perspektivisch mit der Punktreihe $\beta$; $b$ und $\beta$ sind aber konjugirte Punkte eines Punktsystems, also in

sich projektivisch (§ 16); folglich ist auch die von $B_4$ beschriebene Punktreihe mit dem von $\mathfrak{A}_4$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch, oder wenn wir mit $\mathfrak{B}_4$ den Schnittpunkt der Polare $\mathfrak{A}_4$ mit der von $B_4$ durchlaufenen Geraden $\mathfrak{A}_3$ bezeichnen, so durchlaufen $B_4$ und $\mathfrak{B}_4$ auf einander liegende projektivische Punktreihen; es erhellt nun ferner, dass diese ein Punktsystem erzeugen, denn die Polare von $\mathfrak{B}_4$ muss, wie wir eben bewiesen haben, durch den Pol von $\mathfrak{A}_4$ gehen, dieser ist aber $B_4$ nach der oben angegebenen Konstruktion; folglich fallen bei den beiden auf einander liegenden projektivischen Punktreihen entsprechende gleiche Strecken verkehrt auf einander; wir haben also ein Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ (§ 16), dessen konjugirte Punkte $B_4$ und $\mathfrak{B}_4$ sind; auf gleiche Weise erhalten wir ein Strahlsystem in $B_3$, welches mit diesem Punktsystem perspektivisch liegt. Jede Gerade $\mathfrak{A}_3$ wird also durch die angegebene Konstruktion in ein Punktsystem, jeder Punkt $B_3$ in ein Strahlsystem verwandelt und beide Systeme liegen perspektivisch, wenn $B_3$ und $\mathfrak{A}_3$ Pol und Polare sind; hierdurch werden alle für das Netz geforderten Bedingungen erfüllt und die obige Konstruktion leistet also in der That dasjenige, was wir vom Involutions-Netze forderten. Nur für eine einzige Lage der Geraden $\mathfrak{A}_3$ wird die Konstruktion illusorisch. Wenn nämlich $\mathfrak{A}_3$ mit $\mathfrak{A}_2$ zusammenfällt, also $a$ nach $B_1$ und $a_1$ nach $B$ kommt, mithin $\alpha$ und $\alpha_1$ in $B_2$ zusammenliegen, so ergiebt sich zwar $B_2$ als der Pol von $\mathfrak{A}_2$, aber das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$ und das Strahlsystem in $B_2$ werden nicht unmittelbar durch die obige Konstruktion erhalten. Bedenken wir indessen, dass, wenn für irgend eine andere Gerade $\mathfrak{A}_3$ der Pol $B_3$ konstruirt ist, auch für den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3)$ die Polare die Verbindungslinie $B_2 B_3$ sein muss, so sehen wir, wie zu jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{A}_2$ der konjugirte in dem ihr zugehörigen Punktsystem konstruirt werden kann, also auch wie das ganze Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$ und das mit ihm perspektivische Strahlsystem in $B_2$ erhalten wird; hieraus lässt sich folgende Konstruktion ableiten: Um zu einem beliebigen Punkte $a_2$ der Geraden $\mathfrak{A}_2$ den konjugirten $\alpha_2$ zu erhalten, ziehe man durch $a_2$ irgend einen Strahl, welcher in $a$ und $a_1$ die Träger $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ trifft; sind $\alpha$ und $\alpha_1$ die konjugirten Punkte zu $a$ und $a_1$ auf diesen, so suche man den Schnittpunkt von $\alpha\alpha_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ auf und nehme den ihm zugeordneten vierten harmonischen Punkt $\alpha_2$, indem $B$ und $B_1$ das andere Paar zugeordneter Punkte ist;

dann ist $\alpha_2$ der gesuchte konjugirte Punkt zu $a_2$. Diese Konstruktion lehrt zugleich, zu irgend einem durch $B_2$ gehenden Strahl $\mathfrak{A}_3$ den Pol $B_3$ zu konstruiren, welcher auf $\mathfrak{A}_2$ liegen muss; sobald nämlich das dem Punkte $B_2$ zugehörige Strahlsystem ermittelt ist, wird der gesuchte Pol $B_3$ der Schnittpunkt des zu $\mathfrak{A}_3$ konjugirten Strahls in diesem Strahlsystem mit der Geraden $\mathfrak{A}_2$ sein.

Wir erhalten nach dem Vorigen das einem beliebigen Strahle $\mathfrak{A}_3$ des Netzes zugehörige Punktsystem sehr einfach dadurch, dass wir die den Schnittpunkten $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_3) = a$ und $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3) = a_1$ konjugirten Punkte $\alpha$ und $\alpha_1$ aufsuchen und $\alpha B$, $\alpha_1 B_1$ ziehen, welche Strahlen $\mathfrak{A}_3$ beziehungsweise in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ treffen mögen; dann sind $a$ und $\mathfrak{a}$, $a_1$ und $\mathfrak{a}_1$ zwei Paare konjugirter Punkte des gesuchten Punktsystems auf $\mathfrak{A}_3$ und $B\alpha$, $B_1\alpha_1$ schneiden sich in dem Pole $B_3$; da nun $a$ und $\mathfrak{a}$, $a_1$ und $\mathfrak{a}_1$ die Schnittpunkte von zwei Paar Gegenecken des vollständigen Vierecks $BB_1B_2B_3$ sind, so muss jeder durch diese vier Punkte gelegte Kegelschnitt die Transversale $\mathfrak{A}_3$ in einem Paar konjugirter Punkte ihres durch die genannten beiden Paare bestimmten Punktsystems treffen, oder umgekehrt irgend ein Paar konjugirter Punkte auf dem Strahl $\mathfrak{A}_3$ liegt mit den vier Punkten $BB_1B_2B_3$ auf einem Kegelschnitt. Nun sind $B_3$ und irgend ein Paar konjugirter Punkte $B_4$ und $\mathfrak{B}_4$ auf $\mathfrak{A}_3$ ein Tripel konjugirter Punkte des Netzes und die drei Punkte $BB_1B_2$ sind auch ein Tripel des Netzes, welches zwar zur Konstruktion desselben verwendet ist, aber durchaus nichts vor jedem andern Tripel hinsichtlich der Eigenschaften des Netzes voraus hat; wir schliessen daher den Satz:

Irgend zwei Tripel konjugirter Punkte des Netzes liegen allemal auf einem Kegelschnitt, und die Seiten dieser beiden Dreiecke berühren zugleich einen andern Kegelschnitt.

Das Letztere ist bekanntlich eine unmittelbare Folgerung des Ersteren (§ 28), ergiebt sich aber auch hier aus der Bemerkung, dass die sechs Seiten dieser beiden Dreiecke die Polaren ihrer Ecken sind. Denn wir wissen, dass die Polaren einer geraden Punktreihe ein Strahlbüschel bilden, welches mit jener projektivisch ist und umgekehrt; nehmen wir zwei projektivische gerade Punktreihen, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, so werden die beiden Strahlbüschel ihrer Polaren auch projektivisch sein

also einen neuen Kegelschnitt erzeugen; dieser ist der Ort der Pole von den Tangenten des ersteren und der Reciprocität wegen sind seine Tangenten zugleich die Polaren von den Punkten des ersteren, also:

Von allen Punkten des Netzes, welche auf einem Kegelschnitt liegen, umhüllen die Polaren einen neuen Kegelschnitt und die Punkte des letzteren sind zugleich die Pole von den Tangenten des ersteren; solche zwei Kegelschnitte sind (reciproke) Polarfiguren von einander in Bezug auf das Netz. Ein Kegelschnitt $K$, der durch zwei Tripel des Netzes geht, hat daher zu seiner Polarfigur einen neuen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher von den sechs Seiten der beiden Tripeldreiecke berührt wird. Ein solcher Kegelschnitt enthält unendlich viele Tripel des Netzes; denn nehmen wir von irgend einem Punkte $p$ desselben die Polare des Netzes, so muss sie eine Tangente von $\mathfrak{K}$ sein, und schneidet sie den ersten Kegelschnitt $K$ in den Punkten $s$ und $\sigma$, so muss die Polare des Punktes $s$ einmal durch $p$ gehen und anderseits eine Tangente von $\mathfrak{K}$ sein und ebenso muss die Polare von $\sigma$ eine der beiden von $p$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten sein; der durch das erste Tripel und die beiden Punkte $p$ und $s$ gehende Kegelschnitt $K$ muss nun den dritten Tripelpunkt zu $p$ und $s$ enthalten, also ist $p\sigma$ die Polare von $s$ und ebenso $ps$ die Polare von $\sigma$; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist also dem Dreiseit $ps\sigma$ einbeschrieben, sowie der Kegelschnitt $K$ diesem Tripel umschrieben ist; überhaupt schneidet jede Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ den $K$ in zwei konjugirten Punkten des Netzes, und jedes Tangentenpaar aus einem Punkte von $K$ an $\mathfrak{K}$ ist ein Paar konjugirter Strahlen des Netzes. Diese Eigenschaft findet auch in allgemeinerer Weise statt, indem es auf einem beliebigen Kegelschnitt in der Ebene eines Netzes im Allgemeinen unendlich-viele Paare konjugirter Punkte giebt, deren Verbindungsstrahlen einen andern Kegelschnitt umhüllen, und anderseits unter den Tangenten eines beliebigen Kegelschnitts in der Ebene eines Netzes unendlich-viele Paare konjugirter Strahlen desselben vorkommen, deren Schnittpunkte auf einem neuen Kegelschnitt liegen.

Denken wir uns einen beliebigen Kegelschnitt $K$ in der Ebene des Netzes und nehmen irgend einen Punkt $B$ desselben, so wird

die Polare $\mathfrak{A}$ von $B$ den $K$ im Allgemeinen in zwei Punkten $b$ und $b'$ treffen von solcher Beschaffenheit, dass sowohl $B$ und $b$, als auch $B$ und $b'$ je, ein Paar konjugirter Punkte des Netzes sind, welche auf dem gegebenen Kegelschnitte $K$ liegen; verändern wir $B$ auf dem Kegelschnitt $K$, so erhalten wir unendlich viele solcher Strahlenpaare $Bb$ und $Bb'$, deren Umhüllungskurve ermittelt werden soll. Zunächst zeigt sich, dass, wenn wir drei solcher Paare ($B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$, $B_2$ und $\mathfrak{A}_2$ seien Pole und Polaren des Netzes und $\mathfrak{A}$ treffe $K$ in $b$ und $b'$, $\mathfrak{A}_1$ in $b_1$ und $b_1'$, $\mathfrak{A}_2$ in $b_2$ und $b_2'$) beliebig herausnehmen, diese sechs Geraden $Bb$, $Bb'$, $B_1 b_1$, $B_1 b_1'$, $B_2 b_2$, $B_2 b_2'$ einen Kegelschnitt umhüllen; die beiden Dreiecke: $B B_1 B_2$ und das von den Polaren $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ gebildete, liegen nämlich perspektivisch, wie aus den Polareigenschaften des Kegelschnitts (§ 31) bekannt ist und in gleicher Weise für das Netz nachgewiesen werden kann (§ 57), so dass die Schnittpunkte:

$$(B_1 B_2,\ \mathfrak{A}) = \alpha \quad (B_2 B,\ \mathfrak{A}_1) = \alpha_1 \quad (B B_1,\ \mathfrak{A}_2) = \alpha_2$$

in einer Geraden liegen; nun ist früher bei anderer Gelegenheit (§ 48) der Satz gefunden worden:

„Ist einem Kegelschnitt $K$ ein Dreieck $B B_1 B_2$ einbeschrieben und werden die Seiten desselben $B_1 B_2$, $B_2 B$, $B B_1$ von einer beliebigen Geraden in den Punkten $\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2$ getroffen, wird endlich durch jeden dieser Punkte ein beliebiger Strahl gezogen, der den Kegelschnitt $K$ beziehlich in dem Punktenpaar $b b_1$; $b' b_1'$; $b_2 b_2'$ trifft, so berühren die sechs Strahlen $Bb$, $Bb'$; $B_1 b_1$, $B_1 b_1'$; $B_2 b_2$, $B_2 b_2'$ einen neuen Kegelschnitt."

Nachdem hierdurch bewiesen ist, dass irgend drei Strahlenpaare von der beschriebenen Art denselben Kegelschnitt berühren, denken wir uns zum Punkte $b$ die Polare des Netzes konstruirt, welche durch $B$ gehen muss und ausserdem in $c$ den $K$ treffe; nach dem eben bewiesenen Satze werden dann auch

$$\left.\begin{matrix} bB & B_1 b_1 & B_2 b_2 \\ bc & B_1 b_1' & B_2 b_2' \end{matrix}\right\} \text{sechs Tangenten eines Kegelschnitts sein, sowie vorhin:}$$

$$\left.\begin{matrix} Bb & B_1 b_1 & B_2 b_2 \\ Bb' & B_1 b_1' & B_2 b_2' \end{matrix}\right\}.$$

Diese beiden Kegelschnitte haben nun fünf Tangenten gemein: $B_1 b_1$, $B_1 b_1'$, $B_2 b_2$, $B_2 b_2'$ und $Bb$, welches identisch ist mit $bB$; folglich sind die Kegelschnitte selbst identisch und alle sieben

Geraden: $Bb$, $Bb'$, $bc$, $B_1b_1$, $B_1b_1'$, $B_2b_2$, $B_2b_2'$ berühren einen und denselben Kegelschnitt. Nehmen wir endlich an Stelle des willkührlich gewählten Paares $B_2b_2$ und $B_2b_2'$ irgend ein anderes Paar, so gelten dieselben Schlüsse und der vorhin erhaltene Kegelschnitt tritt wieder hervor, weil er durch die fünf übrigen Tangenten schon bestimmt ist; also berühren alle möglichen Strahlenpaare $B_2b_2$, $B_2b_2'$ ein und denselben Kegelschnitt, d. h.: Sämmtliche Geraden $Bb$, welche je zwei konjugirte Punkte des Netzes, die auf einem gegebenen Kegelschnitt $K$ liegen, verbinden, umhüllen einen andern Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Nehmen wir für das Netz ein gewöhnliches Polarsystem in Bezug auf einen Kegelschnitt $C$, so sind $Bb$ harmonisch gelegen zu den Schnittpunkten der Geraden $Bb$ mit dem Kegelschnitt $C$ und der vorige Satz lässt sich so aussprechen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte in der Ebene gegeben, so können im Allgemeinen unendlich-viele Gerade von solcher Beschaffenheit gefunden werden, dass ihre je vier Schnittpunkte mit den beiden Kegelschnitten harmonisch gelegen und je zwei Schnittpunkte desselben Kegelschnitts zugeordnet sind; alle diese Geraden umhüllen ein und denselben neuen Kegelschnitt, welcher insbesondere auch die acht Tangenten in den gemeinschaftlichen Punkten der beiden gegebenen Kegelschnitte berührt (§ 27).

Die Bestimmung der Bedingungen, unter welchen der gefundene Kegelschnitt reell existirt oder nicht, muss dem Leser überlassen bleiben; auch knüpfen sich hieran interessante Fragen über Vielecke, welche dem Kegelschnitte $K$ einbeschrieben und zugleich dem neuen Ortskegelschnitt umbeschrieben sind, indem man von $B$ zu $b$ und $c$ und von $c$ weitergehend ein solches Vieleck bildet, welches sich entweder schliessen wird, oder nicht; die Untersuchung dieser Fragen würde uns von der gegenwärtigen Betrachtung zu weit abführen. Ein besonderer Fall ist in den oben gefundenen Tripeldreiecken enthalten, welche gleichzeitig einem Kegelschnitt um- und einem andern einbeschrieben sind.

Die angegebene Konstruktion des Netzes lässt alle wesentlichen Eigenschaften, welche wir als Polareigenschaften eines Kegelschnitts kennen gelernt haben, unabhängig von diesem Kegelschnitt selbst hervortreten; es möge hier noch eine häufiger be-

nutzte angeführt werden. Die obige Konstruktion für ein beliebiges Paar von Pol ($B_3$) und Polare ($\mathfrak{A}_3$) liefert für den Schnittpunkt ($\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$) $= x$ die Polare ($B_2$, $B_3$) $= X$ und das dieser Geraden $X$ zugehörige Punktsystem wird durch zwei Paar konjugirter Punkte bestimmt, indem den Punkten $B_2$ und $B_3$ die Schnittpunkte von $X$ mit $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_3$ konjugirt sind (Fig. 82); zu einem beliebigen Punkt $p$ auf $X$ wird sich also der konjugirte $\pi$ folgendermaassen finden lassen: Man ziehe $pB$, welches $\mathfrak{A}_3$ in $q$ treffe, $qB_2$, welches $BB_3$ in $r$ treffe, und $xr$, welches durch $\pi$ gehen muss; denn in dem vollständigen Viereck $Bqrx$ treffen zwei Seitenpaare: $Bx$ und $qr$, $Br$ und $xq$, in zwei Paaren konjugirter Punkte des obigen Punktsystems die Transversale $B_2B_3$, folglich auch das dritte Seitenpaar $Bq$ und $rx$ in einem Paar konjugirter Punkte desselben Punktsystems; es ist daher $rx$ die Polare von $p$, weil sie durch $x$ den Pol von $X$ und den konjugirten Punkt $\pi$ geht; hieraus folgt, dass auch $p$ und $r$ konjugirte Punkte des Netzes sind. Nun sind aber die Punkte $p$ und $r$ so auszudrücken:

$$(Bq,\ B_2B_3) = p \qquad (B_2q,\ BB_3) = r,$$

und da $B$ auf der Polare von $B_2$, $q$ auf der Polare von $B_3$ liegt, so sind $B$ und $B_2$ ebenso wie $q$ und $B_3$ zwei Paare konjugirter Punkte des Netzes; da diese beiden Paare konjugirter Punkte sonst ganz unabhängig von einander sind, und jede zwei anderen Paare willkührlich an ihre Stelle gesetzt werden können, so schliessen wir den Satz:

Hat man irgend zwei Paare konjugirter Punkte des Netzes $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$, so bilden allemal die Schnittpunkte:

$$(ab,\ \alpha\beta) = c \qquad (a\beta,\ \alpha b) = \gamma$$

ein drittes Paar konjugirter Punkte und diese drei Paare sind die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits.

Die der auseinandergesetzten Konstruktion des Netzes gleichlaufende, welche von zwei beliebigen Strahlsystemen, deren Mittelpunkte $B$ und $B_1$ als konjugirte Punkte angenommen werden, ausgeht, bedarf keiner näheren Auseinandersetzung.

Anmerkung. Wir machen noch auf eine Betrachtung aufmerksam, welche zwar nicht in den systematischen Gang unserer

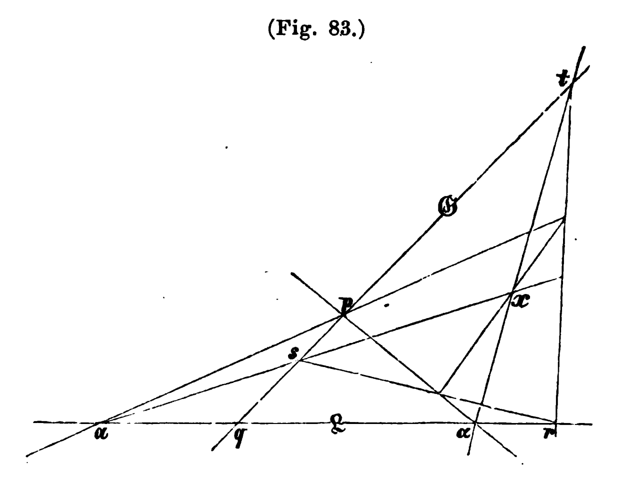
Untersuchung passt, weil sie das Operationsfeld der Ebene verlässt und auf die Kugeloberfläche übergeht, aber besonders geeignet erscheint, das Wesen des Netzes an einem sehr einfachen Falle anzuschauen und aus diesem auf die Eigenschaften des ebenen Netzes zu schliessen. Wir nennen auf der Kugelfläche je zwei solche Punkte konjugirt, welche einen Abstand von $90^0$ von einander haben; zu einem beliebigen Punkte $x$ der Kugelfläche gehören also unendlich-viele konjugirte, die auf einem grössten Kreise $X$, dem Aequator zu dem Pole $x$, liegen; auf diesem grössten Kreise bilden sodann solche Punktenpaare, die um $90^0$ von einander abstehen, ein (elliptisches) Punktsystem; ein Tripel konjugirter Punkte heissen solche drei, welche die Ecken eines Kugeloktanten sind; je zwei grösste Kreise, deren Ebenen rechtwinklig zu einander stehen, heissen konjugirt; zu einem grössten Kreise giebt es daher unendlich-viele konjugirte, welche alle durch dieselben beiden diametral gegenüber liegenden Punkte der Kugelfläche (Pole) hindurchgehen; alle Paare rechtwinkliger Ebenen, die durch denselben Durchmesser gehen, bilden ein Ebenensystem und ihre Schnitte mit der Kugelfläche ein Strahlsystem grösster Kreise; ein Tripel konjugirter Strahlen begrenzt einen Oktanten der Kugelfläche; zu einem Pol $x$ gehört eine bestimmte Polare $X$, der zugehörige Aequator, zu diesem aber Pol und Gegenpol, die Endpunkte des auf der Ebene des Aequators senkrechten Kugeldurchmessers. Projiciren wir vom Mittelpunkte der Kugel das Netz der Kugelfläche auf eine beliebige Ebene, so erhalten wir ein Involutions-Netz (besonderer Art); Pol und Polare werden bestimmt durch einen Durchmesser und die darauf senkrechte Diametralebene der Kugel und hieraus finden die Eigenschaften des Involutionsnetzes unmittelbar ihre Bestätigung.

## § 56. Der Kern-Kegelschnitt; hyperbolisches und elliptisches Netz.

Es ist von besonderem Interesse, vermittelst der im vorigen Paragraphen angegebenen Konstruktion des Netzes solche Punkte in der Ebene desselben, deren Polaren durch sie selbst gehen, oder solche Strahlen, deren Pole auf ihnen selbst liegen, sowie den Ort dieser und jener zu ermitteln. Wir treffen jeden Punkt der Ebene, indem wir eine doppelte Bewegung ausführen, ein-

mal auf einer beliebigen Geraden 𝔊 einen veränderlichen Punkt bewegen und dann diese Gerade um einen beliebigen in ihr festgehaltenen Punkt herumdrehen. Wenn nun der Punkt $B$ auf der Geraden 𝔊 sich bewegt, so beschreibt seine Polare 𝔄 ein Strahlbüschel, welches im veränderlichen Punkte **B** die Gerade 𝔊 trifft. Die Punkte $B$ und **B** bilden ein Punktsystem, und wenn dasselbe hyperbolisch ist, so sind seine Asymptotenpunkte von der verlangten Beschaffenheit, dass ihre Polaren durch sie selbst hindurchgehen. Ist ein solcher Asymptotenpunkt $s$ gefunden, so wird für jede durch ihn gehende Gerade hinsichtlich desjenigen Punktsystems auf ihr, welches dem Netze zugehört, dieser Punkt $s$ allemal ein Asymptotenpunkt sein, und indem wir die Gerade 𝔊 um den Punkt $s$ drehen, haben wir nur den Ort des andern Asymptotenpunktes aufzusuchen, um sämmtliche Punkte in der Ebene des Netzes zu erhalten, deren Polaren durch sie hindurchgehen. Dies geschieht also: Sind die beiden Asymptotenpunkte auf der zuerst angenommenen Geraden 𝔊 (Fig. 83): $s$ und $t$, ein beliebiger Punkt

(Fig. 83.)




derselben $p$ und treffe seine Polare 𝔏 die Gerade 𝔊 in $q$, so sind $p$ und $q$ konjugirte Punkte des Netzes, liegen also harmonisch zu den Asymptotenpunkten $s$ und $t$; ziehen wir eine beliebige andere Gerade durch $s$, welche in $a$ der 𝔏 begegnen mag, und sei $p\alpha$ die Polare von $a$, d. h. $\alpha$ der konjugirte Punkt zu $a$ in dem der Geraden 𝔏 zugehörigen Punktsystems des Netzes, so wird der Schnittpunkt von $sa$ und $p\alpha$ der konjugirte Punkt zu $a$ in dem

auf $sa$ befindlichen Punktsystem sein, also der vierte harmonische, dem $s$ zugeordnete Punkt $x$ muss der andere Asymptotenpunkt dieses Punktsystems sein, von dem $s$ einer ist; um den vierten harmonischen Punkt $x$ zu finden, haben wir nur $\alpha t$ zu ziehen, denn da $p\,q\,s\,t$ harmonisch liegen und $s\,a$ von $\alpha\,p$ und $\alpha\,q$ in einem Paar zugeordneter Punkte getroffen wird, $s$ aber der Schnittpunkt von $pq$ und $sa$ ist, so wird der vierte harmonische, dem $s$ zugeordnete Punkt der Schnittpunkt $(sa, t\alpha)$ sein; drehen wir jetzt den Strahl $sa$ um den festen Punkt $s$, so ergiebt sich leicht der Ort des Punktes $x$; denn $a$ und $\alpha$ sind konjugirte Punkte des auf $\mathfrak{L}$ befindlichen Punktsystems im Netze, beschreiben also zwei auf einander liegende projektivische Punktreihen, $sa$ und $t\alpha$ beschreiben mithin zwei projektivische Strahlbüschel und der Ort des Punktes $x = (sa, t\alpha)$ ist also ein Kegelschnitt $K$. Die Tangenten dieses Kegelschnitts in den Punkten $s$ und $t$ erhalten wir, indem wir in den beiden ihn erzeugenden projektivischen Strahlbüscheln diejenigen Strahlen aufsuchen, welche den in der Verbindungslinie der Mittelpunkte $s\,t$ zusammenliegenden Strahlen entsprechen; wir suchen also den Punkt $r$ in $\mathfrak{L}$ auf, welcher dem $q$ konjugirt ist, oder den Pol von $pq$ im Netze, dann sind $rs$ und $rt$ die Tangenten des Kegelschnitts $K$; dies sind offenbar die Polaren der Punkte $s$ und $t$ in dem Netze, welche durch $s$ und $t$ selbst hindurchgehen müssen; folglich ist $pqr$ ein Tripel konjugirter Punkte nicht nur für das Netz, sondern auch für den Kegelschnitt $K$; auch ist $p\alpha$ die Polare von $a$ und $pa$ die Polare von $\alpha$ für den Kegelschnitt $K$, wie für das Netz; hieraus folgt, dass, wenn wir den Schnittpunkt $(sr, p\alpha)$ mit $x$ verbinden, diese Verbindungslinie die Tangente im Punkte $x$ für den Kegelschnitt $K$ sein muss, auf derselben Linie also auch der Schnittpunkt $(tr, pa)$ liegen muss; der Punkt $(sr, p\alpha)$ hat im Netze zu seiner Polare $sa$ und der Punkt $(tr, pa)$ hat im Netze zu seiner Polare $t\alpha$, und da sich $sa$ und $t\alpha$ in $x$ treffen, so ist die Verbindungslinie der Schnittpunkte $(sr, p\alpha)$ und $(tr, pa)$ die Polare des Punktes $x$ im Netze, welche nothwendig durch $x$ selbst hindurchgehen muss und, wie wir eben gesehen haben, die Tangente in $x$ am Kegelschnitt $K$ ist. Hieraus ersehen wir, dass für sämmtliche Punkte $x$ des gefundenen Kegelschnitts $K$ die Polare des jedesmaligen $x$ im Netze die Tangente dieses Punktes an $K$ ist, und hiernach können wir folgendes Resultat aussprechen:

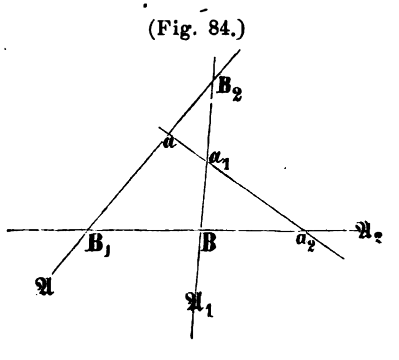
**Der Ort solcher Punkte des Netzes, deren Polaren durch sie selbst gehen, ist im Allgemeinen ein bestimmter Kegelschnitt und alle solche Strahlen in der Ebene des Netzes, deren Pole auf ihnen selbst liegen, umhüllen denselben Kegelschnitt, indem ein Punkt und die zugehörige Tangente dieses Kegelschnitts Pol und Polare des Netzes von der verlangten Art sind. Dieser Kegelschnitt enthält die Asymptotenpunkte aller Punktsysteme, welche auf sämmtlichen Geraden in der Ebene des Netzes vorkommen, und die Tangenten dieses Kegelschnitts sind zugleich die Asymptoten sämmtlicher Strahlsysteme des Netzes. Er heisst der Kern des Netzes und dieses ist nichts anderes, als das gesammte Polarsystem für den Kern-Kegelschnitt, d. h. Pol und Polare des Kegelschnitts sind allemal Pol und Polare für das Netz.**

Die vorige Untersuchung ging von der Voraussetzung aus, dass das auf der willkührlich angenommenen Geraden 𝔊 befindliche Punktsystem ein hyperbolisches sei mit den Asymptotenpunkten $s$ und $t$; wenn dies Punktsystem aber elliptisch ist, so fällt die Untersuchung, welche sich wesentlich auf die Realität der Asymptotenpunkte stützte; wir werden also, um den Kernkegelschnitt zu finden, überhaupt eine solche Gerade 𝔊 in der Ebene aufzusuchen haben, deren Punktsystem im Netze ein hyperbolisches ist; wenn irgend eine solche existirt, so giebt es unendlich viele und der Ort ihrer Asymptotenpunkte ist der Kernkegelschnitt, welcher auf die angegebene Art konstruirt werden kann. Ob es aber immer eine solche Gerade geben muss oder ob unter Umständen gar kein hyperbolisches Punktsystem im Netze vorkommt, werden wir aus den zur Konstruktion des Netzes erforderlichen Daten erkennen können (§ 55).

Sind die auf den Trägern 𝔄 und $𝔄_1$, welche konjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, angenommenen Punktsysteme beide hyperbolisch oder auch nur eines von ihnen, so hat nach dem Vorigen das Netz einen reellen Kern; wenn dagegen beide gegebenen Punktsysteme elliptisch sind, so ist die Frage zu entscheiden, ob sonst in dem Netze hyperbolische Punktsysteme vorkommen, oder nicht. Sei der Konstruktion des Netzes gemäss (§ 55) $B_2$ der Schnittpunkt der beiden Träger 𝔄 $𝔄_1$ und die

beiden ihm konjugirten Punkte in den gegebenen Punktsystemen: $B$ auf $\mathfrak{A}_1$ und $B_1$ auf $\mathfrak{A}$, also $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ die Polare von $B_2$, so wird, wenn die gegebenen beiden Punktsysteme elliptisch sind, auch das dem Strahle $\mathfrak{A}_2$ zugehörige Punktsystem des Netzes elliptisch sein; um dieses zu bestimmen, nehmen wir auf $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Punkt $a$ zwischen $B_2 B_1$ und auf $\mathfrak{A}_1$ einen beliebigen Punkt $a_1$ zwischen $B_2 B$, so dass die Verbindungslinie $a a_1$ also nothwendig in einem Punkte $a_2$ ausserhalb $BB_1$ den Strahl $\mathfrak{A}_2$ trifft (Fig. 84); die konjugirten Punkte $\alpha \alpha_1$ zu $a$ und $a_1$ auf den Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ der beiden gegebenen Punktsysteme müssen, da diese elliptisch sind, ausserhalb $B_2 B_1$ und ausserhalb $B_2 B$ liegen; ihre Verbindungslinie muss also auch die dritte Dreiecksseite $BB_1$ in einem Punkte ausserhalb $BB_1$ treffen und der vierte harmonische, welcher $\alpha_2$ ist, liegt daher zwischen $B$ und $B_1$; da nun $BB_1$, ein Paar konjugirter Punkte, getrennt wird durch $a_2 \alpha_2$, ein zweites Paar konjugirter Punkte des auf $\mathfrak{A}_2$ befindlichen Punktsystems, so ist das letztere elliptisch; in gleicher Weise würden wir gesehen haben, dass, wenn beide gegebenen Punktsysteme auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ hyperbolisch sind, das dritte Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$ elliptisch sein muss, wenn dagegen eines von beiden gegebenen Punktsystemen auf $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}_1$ hyperbolisch, das andere elliptisch ist, alsdann das dritte auf $\mathfrak{A}_2$ hyperbolisch sein muss. Wir schliessen hieraus:

(Fig. 84.)

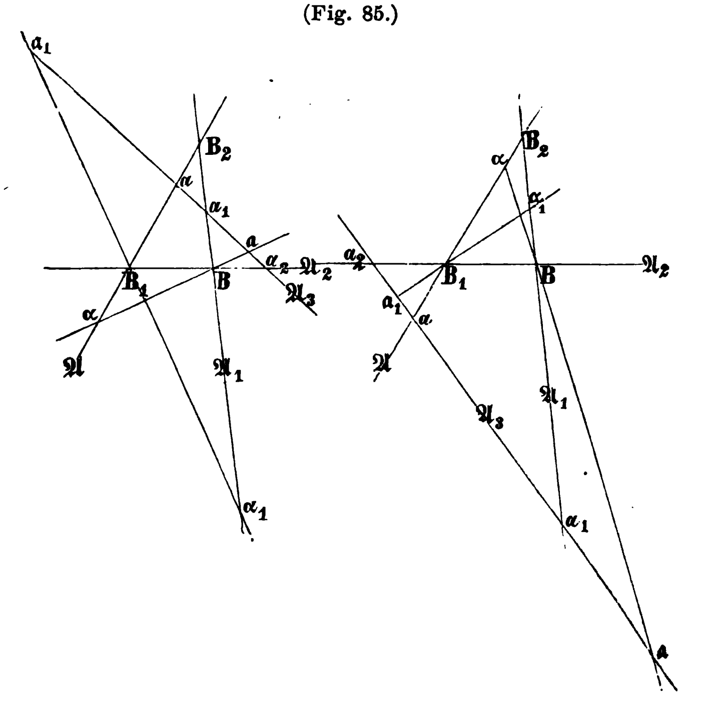



Von den drei auf einem Tripel konjugirter Strahlen des Netzes befindlichen Punktsystemen müssen entweder alle drei elliptisch, oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein; und daher auch: Von den drei einem Tripel konjugirter Punkte zugehörigen Strahlsystemen müssen entweder alle drei elliptisch oder eines elliptisch und die beiden andern hyperbolisch sein.

In dem zu untersuchenden Falle, wo alle drei den Tripelstrahlen $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ zugehörigen Punktsysteme elliptisch sind, zeigt

sich nun, dass überhaupt auf jeder Geraden in der Ebene des Netzes das ihr zugehörige Punktsystem elliptisch ist, also kein einziger reeller Punkt des Kernkegelschnitts existirt. Wir können von dem Tripeldreieck $B_2 B_1 B$, dessen drei Seiten die drei elliptischen Punktsysteme enthalten, irgend zwei der letzteren mit ihren Punktsystemen als zur Konstruktion des Netzes gegeben ansehen; irgend eine Gerade $\mathfrak{A}_3$ in der Ebene kann alsdann nur zwei wesentlich verschiedene Lagen zu dem Dreieck $B_2 B_1 B$ haben; nämlich 1) sie schneidet zwei Dreiecksseiten zwischen den Eckpunkten, die dritte in der Verlängerung, oder 2) sie schneidet alle drei Seiten in ihren Verlängerungen; untersuchen wir zunächst den ersten Fall und nehmen an, $\mathfrak{A}_3$ treffen $B_2 B_1$ in $a$ und $B_2 B$ in $a_1$ zwischen den Eckpunkten des Dreiecks (Fig. 85); das Punktsystem des Netzes auf $\mathfrak{A}_3$ wird dadurch be-

(Fig. 85.)




stimmt, dass wir zu $a$ und $a_1$ die konjugirten Punkte $\alpha$ und $\alpha_1$ nehmen und die Schnittpunkte der Verbindungslinien $\alpha B$ mit $\mathfrak{A}_3$ (den Punkt $\mathfrak{a}$) und $\alpha_1 B_1$ mit $\mathfrak{A}_3$ (den Punkt $\mathfrak{a}_1$) aufsuchen; die

beiden Paare $a$, $\mathfrak{a}$ und $a_1$, $\mathfrak{a}_1$ sind konjugirte Punkte des Punktsystems auf $\mathfrak{A}_3$. Da nun $\alpha$ nothwendig ausserhalb der Strecke $B_2 B_1$ liegen muss, weil das auf $\mathfrak{A}$ gegebene Punktsystem elliptisch ist, so kann $B\alpha$ die Gerade $\mathfrak{A}_3$ nur in der endlichen Strecke zwischen $a_1$ und $a_2$ treffen ($a_2$ ist der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}_3$), und da ebenso $\alpha_1$ ausserhalb $B_2 B$ liegt, so kann $B_1 \alpha_1$ die Gerade $\mathfrak{A}_3$ nur in den Theilen von $a$ durch $\infty$ bis $a_2$ treffen; das Stück zwischen $a a_1$ bleibt beidemal verschont und die Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\, a\, a_1$ liegen also so, dass das eine Paar konjugirter Punkte $a\mathfrak{a}$ durch das andere $a_1 \mathfrak{a}_1$ getrennt wird; das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ ist also elliptisch; dasselbe Raisonnement bleibt bestehen, wenn $\mathfrak{A}_3$ eine solche Lage hat, dass sie zwei andere Seiten des Tripeldreiecks $B_2 B_1 B$ zwischen den Ecken und die dritte in der Verlängerung trifft; im zweiten Falle nun, wenn die Punkte $a$ und $a_1$ ausserhalb $B_2 B_1$ und $B_2 B$ liegen, müssen $\alpha$ und $\alpha_1$ zwischen $B_2 B_1$ und $B_2 B$ liegen; der Strahl $B\alpha$ kann also $\mathfrak{A}_3$ nur in dem Theile von $a_1$ (durch $\infty$) bis $a_2$ treffen und $B_1 \alpha_1$ nur in dem Theile von $a_2$ bis $a$; der Theil $a a_1$ bleibt also wiederum verschont und die Schnittpunkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ liegen wie früher so, dass das eine Paar konjugirter Punkte $a\mathfrak{a}$ durch das andere Paar $a_1 \mathfrak{a}_1$ getrennt wird; das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ ist also wieder elliptisch; da aber die Gerade $\mathfrak{A}_3$, wie sie auch in der Ebene liegen mag, nothwendig eine der beiden untersuchten Lagen haben muss, so folgt, dass alle Punktsysteme, die im Netze vorkommen, elliptisch sind und also auch alle Strahlsysteme.

Wir unterscheiden hiernach zwei wesentlich verschiedene Arten des Netzes:

a) Das elliptische Netz enthält nur elliptische Punktsysteme auf allen Geraden und daher auch nur elliptische Strahlsysteme in allen Punkten der Ebene (da jedes Strahlsystem mit dem ihm zugehörigen Punktsystem auf der Polare perspektivisch liegt und also gleichartig ist).

b) Das hyperbolische Netz enthält theils elliptische, theils hyperbolische Punktsysteme und ebenso Strahlsysteme; bei einem Tripel konjugirter Strahlen und Punkte sind immer zwei Systeme hyperbolisch und das dritte elliptisch; die Asymptotenpunkte aller Punktsysteme liegen auf dem Kernkegelschnitt und die Asymptoten aller Strahlsysteme berühren denselben Kernkegelschnitt; das Netz ist das gewöhnliche Polarsystem für diesen Kegelschnitt.

Ein Punktsystem hat, wenn es hyperbolisch ist, zwei reelle Asymptotenpunkte, welche dasselbe vollkommen bestimmen, und umgekehrt zwei reelle Punkte einer Geraden, als die Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems aufgefasst, werden durch dieses Punktsystem vertreten; dagegen wenn das Punktsystem elliptisch ist, hat es keine reellen Asymptotenpunkte und ist nichtsdestoweniger ein völlig reelles, in ganz gleicher Weise konstruirbares Gebilde, von dem wir der Uebereinstimmung wegen sagen, dass es zwei imaginäre Asymptotenpunkte hat; durch das elliptische Punktsystem wird also ein imaginäres Punktenpaar vertreten; — analogerweise haben wir in dem Involutionsnetz ein völlig reelles, immer in derselben Art konstruirbares Gebilde, welches, wenn es hyperbolisch ist, einen reellen Kegelschnitt, seinen Kern, vertritt und von dem wir wiederum der Uebereinstimmung wegen, wenn es elliptisch ist, sagen, es habe einen imaginären Kern, so dass das elliptische Netz einen imaginären Kegelschnitt vertritt. Wir verstehen hiernach unter einem imaginären Kegelschnitt den Kern eines elliptischen Netzes und operiren mit dem Netze, dessen wesentliche Eigenschaften bestehen bleiben unabhängig davon, ob der Kern reell oder imaginär ist. Es ist ersichtlich, dass es für die synthetische Behandlung geometrischer Probleme von grosser Bedeutung ist, ein völlig reelles Gebilde zu besitzen, welches an Stelle eines imaginären Kegelschnitts zu setzen ist.

Nehmen wir zur Bestimmung eines Netzes zwei hyperbolische Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, die konjugirte Strahlen des Netzes sein sollen, und sei dem Schnittpunkt der Träger $z$ auf dem ersten der Punkt $y$, auf dem andern der Punkt $x$ konjugirt, seien ferner die Asymptotenpunkte des ersten Punktsystems $a\alpha$, die des zweiten $b\beta$, so kann man zwei neue Punktsysteme aus denselben Punkten bilden, die elliptisch sind, indem man einmal $x$ und $y$, $a$ und $\alpha$, das andere Mal $z$ und $x$, $b$ und $\beta$ als Paare konjugirter Punkte auffasst, die jedesmal ein elliptisches Punktsystem erzeugen, weil sie harmonisch gelegen sind. Dadurch hat man auf jedem der Träger zwei Punktsysteme, ein hyperbolisches und ein elliptisches, und indem man zwei auf verschiedenen Trägern befindliche zur Bildung eines Netzes verwendet, was auf vier Arten geschehen kann, erhält man vier verschiedene Netze, die in eigenthümlicher Verbindung mit einander stehen; ihre Kernkegel-

schnitte sind nämlich vier harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte (§ 54), von denen drei reell, der vierte imaginär ist; wenn wir nämlich die Punktsysteme auf den beiden Trägern durch $(h)$ $(e)$ $(h_1)$ $(e_1)$ bezeichnen und die vier Verbindungen:

$$(h)\,(h_1), \quad (h)\,(e_1), \quad (e)\,(h_1), \quad (e)\,(e_1)$$

auf den konjugirten Trägern $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ zur Erzeugung der Netze verwenden, so werden die drei ersten Netze hyperbolisch, das letzte elliptisch.

Die Richtigkeit der obigen Behauptung folgt unmittelbar aus der Konstruktion der vier Mittelpunkte dieser Netze; denn da $xyz$ ein gemeinschaftliches Tripel für alle ist, so sind sie vollkommen bestimmt, sobald man noch den Mittelpunkt kennt; seien $\mu$ und $\mu_1$ die Mittelpunkte von $(h)$ und $(h_1)$, so geht aus § 16 hervor, dass der Mittelpunkt $\nu$ des Systems $(e)$ der vierte harmonische zu $zy\mu$, dem $\mu$ zugeordnete und ebenso der Mittelpunkt $\nu_1$ des Systems $(e_1)$ der vierte harmonische zu $zx\mu_1$, dem $\mu_1$ zugeordnete Punkt ist, folglich haben wir:

$$(x\mu,\ y\mu_1) = \mathfrak{M} \qquad (x\mu,\ y\nu_1) = \mathfrak{M}'$$
$$(x\nu,\ y\nu_1) = \mathfrak{M}''' \qquad (x\nu,\ y\mu_1) = \mathfrak{M}''$$

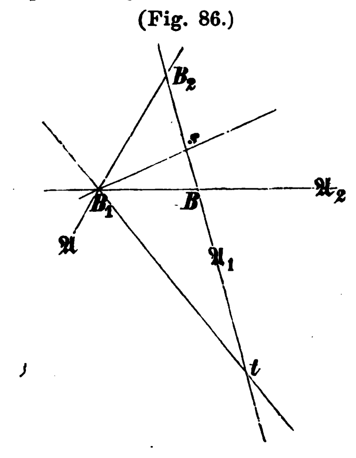
als Mittelpunkte dieser vier Netze. Dies ist aber nach § 54 (Fig. 79) genau die Lage der vier Mittelpunkte von vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten, welche das Tripel $xyz$ gemeinschaftlich haben.

Wir müssen jetzt noch einige Specialitäten erwähnen: Beim hyperbolischen Netz wird die doppelt-unendliche Schaar von Geraden in der Ebene, welche theils elliptische, theils hyperbolische Punktsysteme enthalten, in diese beiden Gattungen getrennt durch eine einfach-unendliche Reihe von solchen Geraden, welche parabolische Punktsysteme enthalten; wir haben ein prabolisches Punktsystem einen solchen speciellen Fall des hyperbolischen genannt, bei welchem die beiden Asymptotenpunkte zusammenfallen; es hat die Eigenthümlichkeit, dass zu diesem Doppelpunkte jeder beliebige andere Punkt der Geraden als konjugirter und wiederum zu jedem beliebigen Punkt der Geraden der Doppelpunkt als konjugirter anzusehen ist; für alle diejenigen Geraden, welche Tangenten des Kernkegelschnitts sind, ist also das zugehörige Punktsystem ein parabolisches und sie bilden die genannte Grenze. Anderseits giebt es unter den doppelt unendlich-vielen Punkten der Ebene, deren Strahlsysteme theils elliptisch, theils hyperbolisch sind, eine

einfach-unendliche Reihe solcher Punkte, deren Strahlsysteme parabolisch werden; dies sind die Punkte des Kernkegelschnitts und sie bilden die Grenze zwischen dem einen und dem andern Gebiet; in jeder Tangente des Kernkegelschnitts, welche ein parabolisches Punktsystem des Netzes enthält, ist der Berührungspunkt der Doppelpunkt des Systems und für jeden Punkt des Kernkegelschnitts, welcher ein parabolisches Strahlsystem enthält, ist die Tangente der Doppelstrahl desselben.

In besonderer Weise vereinfacht sich das parabolische Netz, wenn wir von den beiden erzeugenden Punktsystemen eines parabolisch annehmen; sei das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ parabolisch, so ist $B_1$ der Doppelpunkt desselben (Fig. 86), weil er zu jedem beliebigen Punkte der konjugirte ist, mithin auch zu $B_2$, dem Schnittpunkte ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$); die Polare $\mathfrak{A}_2$ von $B_2$, welche $B_1 B$ verbindet, wird alsdann nach der Konstruktion des Netzes ein Punktsystem enthalten, welches ebenfalls parabolisch ist und seinen Doppelpunkt in $B_1$ hat; um den Kern eines solchen besonderen Netzes zu finden, kommt es darauf an zu wissen, ob das zweite auf $\mathfrak{A}_1$ gegebene Punktsystem hyperbolisch oder elliptisch ist; wenn es hyperbolisch ist mit den Asymptotenpunkten $s$ und $t$, so zeigt die frühere Konstruktion des Kernkegelschnitts, dass dasselbe in das Linienpaar $B_1 s$ und $B_1 t$ degenerirt; von jeder beliebigen Geraden in der Ebene wird der Pol der feste Punkt $B_1$ und von jedem beliebigen Punkte in der Ebene geht die Polare durch $B_1$; das Strahlsystem, welches in $B_1$ seinen Mittelpunkt hat und mit dem auf $\mathfrak{A}_1$ gegebenen Punktsystem perspektivisch liegt, schneidet daher sämmtliche Geraden in der Ebene in denjenigen Punktsystemen, welche ihnen im Netze zugehören; wenn dagegen zweitens das auf $\mathfrak{A}_1$ gegebene Punktsystem elliptisch ist, so reducirt sich der Kernkegelschnitt auf den einzigen Punkt $B_1$; alle Punktsysteme sind elliptisch mit Ausnahme derjenigen, welche auf den durch $B_1$ laufenden Strahlen liegen, und diese sind sämmtlich parabolisch; wir können auch sagen,

(Fig. 86.)



dass sich in diesem Falle der Kernkegelschnitt auf ein imaginäres Linienpaar reducirt, dessen reeller Doppelpunkt $B_1$ ist, indem dieses Linienpaar von den imaginären Asymptoten des in $B_1$ befindlichen elliptischen Strahlsystems gebildet wird. In dem Falle, wo der Kernkegelschnitt des Netzes sich auf ein reelles Linienpaar oder einen Punkt (imaginäres Linienpaar) reducirt, heisst das Netz ein parabolisches. Das parabolische Netz besteht also eigentlich aus nichts anderem, als einem gewöhnlichen ebenen Strahlsystem.

Werden beide erzeugenden Punktsysteme parabolisch angenommen mit den Doppelpunkten $B_1 B$, so zieht sich der Kernkegelschnitt anstatt auf ein Linienpaar auf eine einzige doppelt zu zählende Gerade $BB_1$ zusammen; nehmen wir an, dass von den beiden erzeugenden Punktsystemen eines parabolisch mit dem Doppelpunkt $B_1$, das andere hyperbolisch sei und einen Asymptotenpunkt in $B_1$ habe, dieser also der Schnittpunkt der beiden Träger wird, so ist das Netz unbestimmt und verlangt zu seiner völligen Bestimmung noch ein weiteres Datum. Gehen wir von der Bestimmung des Netzes durch zwei Strahlsysteme aus, deren Mittelpunkte zugeordnete Punkte sein sollen, so ergeben sich analoge besondere Fälle, wenn wir eines derselben parabolisch wählen. Der Kernkegelschnitt reducirt sich auf ein reelles oder imaginäres Punktenpaar, dessen Träger immer reell ist, oder wenn beide Strahlsysteme parabolisch sind, auf einen einzigen doppelt zu zählenden Punkt. Wir kehren nach diesen Besonderheiten wieder zu dem allgemeinen Involutionsnetz zurück.

## § 57. **Verschiedene Bestimmungs-Arten des Netzes.**

Wenn wir als bestimmende Elemente des Netzes annehmen: 1) ein Paar konjugirter Punkte oder Strahlen, 2) ein Punktsystem, welches zwei Paare konjugirter Punkte vertritt, oder ein Strahlsystem, 3) ein Paar Pol und Polare, welches ebenfalls zwei Paar konjugirter Punkte oder Strahlen vertritt, endlich 4) ein Tripel konjugirter Punkte oder Strahlen, welches drei Paar konjugirter Punkte oder Strahlen vertritt, so lassen sich diese Elemente in mannichfacher Weise zur Bestimmung des Netzes zusammenstellen; von diesen Bestimmungsarten wollen wir einige hier anführen, und zwar nur solche, die das Netz eindeutig bestimmen.

Die im § 55 zur Konstruktion des Netzes angenommenen Bestimmungsstücke waren:

1) zwei konjugirte Strahlen des Netzes ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$) und auf jedem das Punktsystem, welches dem Netze zugehören soll, oder auch zwei konjugirte Punkte und in jedem das zugehörige Strahlsystem des Netzes. Hieraus ergiebt sich sofort eine zweite Bestimmungsart durch

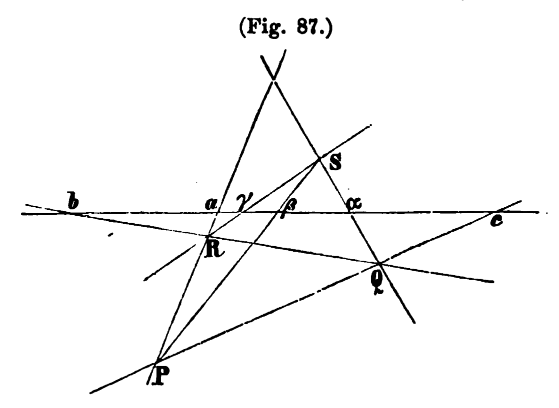
2) ein Tripel konjugirter Punkte $BB_1B_2$ des Netzes und eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}_3$ mit dem ihr zugehörigen Punktsystem; denn die drei Verbindungslinien: $(B_1 B_2) = \mathfrak{A}$ $(B_2 B) = \mathfrak{A}_1$ $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ mögen die Gerade $\mathfrak{A}_3$ in den Punkten $a a_1 a_2$ beziehlich treffen; seien die drei konjugirten Punkte zu diesen in dem auf $\mathfrak{A}_3$ gegebenen Punktsystem $\alpha\alpha_1\alpha_2$, so treffen sich $\alpha B$, $\alpha_1 B_1$, $\alpha_2 B_2$ in einem Punkte $B_3$, dem Pol von $\mathfrak{A}_3$, und zugleich treffen sie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ in solchen Punkten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, welche auf diesen drei Geraden konjugirt sind den Punkten $a a_1 a_2$; da nun je zwei Tripelpunkte ausserdem ein zweites Paar konjugirter Punkte sind, so kennen wir die Punktsysteme auf zwei konjugirten Strahlen des Netzes, also nach 1) das ganze Netz. In analoger Weise ist das Netz bestimmt durch ein Tripel konjugirter Strahlen und ein beliebiges Strahlsystem $B_3$, welches dem Netze zugehören soll; ferner ergiebt sich, dass es auch bestimmt wird durch

3) ein Tripel konjugirter Punkte $BB_1B_2$ und ein beliebiges Paar Pol und Polare $B_3$ und $\mathfrak{A}_3$; denn möge $\mathfrak{A}_3$ die beiden Verbindungslinien $B_2B_1$ und $B_2B$ in $a$ und $a_1$ treffen und seien die Schnittpunkte $(BB_3, B_2B_1) = \alpha$, $(B_1B_3, B_2B) = \alpha_1$, so sind $a$ und $\alpha$, sowie $a_1$ und $\alpha_1$ konjugirte Punkte des Netzes, und da auch zwei Tripelpunkte immer konjugirt sind, so kennen wir die Punktsysteme auf zwei konjugirten Strahlen des Netzes, mithin nach 1) das ganze Netz. Umständlicher wird schon die Bestimmung des Netzes durch

4) ein Tripel konjugirter Punkte $BB_1B_2$ und zwei beliebige Paare $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$, welche konjugirte Punkte sein sollen. Hier können wir so verfahren, dass wir durch $\pi$ eine beliebige Gerade legen, dieselbe als Polare von $p$ auffassen, wodurch dann nach 3) das Netz bestimmt ist, und für das so bestimmte Netz die Polare zu $p_1$ konstruiren; verändern wir dann die durch $\pi$ angenommene Gerade, so verändert sich auch

die zuletzt konstruirte Polare; sobald es vorkommt, dass sie durch den gegebenen Punkt $\pi_1$ geht, ist das Netz den gegebenen Bedingungen gemäss bestimmt. Die dabei eintretende Veränderung lässt sich aber leicht überschauen, wenn wir folgende Bemerkung vorausschicken: Das Punktsystem auf einer Geraden ist durch zwei Paar konjugirter Punkte $a$ und $\alpha$, $b$ und $\beta$ bestimmt und zu einem dritten Punkte $c$ kann der konjugirte $\gamma$ nach § 15 so gefunden werden (Fig. 87): durch $c$ ziehe man eine beliebige Gerade, nehme

(Fig. 87.)




auf ihr zwei Punkte $P$ und $Q$ an, suche die Schnittpunkte:

$$(Pa,\ Qb) = R \qquad (P\beta,\ Q\alpha) = S,$$

dann geht $RS$ durch $\gamma$, wegen der Eigenschaft des vollständigen Vierecks $PQRS$, dessen Seiten von einer Transversale in sechs Punkten einer Involution geschnitten werden; wenn wir nun von den vier zur Bestimmung des Punktsystems erforderlichen Punkten $a\alpha b\beta$ drei $a\alpha$ und $b$ festhalten, den vierten $\beta$ aber verändern, so variirt das Punktsystem und zu dem festen Punkt $c$ gehört jedesmal ein anderes $\gamma$; aus der Konstruktion geht aber hervor, dass bei der Bewegung von $\beta$, während die Punkte $a\,\alpha\,b\,c\,P\,Q$ festgehalten werden, auch $R$ fest bleibt, $S$ dagegen sich verändert, indem es auf $Q\alpha$ eine mit $\beta$ perspektivisch liegende Punktreihe durchläuft; $\gamma$ durchläuft wiederum eine mit $S$ perspektivische Punktreihe, also beschreiben auch $\beta$ und $\gamma$ zwei aufeinanderliegende projektivische Punktreihen, deren Doppelelemente $a$ und $\alpha$ werden. Dies vorausgeschickt, sei nun $BB_1B_2$ das gegebene Tripel, also $(B_2B_1) = \mathfrak{A}$ und $(B_2B) = \mathfrak{A}_1$ konjugirte Strahlen; $\mathfrak{A}$ werde von $pB$ und $p_1B$ in $a$ und $b$ getroffen, $\mathfrak{A}_1$ dagegen

von $pB_1$ und $p_1 B_1$ in $a_1$ und $b_1$; wenn wir durch $\pi$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{L}$ ziehen, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ in $\alpha$ und $\alpha_1$ trifft und nun auf $\mathfrak{A}$ das durch die Paare $B_2 B_1$ und $a\alpha$, dagegen auf $\mathfrak{A}_1$ das durch die Paare $B_2 B$ und $a_1 \alpha_1$ bestimmte Punktsystem auffassen und in dem ersten zu $b$ den konjugirten Punkt $\beta$, in dem andern zu $b_1$ den konjugirten Punkt $\beta_1$ bestimmen, so ist $\beta\beta_1$ die Polare von $p_1$; indem wir nunmehr die Gerade $\mathfrak{L}$ um den Punkt $\pi$ drehen, verändern sich $\alpha$ und $\alpha_1$ und mit ihnen $\beta$ und $\beta_1$; aus der vorausgeschickten Hülfsbetrachtung geht hervor, dass $\beta$ und $\alpha$ projektivische Punktreihen beschreiben, deren Doppelelemente $B_2$ und $B_1$ sind; ebenso beschreiben $\beta_1$ und $\alpha_1$ projektivische Punktreihen mit den Doppelpunkten $B_2$ und $B$; $\alpha$ und $\alpha_1$ durchlaufen aber perspektivische Punktreihen, deren Projektionspunkt $\pi$ ist, folglich beschreiben auch $\beta$ und $\beta_1$ projektivische Punktreihen auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und dieselben liegen perspektivisch, denn wenn $\alpha$ nach $B_2$ kommt, so geht auch $\alpha_1$ dahin, nach dem Vorigen aber auch $\beta$ und $\beta_1$, mithin fallen in den Schnittpunkt der Träger entsprechende Punkte der projektivischen Punktreihen, diese liegen daher perspektivisch, also $\beta\beta_1$ läuft durch einen festen Punkt $o$, der durch zwei beliebig gewählte Lagen für $\mathfrak{L}$ leicht zu konstruiren ist; auch sehen wir, dass diese Polare $\beta\beta_1 = \mathfrak{L}_1$ des Punktes $p_1$ ein Strahlbüschel beschreibt, welches projektivisch ist mit dem von $\mathfrak{L}$ beschriebenen; durch den letzten gegebenen Punkt $\pi_1$ giebt es also nur eine einzige Gerade $\mathfrak{L}_1$, nämlich die Verbindungslinie $\pi_1 o$ (es müsste denn der besondere Fall eintreten, dass $\pi_1$ mit $o$ zusammenfiele, dann wäre das Netz unbestimmt); ziehen wir nach der Konstruktion des Punktes $o$, $\pi_1 o$ und nehmen diese Gerade als Polare von $p_1$, so ist das Netz durch dies Paar Pol und Polare und durch das Tripel $BB_1B_2$ nach 3) völlig bestimmt und genügt offenbar den verlangten Bedingungen; das Netz ist also im Allgemeinen vollkommen und eindeutig bestimmt durch die gegebenen Bestimmungsstücke und die Konstruktion desselben aus der vorigen Betrachtung, wenn auch ein wenig umständlich, doch allein mittelst des Lineals ausführbar. Am einfachsten gestaltet sich diese Konstruktion, wenn wir für die eine Lage von $\mathfrak{L}$ die Gerade $\pi B$ und für die andere Lage $\pi B_1$ nehmen; dann fällt das eine Mal $\alpha_1$ nach $B$, folglich auch $\beta_1$ nach $B$, das andere Mal $\alpha$ nach $B_1$ und auch $\beta$ nach $B_1$ und der Punkt $o$ wird auf folgende Art gefunden: Sind das Tripel $B_2 B_1 B$ und

das Paar konjugirter Punkte $p, \pi$ gegeben, so ziehe man $BB_2$, $BB_1$ und $Bp$, $B\pi$, wodurch man zwei Paar Strahlen erhält, welche ein Strahlsystem bestimmen, und suche den zu $Bp_1$ konjugirten Strahl dieses Strahlsystems; zweitens ziehe man $B_1B_2$, $B_1B$ und $B_1p$, $B_1\pi$, wodurch man zwei Strahlenpaare eines andern Strahlsystems erhält, in welchem man den dem Strahle $B_1p_1$ konjugirten aufsuche; dieser und der vorige in dem Strahlsystem $(B)$ schneiden sich im gesuchten Punkt $o$; man erhält auch ein drittes Strahlsystem in $B_2$ durch die Strahlenpaare $B_2B$, $B_2B_1$ und $B_2p$, $B_2\pi$ und der zu $B_2p_1$ konjugirte Strahl des letzten Strahlsystems muss ebenfalls durch $o$ gehen. Hieraus ergiebt sich der Satz: Für alle Netze, welche ein Tripel $BB_1B_2$ und ein Paar konjugirter Punkte $p, \pi$ gemeinschaftlich haben, laufen die Polaren ein und desselben Punktes $(p_1)$ durch einen festen Punkt $(o)$ (§ 61).

5) Zwei Tripel konjugirter Punkte $BB_1B_2$ und $B^1B_1{}^1B_2{}^1$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes erforderlich und ausreichend sind; wenn diese sechs Punkte aber der Bedingung genügen, dass sie auf einem Kegelschnitt liegen (§ 55), so ist wiederum das Netz vollkommen und eindeutig durch sie bestimmt; es genügt alsdann, zu seiner Konstruktion das Tripel $BB_1B_2$ und das Paar Pol und Polare: $B^1$ und $B_1{}^1B_2{}^1$ zu wählen, wodurch nach 3) das Netz bestimmt wird, dann müssen $B_1{}^1$ und $B_2{}^1$ von selbst ein Paar konjugirter Punkte sein.

An die in 1) enthaltene Entstehungsweise des Netzes durch zwei Punktsysteme, deren Träger oder zwei Strahlsysteme, deren Mittelpunkte konjugirte Elemente sind, knüpft sich noch eine neue Bestimmungsart durch ein Punktsystem und ein Strahlsystem, welche perspektivisch liegen und Pol und Polare des Netzes liefern; hierdurch allein ist aber das Netz noch nicht völlig bestimmt; zu seiner Bestimmung ist noch erforderlich ein Paar konjugirter Punkte oder Strahlen; also:

6) ein Strahlsystem mit dem Mittelpunkt $B$, das auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{A}$ durch das Strahlsystem ausgeschnittene Punktsystem, die Bedingung, dass $B$ und $\mathfrak{A}$ Pol und Polare des Netzes seien mit den ihnen zugehörigen Systemen, und endlich noch ein beliebiges Paar konjugirter Punkte $p, \pi$ bestimmen das Netz vollständig; treffe nämlich $p\pi$ die Gerade $\mathfrak{A}$ in $s$ und sei $\sigma$ der kon-

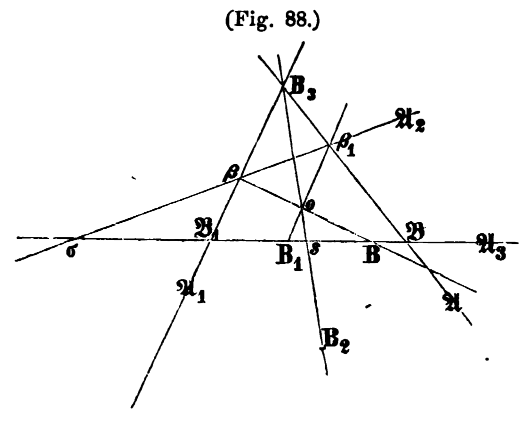
jugirte Punkt in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem, so wird $B\sigma$ die Polare von $s$ sein, also $p\pi$ in einem solchen Punkte $\sigma$ treffen, dass $p\pi$, $s\sigma$ zwei Paar konjugirte Punkte sind, welche das dem Netze zugehörige Punktsystem auf dieser Geraden bestimmen; nehmen wir daher irgend ein Paar konjugirter Punkte $B_1 B_2$ des auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, so haben wir ein Tripel $B B_1 B_2$ und ausserdem ein Punktsystem auf $p\pi$, wodurch das Netz nach 2) bestimmt ist; in gleicher Weise ist das Netz bestimmt, sobald Pol und Polare mit ihren Systemen und ein beliebiges Paar konjugirter Strahlen gegeben sind.

7) Zwei beliebige Paare von Pol und Polare: $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$, und ein Paar konjugirter Punkte $p$, $\pi$ bestimmen das Netz ebenfalls eindeutig; sei der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1) = B_2$ und die Verbindungslinie $(B\, B_1) = \mathfrak{A}_2$, so sind also auch $B_2$ und $\mathfrak{A}_2$ ein Paar Pole und Polare; bezeichnen wir die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_2) = \mathbf{B}$ und $(\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2) = \mathbf{B}_1$, so haben wir auf $\mathfrak{A}_2$ zwei Paar konjugirter Punkte $B\mathbf{B}$ und $B_1\mathbf{B}_1$, also das ganze dem Netze zugehörige Punktsystem und zugleich das mit ihm perspektivische Strahlsystem in $B_2$, welches dem Netze zugehört, weil $B_2$ der Pol von $\mathfrak{A}_2$ ist; wir haben nun ausserdem noch ein Paar konjugirter Punkte $p\pi$, wodurch nach dem vorigen Falle 6) das Netz vollständig und eindeutig bestimmt wird.

8) Drei beliebige Paare von Pol und Polare: $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$, $B_2$ und $\mathfrak{A}_2$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes erforderlich sind; wir können indessen die Abhängigkeit dieser sechs Stücke ermitteln, welche stattfinden muss, damit sie das Netz bestimmen, ohne sich zu widersprechen. Nehmen wir $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$ und den Punkt $B_2$ willkührlich an (Fig. 88), so ist die Verbindungslinie $(B B_1) = \mathfrak{A}_3$ die Polare des Schnittpunktes $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1) = B_3$; das Punktsystem auf $\mathfrak{A}_3$ ist bestimmt durch zwei Paare konjugirter Punkte: $B$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_3)$, $B_1$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_3)$; ziehen wir $B_2 B_3$, so muss der Pol dieser Geraden auf $\mathfrak{A}_3$ liegen und der konjugirte Punkt $\sigma$ zu dem Schnittpunkte $s$ sein, in welchem $B_2 B_3$ die $\mathfrak{A}_3$ trifft; es sind also $B_2$ und $\sigma$ konjugirte Punkte, d. h. die Polare von $B_2$ muss durch $\sigma$ gehen; sie ist mithin nicht mehr vollkommen frei, sondern muss durch einen bestimmten, von den beiden andern Paaren Pol und Polare: $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$ und dem Punkt $B_2$ abhängigen festen Punkt $\sigma$ gehen; ziehen wir

durch $\sigma$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{A}_2$ als Polare von $B_2$, so ist jetzt das Netz bestimmt und die Abhängigkeit der drei Punkte $B B_1 B_2$

(Fig. 88.)




und ihrer Polaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ von einander stellt sich in folgender Weise heraus: der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2)$ sei $\beta_1$ und der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ sei $\beta$ und es mögen sich $B\beta$ und $B_1\beta_1$ in $o$ treffen, dann gehen in dem vollständigen Viereck $\beta o \beta_1 B_3$ zwei Seitenpaare durch die Punkte $B\mathfrak{B}$ und $B_1\mathfrak{B}_1$ des auf $\mathfrak{A}_3$ befindlichen Punktsystems, vom dritten Seitenpaar geht ein Theil $\beta\beta_1$ durch $\sigma$, folglich der andere $B_2 o$ durch den konjugirten Punkt $s$, d. h. $B\beta$, $B_1\beta_1$, $B_2 B_3$ schneiden sich in einem Punkte; nun sind aber $B B_1 B_2$ die Ecken eines Dreiecks und $B_3\beta\beta_1$ die Ecken des von den drei Polaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ gebildeten Dreiseits; diese beiden Dreiecke liegen also perspektivisch (§ 31) und es gilt der Satz: Hat man in einem Netze drei beliebige Punkte $BB_1B_2$ und deren drei Polaren $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$, welche sich paarweise in den Punkten $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1) = \mathbf{B}_2$, $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) = \mathbf{B}$, $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}) = \mathbf{B}_1$ schneiden, so liegen die beiden Dreiecke $BB_1B_2$ und $\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ perspektivisch, d. h. $B\mathbf{B}$, $B_1\mathbf{B}_1$, $B_2\mathbf{B}_2$ schneiden sich in einem Punkte. Hieraus folgt die gleichbedeutende Bedingung, dass die Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ mit $B_1B_2$, $\mathfrak{A}_1$ mit $B_2B$ und $\mathfrak{A}_2$ mit $BB_1$ drei Punkte in gerader Linie sein müssen. Um dann zu irgend einem Punkte $P$ in der Ebene die Polare $\mathfrak{L}$ zu konstruiren, kann man, wie leicht nachzuweisen ist, in folgender Weise verfahren: Man ziehe $PB$, welches $\mathfrak{A}_1$ in $\beta_1$ trifft, und $PB_1$, welches $\mathfrak{A}$ in $\beta$ treffe, dann wird $(\beta\beta_1, BB_1) = x$ ein Punkt der Polare $\mathfrak{L}$ sein; bestimmt man in gleicher Weise die Schnittpunkte:

$$(PB_1, \mathfrak{A}_2) \qquad (PB_2, \mathfrak{A}_1),$$

so trifft ihre Verbindungslinie $B_1 B_2$ in $y$ einem zweiten Punkte der gesuchten Polare $\mathfrak{L}$; diese ist also schon bekannt; man kann noch einen dritten Punkt $z$ von ihr finden, indem man die Schnittpunkte:

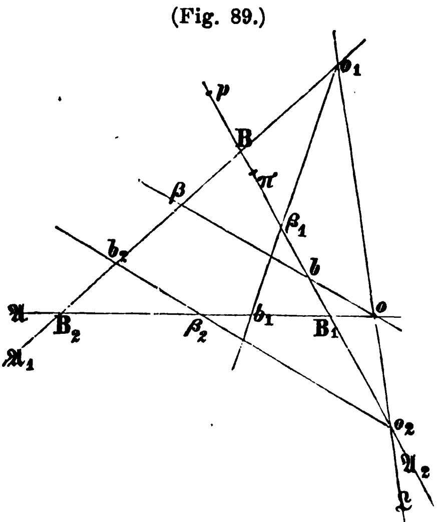
$$(PB_2, \mathfrak{A}) \qquad (PB, \mathfrak{A}_2)$$

verbindet und diese Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte mit $BB_2$ verlängert, welcher $z$ ist. Die drei Punkte $xyz$ liegen auf einer Geraden $\mathfrak{L}$. Nun können wir auch rückwärts schliessen: Wenn die zur Bestimmung des Netzes gegebenen drei Paare Pole und Polaren, $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$, $B_2$ und $\mathfrak{A}_2$, der Bedingung genügen, dass die beiden Dreiecke $BB_1B_2$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ beziehlich perspektivisch liegen, dann ist ein Netz durch sie vollständig und eindeutig bestimmt.

9) **Zwei beliebige Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, welche nicht konjugirte Strahlen sein sollen, und irgend ein Paar konjugirter Punkte $p, \pi$ bestimmen** das Netz; sei $B_2$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, dann ist die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte der Träger, welche ihrem Schnittpunkte konjugirt sind in den gegebenen Punktsystemen, die Polare von $B_2$; auf der Verbindungslinie $p\pi$ kennen wir nur dies eine Paar konjugirter Punkte; wäre uns das ganze Punktsystem auf dieser Geraden bekannt und bezeichnen wir ihren Schnittpunkt mit $\mathfrak{A}$ durch $B_1$, mit $\mathfrak{A}_1$ durch $B$, so hätten wir auch die Polaren von $B$ und $B_1$, indem wir die ihnen konjugirten Punkte in den beiden Paaren von Punktsystemen verbinden, deren Träger sich einmal in $B$, das andere Mal in $B_1$ treffen, wir hätten dann also drei Paare Pole und Polaren, welche der in 8) gefundenen Bedingung Genüge leisten; sei nämlich (Fig. 89) in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem dem $B_2$ konjugirt $\beta_2$, dem $B_1$ konjugirt $b_1$, in dem auf $\mathfrak{A}_1$ gegebenen Punktsystem dem $B_2$ konjugirt $b_2$, dem $B$ konjugirt $\beta$ und endlich in dem auf der Verbindungslinie $(BB_1) = \mathfrak{A}_2$ angenommenen Punktsystem dem $B$ konjugirt $b$, dem $B_1$ konjugirt $\beta_1$, so ist die Polare von $B_2$: $b_2\beta_2$, von $B$: $b\beta$, von $B_1$: $b_1\beta_1$; es müssen nun die Seiten dieses Polardreiseits die entsprechenden Seiten des Dreiecks $BB_1B_2$ in drei Punkten einer Geraden treffen, nämlich $(b_2\beta_2, BB_1) = o_2$, $(b\beta, B_1B_2) = o$, $(b_1\beta_1, B_2B) = o_1$; von diesen drei auf

einer Geraden liegenden Punkten $o_2\, o\, o_1$ ist einer, nämlich $o_2$, gegeben als der Schnittpunkt der durch die beiden Punktsysteme

(Fig. 89.)



auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ bekannten Polare von $B_2$ mit der Verbindungslinie $p\pi$; wir können also durch den bekannten Punkt $o_2$ eine veränderliche Gerade $\mathfrak{L}$ ziehen, durch welche dann das Netz völlig bestimmt wird, und für dieses so bestimmte Netz zu dem gegebenen festen Punkte $p$ den konjugirten Punkt auf $\mathfrak{A}_2$ bestimmen; mit der Veränderung von $\mathfrak{L}$ verändert sich auch der zuletzt konstruirte Punkt und es wird nur einmal vorkommen, dass er mit dem gegebenen Punkte $\pi$ zusammenfällt; durch diese besondere Lage der Geraden $\mathfrak{L}$ ist alsdann das Netz allen Bedingungen der Aufgabe gemäss bestimmt. Es ist leicht in der Figur zu verfolgen, wie sich mit der Drehung von $\mathfrak{L}$ um $o_2$ das durch sie bestimmte Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$, also auch der dem festen Punkt $p$ jedesmal konjugirte Punkt $\mathfrak{p}$ verändert. In der That $o$ und $o_1$ beschreiben zwei perspektivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, also $b_1 o_1$ und $\beta o$ zwei projektivische Strahlbüschel, die Punkte $\beta_1$ und $b$ zwei projektivische Punktreihen auf $\mathfrak{A}_2$ der Art, dass, wenn $\beta_1$ nach $B$ gelangt, $b$ nach $B_1$ kommt und zugleich, wenn $\beta_1$ nach $B_1$ kommt, $b$ nach $B$ gelangt, also $\beta_1$ und $b$ erzeugen bei der Bewegung selbst ein neues Punktsystem, von dem $B$ und $B_1$ ein Paar konjugirter Punkte ist. Nun bestimmen die beiden Paare $Bb$ und

$B_1 \beta_1$ dasjenige Punktsystem auf $\mathfrak{A}_2$, für welches der dem festen Punkt $p$ konjugirte $\mathfrak{p}$ bestimmt werden muss; nach der bekannten, schon öfters angewandten Konstruktion eines sechsten Punktes der Involution ziehen wir durch $p$ irgend eine Gerade, nehmen zwei beliebige Punkte $P$ und $Q$ derselben, bestimmen die Schnittpunkte:

$$(PB,\ QB_1) = R \quad ; \quad (P\beta_1,\ Qb) = S,$$

dann trifft $RS$ die Gerade $\mathfrak{A}_2$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{p}$. Bei der auszuführenden Bewegung wird nun $R$ fest bleiben und $S$ einen Kegelschnitt beschreiben, weil $b$ und $\beta_1$ projektivische Punktreihen durchlaufen; dieser Kegelschnitt geht durch $P$ und $Q$, aber auch durch $R$, weil, wenn $\beta_1$ nach $B$ gelangt, $b$ nach $B_1$ kommt; folglich beschreibt $RS$ ein Strahlbüschel, welches mit $PS$ projektivisch ist, also auch mit der Punktreihe $\beta_1$ und $b$, daher mit $o_1$, $o$ und schliesslich mit dem von der Geraden $\mathfrak{L}$ erzeugten Strahlbüschel; der Schnittpunkt $\mathfrak{p}$ der Geraden $RS$ mit $\mathfrak{A}_2$ beschreibt daher eine Punktreihe, welche mit dem durch die Bewegung von $\mathfrak{L}$ hervorgerufenen Strahlbüschel projektivisch ist. Nachdem diese projektivische Beziehung erkannt und durch eine einfache Konstruktion, zu welcher man nur des Lineals bedarf, hergestellt ist, leuchtet es ein, dass nur für eine einzige bestimmte Lage von $\mathfrak{L}$ der veränderliche Punkt $\mathfrak{p}$ mit dem gegebenen $\pi$ zusammenfallen kann, und diese Lage von $\mathfrak{L}$ ist durch die bekannte projektivische Beziehung allein mittelst des Lineals zu ermitteln, indem man zu dem gegebenen Punkte $\pi$, als der Punktreihe $(\mathfrak{p})$ angehörig, den entsprechenden Strahl des Strahlbüschels $(\mathfrak{L})$ aufsucht. Hierdurch wird nun die letzte gegebene Bedingung erfüllt, dass $p$ und $\pi$ konjugirte Punkte des Netzes seien; das Netz ist also vollständig und eindeutig durch die oben angegebenen Stücke bestimmt. Die Konstruktion wird zwar in vollständiger Ausführung etwas umständlich, aber ohne alle Schwierigkeit und ist allein mittelst des Lineals zu bewerkstelligen.

In analoger Weise ist das Netz durch zwei beliebige Strahlsysteme $(B)$ und $(B_1)$, deren Mittelpunkte nicht konjugirte Punkte sein sollen, und ein beliebiges Paar konjugirter Strahlen $l$, $\lambda$ vollständig und eindeutig bestimmt.

10) **Drei beliebige Punktsysteme auf den Trägern** $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ enthalten mehr Elemente, als zur Bestimmung des Netzes ausreichend sind; wir können indessen aus dem Vorigen

die Bedingung ermitteln, welche erfüllt werden muss, damit das Netz durch dieselben bestimmt wird und die Bestimmungsstücke keinen Widerspruch involviren. Es ist nämlich schon in 9) angegeben, dass, wenn für den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2)$ die beiden konjugirten Punkte auf diesen Trägern $b$ und $\beta$, für den Schnittpunkt $(\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A})$ die konjugirten Punkte $b_1$ und $\beta_1$, endlich für den Schnittpunkt $(\mathfrak{A} \mathfrak{A}_1)$ die konjugirten Punkte $b_2$ und $\beta_2$ sind, die drei Verbindungslinien $b\beta$, $b_1\beta_1$, $b_2\beta_2$ die Polaren jener drei Schnittpunkte sein werden und daher die drei Punkte:

$$(b\beta,\ \mathfrak{A}) \qquad (b_1\beta_1,\ \mathfrak{A}_1) \qquad (b_2\beta_2,\ \mathfrak{A}_2)$$

in einer Geraden liegen müssen. Ist diese Bedingung für die Lage der drei Punktsysteme erfüllt, so bestimmen sie ein Netz, dessen Konstruktion aus 8) sich ergiebt.

11) Ein Punktsystem auf dem Träger $\mathfrak{A}$, ein Paar Pol und Polare: $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$ und ein Paar konjugirter Punkte $p$ und $\pi$ bestimmen das Netz; sei nämlich der Schnittpunkt $(\mathfrak{A} \mathfrak{A}_1) = s$ und sein konjugirter Punkt $\sigma$ in dem auf $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystem, so wird $B_1 \sigma$ die Polare von $s$ sein und $\mathfrak{A}_1$ in einem solchen Punkte $t$ treffen, dass $B_1 s t$ ein Tripel konjugirter Punkte ist; nehmen wir auf $\mathfrak{A}_1$ irgend ein Paar konjugirter Punkte $\pi_1 p_1$ des gegebenen Punktsystems, so haben wir zur Kenntniss des Netzes ein Tripel und zwei Paar konjugirter Punkte, wodurch also das Netz bestimmt wird und nach 4) zu konstruiren ist; dass dabei die Punkte $p_1 \pi_1$ mit einem Tripelpunkte $(s)$ in gerader Linie liegen, ändert im Wesentlichen nichts in der Konstruktion.

In analoger Weise wird das Netz bestimmt durch ein Paar Pol und Polare, ein Strahlsystem und ein beliebiges Paar konjugirter Strahlen.

12) Ein Punktsystem auf dem Träger $\mathfrak{A}$ und drei beliebige Paare konjugirter Punkte $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$, $p_2$ und $\pi_2$ bestimmen das Netz; um es zu konstruiren, können wir in folgender Weise verfahren: Nach einem früher (§ 55) bewiesenen Satze sind, wenn $p$, $\pi$ und $x$, $\xi$ irgend zwei Paare konjugirter Punkte sind, allemal die Schnittpunkte:

$$(px,\ \pi\xi) = y \qquad (p\xi,\ \pi x) = \eta$$

ein drittes Paar konjugirter Punkte, und in dem vollständigen Viereck $p\pi x\xi$ geht die Verbindungslinie $y\eta$ durch die beiden vierten harmonischen Punkte, welche zu dem Schnittpunkte der

beiden Geraden $p\pi$ und $x\xi$ zugeordnet harmonisch liegen, indem das zweite Paar zugeordneter Punkte einmal $p\pi$, das andere Mal $x\xi$ ist; wählen wir nun für $p\pi$ das erste gegebene Paar konjugirter Punkte und für $x\xi$ ein beliebiges Paar konjugirter Punkte des auf dem Träger $\mathfrak{A}$ gegebenen Punktsystems, so werden, indem wir das letztere Paar verändern, sich auch die Punkte $y$ und $\eta$ verändern, ihre Verbindungslinie aber durch einen festen Punkt $o$ auf $p\pi$, den vierten harmonischen, dem Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}$ zugeordneten Punkt gehen. Die Punkte $y$ und $\eta$ beschreiben, wie leicht zu sehen ist, ein und denselben bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, weil $px$ und $\pi\xi$ projektivische Strahlbüschel beschreiben und in ihnen auch $p\xi$ und $\pi x$ entsprechende Strahlen sind; jeder durch $o$ gehende Strahl trifft daher diesen vollständig bestimmten und leicht herzustellenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in einem Paar konjugirter Punkte des zu konstruirenden Netzes. Setzen wir an Stelle des Punktenpaares $p\pi$ das zweite gegebene Punktenpaar $p_1\pi_1$ und operiren mit ihm in ganz derselben Weise, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ und einen Punkt $o_1$ auf $p_1\pi_1$ von solcher Beschaffenheit, dass jeder durch $o_1$ gehende Strahl den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in einem Paar konjugirter Punkte des Netzes trifft. Ziehen wir nun die Verbindungslinie $oo_1$ und möge sie den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in $s$ und $\sigma$, den $\mathfrak{K}_1$ in $s_1$ und $\sigma_1$ treffen, so haben wir auf $oo_1$ zwei Paare konjugirter Punkte des Netzes, welche auf dieser Geraden das ganze dem Netze zugehörige Punktsystem bestimmen; da ausserdem die Gerade $\mathfrak{A}$ mit dem ihr zugehörigen Punktsysteme gegeben ist, so haben wir nunmehr zwei bekannte Punktsysteme auf den Trägern $\mathfrak{A}$ und $oo_1$, ausserdem noch ein Paar konjugirter Punkte $p_2\pi_2$, und durch diese Stücke ist das Netz nach 9) vollkommmen bestimmt. Es ist hierbei noch der Fall zu berücksichtigen, dass eines oder beide Punktenpaare $s\sigma$, $s_1\sigma_1$, welche zur Bestimmung des Punktsystems auf $oo_1$ dienen, imaginär werden können; in diesem Falle werden sie vertreten durch die elliptischen Punktsysteme, welche dem Träger $oo_1$ in Bezug auf die bekannten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zugehören; auch in dem reellen Falle können die Punktenpaare $s\sigma$, $s_1\sigma_1$ durch die hyperbolischen Punktsysteme vertreten werden, welche dem Träger $oo_1$ in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ zugehören; diese beiden Punktenpaare haben nun im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte, welches sowohl

zu $s\sigma$, als auch zu $s_1\sigma_1$ harmonisch liegen muss, also die Asymptotenpunkte des neuen Punktsystems liefert, dessen Bestimmung durch die Paare $s\sigma$ und $s_1\sigma_1$ gegeben wird. Wir schliessen daher: Wenn die beiden Punktsysteme auf dem Träger $oo_1$ — oder auch nur eines — elliptisch sind, so suchen wir ihr gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte (§§ 16 und 31); dieses ist nothwendig reell, sobald eines oder beide Punktsysteme elliptisch sind; wir nehmen dieses Paar zu den Asymptotenpunkten eines dritten hyperbolischen Punktsystems, welches auf dem Träger $oo_1$ dem zu bestimmenden Netze zugehört, und haben daher in jedem Falle eine völlig reelle Konstruktion des Netzes.

In analoger Weise wird das Netz bestimmt durch ein Strahlsystem und drei beliebig liegende Paare konjugirter Strahlen.

13) Ein Paar Pol und Polare: $B$ und $\mathfrak{A}$, und ausserdem drei beliebige Paare konjugirter Punkte $p$ und $\pi$, $p_1$ und $\pi_1$, $p_2$ und $\pi_2$ bestimmen das Netz; um es zu konstruiren, bemerken wir, dass zu dem Punkte $B$ jeder beliebige Punkt der Polare $\mathfrak{A}$ als konjugirter zu betrachten ist; nehmen wir daher einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Geraden $\mathfrak{A}$ und bestimmen die Schnittpunkte $(Bp, \pi\mathfrak{p}) = x$, $(B\pi, p\mathfrak{p}) = \xi$, so sind nach dem oben angezogenen Satze auch $x$ und $\xi$ konjugirte Punkte des Netzes, und wenn wir $\mathfrak{p}$ auf der Geraden $\mathfrak{A}$ verändern, so erhalten wir unendlich viele Paare konjugirter Punkte $x$ und $\xi$, von denen der eine eine Punktreihe auf $Bp$, der andere auf $B\pi$ durchläuft, und beide Punktreihen sind offenbar projektivisch, weil sie beide mit der von $\mathfrak{p}$ beschriebenen Punktreihe perspektivisch liegen. Nehmen wir nunmehr das zweite gegebene Paar konjugirter Punkte $p_1$ und $\pi_1$ und verbinden dieselben mit $x$ und $\xi$, so sind allemal

$$(p_1 x, \pi_1 \xi) = y \qquad (p_1 \xi, \pi_1 x) = \eta$$

ein neues Paar konjugirter Punkte; da nun $x$ und $\xi$ zwei projektivische Punktreihen auf den Geraden $Bp$ und $B\pi$ beschreiben, so wird der Punkt $y$ einen Kegelschnitt erzeugen und daher im Allgemeinen zwei Mal in die Gerade $\mathfrak{A}$ hineinfallen; für eine solche besondere Lage $y'$ und $y''$ sind die oben konstruirten Punkte $\eta'$ und $\eta''$ zu ihnen konjugirt; zugleich aber, da $y'$ und $y''$ auf der Polare $\mathfrak{A}$ des Punktes $B$ liegen, sind $y'$ und $B$, ebenso $y''$ und $B$ konjugirte, also $B\eta'$ ist die Polare von $y'$ und $B\eta''$

die Polare von $y''$; wir kennen daher vom Netze Pol und Polare und die ihnen zugehörigen Punkt- und Strahl-Systeme, ausserdem noch ein Paar konjugirter Punkte $p_2 \pi_2$ und das Netz ist daher nach 6) vollständig bestimmt. Es bleibt hierbei noch der Fall zu erörtern übrig, wenn die beiden Punkte $y'$ und $y''$, von deren Realität die angegebene Konstruktion des Netzes abhing, imaginär werden, d. h. der Kegelschnitt, dessen Ort der Punkt $y'$ ist, die Gerade $\mathfrak{A}$ nicht trifft; in diesem Falle würde die vorige Konstruktion illusorisch werden; wir könnten uns aber dadurch helfen, das wir an Stelle des Paares $p_1 \pi_1$ gewisse andere Paare konjugirter Punkte herstellen, die sich in unzähliger Menge aus dem Paare $p_1 \pi_1$ ableiten lassen; nehmen wir nämlich einen beliebigen Punkt $\mathfrak{p}_1$ der Geraden $\mathfrak{A}$, so bestimmen die Schnittpunkte:

$$(Bp_1, \pi_1 \mathfrak{p}_1) = x_1 \qquad (B\pi_1, p_1 \mathfrak{p}_1) = \xi_1$$

neue Paare konjugirter Punkte $x_1$ und $\xi_1$, die auf den Geraden $Bp_1$ und $B\pi_1$ projektivische Punktreihen durchlaufen, ebenso wie $x$ und $\xi$ auf den Geraden $Bp$ und $B\pi$; es kommt nun darauf an, irgend zwei solche Paare $x\xi$ und $x_1 \xi_1$ ausfindig zu machen, dass der Schnittpunkt $(xx_1, \xi\xi_1)$ auf die Gerade $\mathfrak{A}$ fällt; nehmen wir einen solchen Punkt für $y'$, so bleibt die vorige Konstruktion bestehen. Es scheint aber die Auffindung solcher Paare mit derselben Schwierigkeit, welche eben vermieden werden sollte, behaftet zu bleiben; wir verlassen daher diesen Weg und schlagen einen neuen ein, welcher zugleich den allgemeinsten Fall erledigt, wenn

14) **fünf beliebige Paare konjugirter Punkte zur Bestimmung des Netzes gegeben sind**; in diesem Falle ist offenbar der vorige enthalten; um das Netz aus diesen gegebenen Bestimmungsstücken auf eindeutige Weise zu konstruiren, wiederholen wir noch ein Mal die Fälle 7) und 13), welche die Konstruktion vorbereiten, und bedienen uns dabei einer etwas abgeänderten, mehr symmetrischen Bezeichnung: a) Zur Bestimmung des Netzes sind gegeben: Zwei Punkte $B$ und $B_1$, ihre resp. Polaren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ und ein Paar konjugirter Punkte $B_2$ und $b_2$; die Polare $\mathfrak{A}_2$ von $B_2$ soll also durch $b_2$ gehen; betrachten wir nun das Dreieck $BB_1B_2$ und das von den drei Polaren dieser Punkte: $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ gebildete Dreiseit, so müssen bekanntlich diese beiden Figuren perspektivisch liegen, oder die drei Schnittpunkte:

$$(B_1 B_2, \mathfrak{A}) \qquad (B_2 B, \mathfrak{A}_1) \qquad (B B_1, \mathfrak{A}_2)$$

liegen auf einer Geraden (§ 31); durch die beiden ersten Punkte ist diese Gerade schon bestimmt; der Punkt, in welchem sie $BB_1$ trifft, muss auf $\mathfrak{A}_2$ liegen, also seine Verbindungslinie mit $b_2$ die Polare $\mathfrak{A}_2$ sein. Haben wir sonach drei Paar Pole und Polaren: $B\,\mathfrak{A}$; $B_1\,\mathfrak{A}_1$; $B_2\,\mathfrak{A}_2$, so können wir zu einem beliebigen Punkte $B_3$ die Polare $\mathfrak{A}_3$ nach demselben Prinzip konstruiren, indem wir uns das Dreieck $BB_1B_3$ und sein Polardreiseit, ferner $BB_2B_3$ und sein Polardreiseit, endlich noch $B_1B_2B_3$ und sein Polardreiseit denken in der nothwendigen perspektivischen Lage und dadurch für $\mathfrak{A}_3$ drei Punkte finden, von denen zwei schon zur Bestimmung dieser Geraden ausreichen. Die Konstruktion lässt sich also folgendermassen hinschreiben:

Gegeben: $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_1$ und $\mathfrak{A}_1$, $B_2$ und $b_2$

Bestimme:

$$(B_1B_2, \mathfrak{A}) = s_{12}\quad (B_2B, \mathfrak{A}_1) = s_{20}\quad (BB_1, s_{12}s_{20}) = s_{01}$$
$$(b_2 s_{01}) = \mathfrak{A}_2$$
$$(B_1B_3, \mathfrak{A}) = s_{13}\quad (B_3B, \mathfrak{A}_1) = s_{30}\quad (BB_1, s_{13}s_{30}) = \sigma_{01}$$
$$(B_2B_3, \mathfrak{A}) = s_{23}\quad (B_3B, \mathfrak{A}_2) = \sigma_{30}\quad (BB_2, s_{23}\sigma_{30}) = \sigma_{02}$$
$$(B_2B_3, \mathfrak{A}_1) = \sigma_{23}\quad (B_3B_1, \mathfrak{A}_2) = \sigma_{31}\quad (B_1B_2, \sigma_{23}\sigma_{31}) = \sigma_{12},$$

dann liegen die drei Punkte $\sigma_{01}\ \sigma_{02}\ \sigma_{12}$ auf der Geraden $\mathfrak{A}_3$, der Polare des Punktes $B_3$ für das oben bestimmte Netz. Da durch zwei dieser Punkte die Gerade $\mathfrak{A}_3$ schon bestimmt wird, so liegt hierin ein geometrischer Satz, den wir indessen nicht weiter hervorheben wollen.

Wir denken uns jetzt unter den zur Bestimmung des Netzes gegebenen Stücken die Gerade $\mathfrak{A}_1$ um einen festen Punkt $b_1$ gedreht, so dass für jede Lage von $\mathfrak{A}_1$ ein anderes Netz entsteht, und ermitteln nach der vorigen Konstruktion für jedes derselben die dem Punkte $B_3$ zugehörige Polare $\mathfrak{A}_3$; es wird sich zeigen, dass alsdann auch $\mathfrak{A}_3$ um einen festen Punkt $p_3$ sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathfrak{A}_1$ beschriebenen projektivisch ist. In der That, bei der Bewegung von $\mathfrak{A}_1$ um den festen Punkt $b_1$ bleiben die Punkte $s_{12}\ s_{13}\ s_{23}$ fest, der Punkt $s_{20}$ durchläuft eine gerade Punktreihe auf dem Träger $B_2B$, ebenso $s_{01}$ auf dem Träger $BB_1$, die Gerade $\mathfrak{A}_2$ beschreibt also ein Strahlbüschel um $b_2$, welches mit dem von $\mathfrak{A}_1$ beschriebenen projektivisch ist; $s_{30}$ und $\sigma_{30}$ durchlaufen daher auf dem Träger $B_3B$ Punktreihen, die gleichfalls mit dem Strahlbüschel $(\mathfrak{A}_1)$ pro-

jektivisch sind, und die Punkte $\sigma_{01}\,\sigma_{02}$ durchlaufen endlich auf den Trägern $B_1 B$ und $B_2 B$ projektivische Punktreihen; diese beiden Punktreihen liegen nun perspektivisch, weil in den Schnittpunkt ihrer Träger, $B$, ein Paar entsprechende Punkte hineinfallen; nehmen wir nämlich insbesondere an, dass die bewegliche Gerade $\mathfrak{A}_1$ durch $B$ gehe, so gelangt unter dieser Annahme $s_{30}$ nach $B$, ebenso auch $s_{20}$ und $s_{01}$, also geht auch $\mathfrak{A}_2$ durch $B$, mithin kommen in diesem Falle auch $\sigma_{01}$, $\sigma_{30}$ und $\sigma_{02}$ nach $B$; es fallen daher zwei entsprechende Lagen der Punkte $\sigma_{01}$ und $\sigma_{02}$ nach $B$ und die von $\sigma_{01}\,\sigma_{02}$ durchlaufenen Punktreihen liegen daher perspektivisch; die Verbindungslinie entsprechender Punkte, d. h. die Gerade $\mathfrak{A}_3$ läuft folglich durch einen festen Punkt $p_3$ und beschreibt ein mit $(\mathfrak{A}_1)$ projektivisches Strahlbüschel. Fügen wir jetzt zur Bestimmung des Netzes noch die neue Bedingung hinzu, dass die Polare von $B_3$ durch einen gegebenen Punkt $b_3$ gehen soll, oder $B_3$ und $b_3$ konjugirte Punkte seien, so giebt es unter den unzählig vielen Netzen nur ein einziges, welches den Bedingungen genügt, dass

b) $\begin{cases} B \text{ und } \mathfrak{A} \text{ Pol und Polare,} \\ B_1 \text{ und } b_1,\ B_2 \text{ und } b_2,\ B_3 \text{ und } b_3 \text{ konjugirte Punkte des Netzes} \end{cases}$

seien, und wir gelangen zur Bestimmung dieses Netzes, indem wir den vorhin ermittelten Punkt $p_3$ mit $b_3$ verbinden und $(p_3 b_3) = \mathfrak{A}_3$ als Polare von $B_3$ annehmen, so dass alsdann das Netz auf die vorige Art durch die Bestimmungsstücke $B$ und $\mathfrak{A}$, $B_3$ und $\mathfrak{A}_3$, $B_2$ und $b_2$ (oder auch $B_1$ und $b_1$) konstruirt wird. Es bleibt nun übrig, für das durch die gegebenen Stücke bestimmte Netz zu einem gegebenen Punkte $B_4$ die Polare $\mathfrak{A}_4$ zu konstruiren, und hierzu ist es erforderlich, den Punkt $p_3$ zu kennen, welchen wir so ermitteln, dass wir zwei beliebige Lagen von $\mathfrak{A}_1$ durch den Punkt $b_1$ annehmen und vermöge der obigen Konstruktion die zugehörigen Lagen von $\mathfrak{A}_3$ bestimmen, deren gemeinschaftlicher Punkt $p_3$ sein wird. Diese Konstruktion wird nun zwar etwas weitläufig, aber ohne alle Schwierigkeit und wir werden uns die Mühe nicht ersparen können, sie hinzuschreiben:

Gegeben $\underline{B \text{ und } \mathfrak{A},\ B_1 \text{ und } b_1,\ B_2 \text{ und } b_2,\ B_3 \text{ und } b_3}$; es soll zu $B_4$ die Polare $\mathfrak{A}_4$ konstruirt werden; wir ziehen durch $b_1$ zwei beliebige Gerade $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}_1''$, und bestimmen folgende Schnittpunkte und Verbindungslinien:

$$
\begin{array}{lll}
(B_1B_2,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{12} & (B_2B\,,\ \mathfrak{A}_1') = s_{20}' & (B\,B_1,\ s_{12}s_{20}') = s_{01}'; \\
 & (b_2 s_{01}') = \mathfrak{A}_2' & \\
(B_1B_2,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{12} & (B_2B\,,\ \mathfrak{A}_1'') = s_{20}'' & (B\,B_1,\ s_{12}s_{20}'') = s_{01}''; \\
 & (b_2 s_{01}'') = \mathfrak{A}_2'' &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
(B_1B_3,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{13} & (B_3B\,,\ \mathfrak{A}_1') = s_{30}' & (B\,B_1,\ s_{13}\,s_{30}') = \sigma_{01}' \\
(B_2B_3,\ \mathfrak{A}_1') = s_{23}' & (B_3B_1,\ \mathfrak{A}_2') = \sigma_{31}' & (B_1B_2,\ s_{23}'\sigma_{31}') = \sigma_{12}'
\end{array}\right\}
$$

$$(\sigma_{01}'\sigma_{12}') = \mathfrak{A}_3'$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
(B_1B_3,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{13} & (B_3B\,,\ \mathfrak{A}_1'') = s_{30}'' & (B\,B_1,\ s_{13}\,s_{30}'') = \sigma_{01}'' \\
(B_2B_3,\ \mathfrak{A}_1'') = s_{23}'' & (B_3B_1,\ \mathfrak{A}_2'') = \sigma_{31}'' & (B_1B_2,\ s_{23}''\sigma_{31}'') = \sigma_{12}''
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{array}{lll}
 & (\sigma_{01}''\,\sigma_{12}'') = \mathfrak{A}_3'' & \\
 & (\mathfrak{A}_3',\ \mathfrak{A}_3'') = p_3 & (b_3 p_3) = \mathfrak{A}_3 \\
(B_2B_3\,,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{23} & (B\,B_2,\ \mathfrak{A}_3\ ) = s_{02} & (B_3B,\ s_{23}\ s_{02}\ ) = s_{30} \\
 & (b_2 s_{30}) = \mathfrak{A}_2 &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
(B_3B_4\,,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{34} & (B_4B,\ \mathfrak{A}_3\ ) = s_{40} & (B\,B_3,\ s_{34}\ s_{40}\ ) = \sigma_{03} \\
(B_4B_2\,,\ \mathfrak{A}\ ) = s_{42} & (B\,B_4,\ \mathfrak{A}_2\ ) = \sigma_{04} & (B_2B,\ s_{42}\,\sigma_{04}\ ) = \sigma_{02}
\end{array}\right\}.
$$

$$(\sigma_{03}\,\sigma_{02}) = \mathfrak{A}_4.$$

Dies ist die Konstruktion der gesuchten Geraden $\mathfrak{A}_4$, möglichst kurz ausgedrückt und mit Aufgabe vollkommener Symmetrie, indem von den Geraden $\mathfrak{A}_3'$ $\mathfrak{A}_3''$ $\mathfrak{A}_4$ nur je zwei zu ihrer Bestimmung erforderliche Punkte ermittelt sind, der dritte, leicht angebbare, aber fortgelassen ist. Wir denken uns jetzt diese Figur einer neuen, letzten Veränderung unterworfen, indem wir die Gerade $\mathfrak{A}$ um einen festen Punkt $b$ drehen, und untersuchen die von dieser Bewegung abhängige Veränderung der Geraden $\mathfrak{A}_4$; es wird sich dabei zeigen, dass $\mathfrak{A}_4$ um einen festen Punkt $p_4$ sich dreht und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen projektivisch ist. Hieraus wird dann folgen, dass, wenn zur vollständigen Bestimmung des Netzes noch die neue Bedingung hinzutritt: $\mathfrak{A}_4$ soll durch einen gegebenen Punkt $b_4$ gehen, das Netz, wie oben angegeben, durch fünf Paare konjugirter Punkte: $B$ und $b$, $B_1$ und $b_1$, $B_2$ und $b_2$, $B_3$ und $b_3$, $B_4$ und $b_4$ völlig bestimmt ist und in eindeutiger Weise hergestellt werden kann. Das Verfolgen der Bewegung von $\mathfrak{A}$ in der zuletzt ausgeführten Konstruktion ist ohne erhebliche Schwierigkeit, wenn auch etwas umständlich, was in der Natur der Sache liegt. Aus dem obigen Schema erkennen wir zunächst, dass $s_{12}$, $s_{13}$ und $s_{23}$ gerade Punktreihen durchlaufen, welche mit dem von der Geraden $\mathfrak{A}$ beschriebenen Strahlbüschel projektivisch sind; die Punkte $s_{20}'$, $s_{20}''$, $s_{30}'$, $s_{30}''$, $s_{23}'$ und $s_{23}''$ bleiben fest;

daher werden $s_{01}'$, $s_{01}''$ projektivische Punktreihen auf $BB_1$, also $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_2''$ projektivische Strahlbüschel beschreiben, die mit dem Strahlbüschel $(\mathfrak{A})$ projektivisch sind; hiernach durchlaufen auch $\sigma_{01}'$ und $\sigma_{12}'$ projektivische Punktreihen auf den Trägern $BB_1$ und $B_1B_2$; in den Schnittpunkt $B_1$ dieser Träger fallen aber zwei entsprechende Punkte hinein; denn sobald der veränderliche Strahl $\mathfrak{A}$ durch $B_1$ geht, fallen $\sigma_{01}'$ und $\sigma_{12}'$ ebenfalls in $B_1$ hinein; die Verbindungslinie $\sigma_{01}'\sigma_{12}'$ oder $\mathfrak{A}_3'$ läuft also durch einen festen Punkt $\pi_3'$ und in ganz gleicher Weise die Gerade $\mathfrak{A}_3''$ durch einen festen Punkt $\pi_3''$ und beide beschreiben Strahlbüschel, welche mit dem ursprünglichen Strahlbüschel $(\mathfrak{A})$, also auch unter einander projektivisch sind; es zeigt sich aber noch weiter, dass dieselben perspektivisch liegen; denn sobald insbesondere $\mathfrak{A}$ durch $B_1$ geht, fallen, wie wir gesehen haben, $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_2''$ zusammen in die Gerade $b_2B_1$; $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_3''$ müssen auch durch $B_1$ gehen; ausserdem können wir von der Geraden $\mathfrak{A}_3'$ noch einen dritten Punkt $\sigma_{02}'$ bestimmen, nämlich:

$$(B_2B_3,\ \mathfrak{A}) = \sigma_{23}' \quad (B_3B,\ \mathfrak{A}_2') = \sigma_{30}' \quad (BB_2,\ \sigma_{23}'\sigma_{30}') = \sigma_{02}'$$

und von der Geraden $\mathfrak{A}_3''$ den Punkt $\sigma_{02}''$:

$$(B_2B_3,\ \mathfrak{A}) = \sigma_{23}' \quad (B_3B,\ \mathfrak{A}_2'') = \sigma_{30}'' \quad (BB_2,\ \sigma_{23}'\sigma_{30}'') = \sigma_{02}''.$$

Da nun in dem Falle, dass $\mathfrak{A}$ durch $B_1$ geht, die Geraden $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_2''$ zusammenfallen, so werden die Punkte $\sigma_{30}'$ und $\sigma_{30}''$ offenbar auch zusammenfallen und hiernach auch $\sigma_{02}'$ und $\sigma_{02}''$; da die Geraden $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_3''$ in dem genannten Falle schon den Punkt $B_1$ gemein haben und ausserdem noch diesen leicht zu konstruirenden Punkt $\sigma_{02}'$, welchen wir so erhalten:

$$(B_2B_3,\ bB_1) = \sigma_{23}' \quad (B_3B,\ b_2B_1) = \sigma_{30}' \quad (BB_2,\ \sigma_{23}'\sigma_{30}') = \sigma_{02}',$$

so fallen sie ganz zusammen und es liegen daher die beiden Strahlbüschel $(\mathfrak{A}_3')$ und $(\mathfrak{A}_3'')$ perspektivisch, weil zwei entsprechende Strahlen auf einander fallen; die Punkte $\pi_3'$ und $\pi_3''$ müssen daher in gerader Linie liegen mit $B_1$ und das Erzeugniss der beiden von $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_3''$ beschriebenen Strahlbüschel oder der Ort des Punktes $p_3$ wird eine gerade Linie oder der Träger einer geraden Punktreihe, welche mit dem ursprünglichen Strahlbüschel $(\mathfrak{A})$ projektivisch ist. (Wir können das vorige Resultat auch aus der Bemerkung schliessen, dass das Netz in dem Falle parabolisch wird, wenn wir $\mathfrak{A}$ durch $B_1$ legen, also der Pol jeder nicht durch $B_1$ gehenden Geraden sich in $B_1$ befindet, während die Polare jedes Punktes der Ebene durch $B_1$ geht

u. s. f.) Da hiernach $\mathfrak{A}_3 = (b_3 p_3)$ ein mit ($\mathfrak{A}$) projektivisches Strahlbüschel beschreibt, so durchlaufen $s_{23}$ und $s_{02}$ projektivische Punktreihen auf den Trägern $B_2 B_3$ und $BB_2$; die Verbindungslinie $s_{23} s_{02}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt, welcher $B_2 B_3$ und $BB_2$ berührt; dieser Kegelschnitt berührt gleichzeitig $BB_3$, denn sobald $\mathfrak{A}$ durch $B_3$ geht, muss $\mathfrak{A}_3$ durch $B$ gehen; dies folgt sowohl aus der Grundeigenschaft des Involutionsnetzes, als auch aus dem obigen Konstruktionsschema, weil in dem Falle, dass $\mathfrak{A}$ durch $B_3$ geht, die Punkte $\sigma_{01}'$ und $\sigma_{01}''$ nach $B$ gelangen, also zwei entsprechende $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{A}_3''$ sich in $B$ treffen, $p_3$ nach $B$ gelangt und $\mathfrak{A}_3$ durch $B$ geht. Der Kegelschnitt, welchen die Verbindungslinie $s_{23} s_{02}$ umhüllt, ist also dem Dreieck $B_2 B_3 B$ einbeschrieben und die Tangente $B_3 B$ wird von der veränderlichen Tangente $s_{23} s_{02}$ in einem Punkte $s_{30}$ getroffen, welcher eine gerade Punktreihe durchläuft, die mit der von $s_{23}$ oder $s_{02}$ durchlaufenen Punktreihe projektivisch ist (§ 20); hieraus folgt, dass auch $\mathfrak{A}_2$ ein mit ($\mathfrak{A}$) projektivisches Strahlbüschel beschreibt; endlich ergiebt sich in gleicher Weise, dass $s_{34}$ und $s_{40}$ und auch $\sigma_{03}$, $s_{42}$, $s_{04}$ und $\sigma_{02}$ projektivische Punktreihen durchlaufen; die beiden von $\sigma_{03}$ und $\sigma_{02}$ auf den Trägern $BB_3$ und $BB_2$ durchlaufenen Punktreihen liegen aber perspektivisch, weil in den Schnittpunkt der Träger, $B$, zwei entsprechende Punkte der beiden Punktreihen hineinfallen, denn sobald $\mathfrak{A}$ durch $B_4$ geht, gelangen sowohl $\sigma_{03}$ als auch $\sigma_{02}$ nach $B$, fallen also in diesem Punkte zusammen; hieraus schliessen wir, dass die Verbindungslinie $(\sigma_{03} \sigma_{02}) = \mathfrak{A}_4$ durch einen festen Punkt $p_4$ läuft und ein Strahlbüschel beschreibt, welches mit dem von $\mathfrak{A}$ beschriebenen projektivisch ist. Dies Resultat lässt sich als Satz so aussprechen:

Es giebt unendlich-viele Netze von der Beschaffenheit, dass vier gegebene Punktenpaare $B$ und $b$, $B_1$ und $b_1$, $B_2$ und $b_2$, $B_3$ und $b_3$ konjugirte Punkte für jedes dieser Netze sind; wenn man zu irgend einem festen Punkte $B_4$ für jedes Netz die Polare $\mathfrak{A}_4$ konstruirt, so laufen diese sämmtlichen Geraden $\mathfrak{A}_4$ durch einen festen Punkt $p_4$ und bilden ein Strahlbüschel; irgend zwei solcher Strahlbüschel sind allemal projektivisch und entsprechende Strahlen derselben je zwei Polaren in Bezug auf dasselbe Netz. Eine solche Gruppe von Netzen besitzt also dieselbe Eigenschaft, wie ein Kegel-

schnittbüschel von vier Punkten (§ 46) und in der That bilden die Kernkegelschnitte dieser Netze ein solches Büschel (vgl. § 61). Fügen wir nun noch die fünfte Bedingung hinzu, dass die Polare des gegebenen Punktes $B_4$ durch einen gegebenen Punkt $b_4$ gehen soll, so giebt es nur ein einziges Netz, welches diesen fünf Bedingungen gleichzeitig genügt, dass c) $B$ und $b$, $B_1$ und $b_1$, $B_2$ und $b_2$, $B_3$ und $b_3$, $B_4$ und $b_4$ fünf Paare konjugirter Punkte eines Netzes seien. Die Konstruktion dieses Netzes geschieht auf reellem und eindeutigem Wege durch Ermittelung des Punktes $p_4$ und derselbe wird gefunden, indem wir die vorhin angegebene Konstruktion zwei Mal ausführen für zwei beliebige durch den Punkt $b$ gezogene Gerade $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$, zwei besondere Lagen von $\mathfrak{A}$; wir erhalten dadurch zwei bestimmte Gerade $\mathfrak{A}_4'$ und $\mathfrak{A}_4''$, welche sich in dem gesuchten Punkte $p_4$ schneiden; die Verbindungslinie $(b_4\, p_4) \equiv \mathfrak{A}_4$ ist dann die Polare des Punktes $B_4$ in dem zu bestimmenden Netze, und indem wir die vorige Konstruktion noch einmal anwenden unter Annahme der Bestimmungsstücke: $B_4$ und $\mathfrak{A}_4$, $B_3$ und $b_3$, $B_2$ und $b_2$, $B_1$ und $b_1$ (oder $B$ und $b$), sind wir im Stande, zu jedem beliebigen Punkte der Ebene $B_5$ die rücksichtlich des Netzes zugehörige Polare $\mathfrak{A}_5$ zu konstruiren, also das ganze Netz herzustellen. Die Ausführung dieser Konstruktion wird zwar etwas weitläufig, ist aber ohne theoretische Schwierigkeit und wir glauben sie übergehen zu dürfen, weil der Verlauf derselben aus dem oben angegebenen, nur drei Mal zu wiederholenden Konstruktionsschema ersichtlich hervortritt.

## § 58. Durchmesser und Mittelpunkt, System der konjugirten Durchmesser und Axen des Netzes.

Es giebt einige besondere Elemente des Netzes, welche dieselbe Bedeutung haben, wie die gleichnamigen besonderen Elemente des Kegelschnitts. Da der Mittelpunkt eines Punktsystems derjenige ist, dessen konjugirter der unendlich-entfernte ist, so wird jeder Punkt $m$ in der Ebene eines Netzes als der Mittelpunkt einer, aber im Allgemeinen nur einer einzigen Geraden $\mathfrak{A}$ rücksichtlich des auf ihr befindlichen Punktsystems auftreten, nämlich derjenigen, welche mit der Polare des Punktes $m$ im Netze parallel durch $m$ gezogen wird. Gäbe es insbesondere einen solchen Punkt $M$ in der Ebene des Netzes, welcher Mittel-

punkt für die Punktsysteme zweier durch ihn gehenden Geraden wäre, so müsste seine Polare durch die beiden unendlich-entfernten Punkte jener beiden Geraden gehen, mithin ganz im Unendlichen liegen oder $\mathfrak{G}_\infty$ sein; dann würde $M$ zugleich der Mittelpunkt sämmtlicher durch ihn gehenden Geraden rücksichtlich der auf ihnen befindlichen Punktsysteme sein; und umgekehrt der Pol der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ ist Mittelpunkt für alle Punktsysteme der durch ihn gehenden Geraden, (wofern er nicht selbst unendlich-entfernt liegt). Um den so beschaffenen Punkt $M$ zu finden, sei $m$ der Mittelpunkt einer bestimmten durch $m$ gehenden Geraden $\mathfrak{A}$ und $A$ der konjugirte Strahl für das dem Punkte $m$ zugehörige Strahlsystem des Netzes, dann wird $A$ durch den Mittelpunkt derjenigen Geraden $\mathfrak{M}$ gehen, welche die Polare von $m$ ist und zugleich die Polare desjenigen unendlich-entfernten Punktes sein, nach welchem die parallelen Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}$ gerichtet sind; sucht man nun den Mittelpunkt $M$ der Geraden $A$, so wird dieser die verlangte Eigenschaft besitzen, zugleich Mittelpunkt der Geraden zu sein, welche durch ihn parallel zu $\mathfrak{A}$ (oder $\mathfrak{M}$) gezogen wird und er wird also der Mittelpunkt für jede durch ihn gehende Gerade sein.

Dieser Punkt $M$ soll Mittelpunkt des Netzes genannt werden; dass es nur einen solchen Punkt geben kann, ist klar, denn gäbe es zwei, so müsste die Gerade, welche beide verbände, jeden ihrer Punkte zum Mittelpunkt, also zwei Mittelpunkte haben, was dem Wesen des Punktsystems widerstreitet. Ferner sollen sämmtliche Gerade, welche durch den Mittelpunkt $M$ gehen, Durchmesser des Netzes, die konjugirten Strahlen des dem Punkte $M$ rücksichtlich des Netzes zugehörigen Strahlsystems konjugirte Durchmesser und die Axen dieses Strahlsystems die Axen des Netzes genannt werden. Hiernach ist die Konstruktion des Mittelpunktes $M$ und des ihm zugehörigen Strahlsystems durch folgende Eigenschaft gegeben:

Wenn man nach einer beliebigen Richtung zwei oder mehrere parallele Gerade in der Ebene eines Netzes zieht, so liegen die Mittelpunkte der ihnen zugehörigen Punktsysteme allemal auf einem Durchmesser des Netzes; verändert man die angenommene Richtung, so laufen alle Durchmesser durch einen festen Punkt, den Mittelpunkt des Netzes, und je zwei

Durchmesser, von denen einer der angenommenen Richtung parallel ist, der andere die Mittelpunkte aller zu dieser Richtung parallelen Geraden enthält, sind ein Paar konjugirter Strahlen eines Strahlsystems oder konjugirte Durchmesser, indem auch umgekehrt die dem letzteren parallelen Geraden ihre Mittelpunkte sämmtlich auf dem ersteren haben.

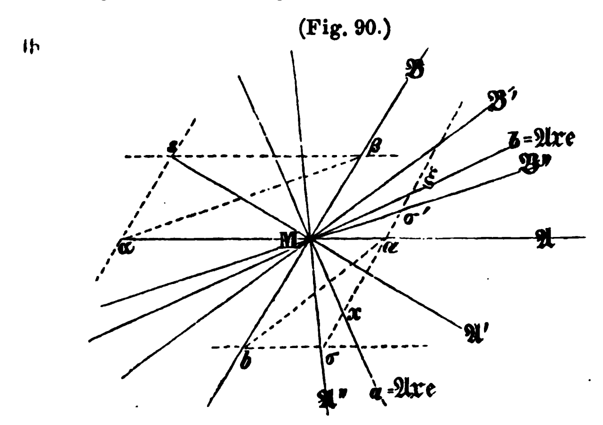
Dies lässt sich mit anderen Worten auch so aussprechen: Der Mittelpunkt $M$ des Netzes ist der Pol der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$, das konjugirte Durchmesser-System das diesem Punkte zugehörige Strahlsystem des Netzes. Fällt insbesondere der Mittelpunkt $M$ des Netzes selbst ins Unendliche, so liegt er auf seiner Polare und ist also ein Punkt des Kerns vom Netze; das Netz ist also ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt offenbar eine Parabel. Liegt dagegen der Mittelpunkt $M$ des Netzes nicht im Unendlichen, so wird das ihm zugehörige Strahlsystem entweder ein hyperbolisches oder ein elliptisches sein; ist es ein hyperbolisches, so enthält jede der beiden Asymptoten zwei zusammenfallende konjugirte Strahlen, und da der unendlich-entfernte Punkt des einen Strahls der Pol des konjugirten Strahls ist, so liegt der unendlich-entfernte Punkt der Asymptote zugleich auf seiner Polare, ist daher ein Punkt des Kerns vom Netze; das Netz ist also ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt eine Hyperbel. Ist das Strahlsystem des Mittelpunktes $M$ dagegen ein elliptisches, so können zwei Fälle eintreten: Entweder ist das Netz ein hyperbolisches und der Kernkegelschnitt eine Ellipse, oder das Netz ist ein elliptisches und der Kernkegelschnitt imaginär; der erste Fall tritt ein, sobald das auf irgend einem Durchmesser befindliche Punktsystem des Netzes ein hyperbolisches, der letzte Fall, sobald es ein elliptisches ist; alsdann sind auch die Punktsysteme sämmtlicher Durchmesser im ersten Fall hyperbolisch, im letzten elliptisch.

Wir bemerken noch, dass das einem beliebigen Punkte $B$ in der Ebene des Netzes zugehörige Strahlsystem immer ein Paar konjugirter Strahlen besitzt, welche einem Paar konjugirter Durchmesser parallel laufen, und dass sogar der eine jener Strahlen mit dem einen dieser Durchmesser zusammenfällt; denn ziehen wir $BM$, so läuft der konjugirte Durchmesser parallel mit dem zu $BM$ konjugirten Strahle des Strahlsystems $(B)$; hieraus folgt,

dass alle Strahlsysteme, deren Mittelpunkte in einem und demselben Durchmesser liegen, ein System paralleler konjugirter Strahlen haben, von denen die eine Hälfte zusammenfallen auf diesen Durchmesser.

Zwischen den verschiedenen Punktsystemen auf sämmtlichen Durchmessern des Netzes bestehen ganz analoge Beziehungen, wie zwischen den konjugirten Durchmessern des Kegelschnitts (§ 33). Dieselben lassen sich auf analogem Wege aus der Konstruktion der Axen ableiten; nehmen wir zu diesem Zweck ein Paar konjugirter Durchmesser mit den auf ihnen befindlichen Punktsystemen als gegeben an; diese sind bekanntlich zur Bestimmung des Netzes erforderlich und ausreichend; stellen wir uns dann die Aufgabe, die Axen mit den auf ihnen befindlichen Punktsystemen zu konstruiren. Durch den Mittelpunkt und den unendlich-entfernten Punkt ist auf jedem Durchmesser bereits ein Paar konjugirter Punkte gegeben und durch ein zweites Paar wird also das Punktsystem vollständig bestimmt. Seien (Fig. 90) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

(Fig. 90.)




die sich in $M$ schneidenden gegebenen konjugirten Durchmesser, auf dem ersteren das Paar konjugirter Punkte $a$ und $\alpha$, auf dem letzteren $b$ und $\beta$ gegeben und setzen wir den Fall eines **elliptischen Netzes** voraus, weil dieser in dem Früheren nicht enthalten ist; dann müssen $a$ und $\alpha$ auf entgegengesetzten Seiten von $M$ und ebenso $b$ und $\beta$ liegen; das Produkt $Ma \,.\, M\alpha$ heisst die Potenz des auf dem Durchmesser $\mathfrak{A}$ befindlichen Punktsystems und ist eine negative Grösse, weil $Ma$ und $M\alpha$ entgegengesetzte Richtung haben (der Gang der Untersuchung bleibt im Wesentlichen

ungeändert für jede andere Annahme hinsichtlich der Lage der Punkte $a\alpha$, $b\beta$). Wir bezeichnen die Potenz des auf dem Durchmesser $\mathfrak{A}$ befindlichen Punktsystems durch $P_{\mathfrak{A}} = Ma \cdot M\alpha$ und ebenso $P_{\mathfrak{B}} = Mb \cdot M\beta$. Wäre das Punktsystem auf $\mathfrak{A}$ hyperbolisch, so wäre die Potenz $P_{\mathfrak{A}}$ positiv und gleich dem Quadrat des Abstandes von einem Asymptotenpunkte bis zum Mittelpunkte, also gleich dem Halbmesser des Kernkegelschnitts auf dem Durchmesser $\mathfrak{A}$. Um die Axen des Netzes zu finden, müssen wir das dem Mittelpunkte $M$ zugehörige Strahlsystem des Netzes, von dem wir bis jetzt nur ein Paar konjugirter Strahlen haben, vollständig kennen und seine Axen ermitteln, welche die gesuchten Axen des Netzes sind. Die Polare des Punktes $a$ ist nun die durch $\alpha$ zu $\mathfrak{B}$ gezogene Parallele und die Polare von $b$ die durch $\beta$ zu $\mathfrak{A}$ gezogene Parallele, der Schnittpunkt dieser beiden Parallelen $s$ also der Pol von $ab$; der unendlich-entfernte Punkt von $ab$ hat zu seiner Polare offenbar $Ms$; ziehen wir also durch $M$ eine Parallele zu $ab$, nennen dieselbe $\mathfrak{B}'$, $Ms$ aber $\mathfrak{A}'$, so sind $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ein neues Paar konjugirter Durchmesser oder ein zweites Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(M)$ und dieses ist hierdurch vollständig bestimmt; wir können noch ein drittes Paar konjugirter Durchmesser erhalten, indem wir durch $a$ und $b$ ein Paar Parallele zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ ziehen, die sich in $\sigma$ treffen, dann ist $M\sigma$ $(= \mathfrak{A}'')$ und die durch $M$ zu $\alpha\beta$ gezogene Parallele $\mathfrak{B}''$ ein drittes Paar konjugirter Durchmesser des Netzes. Um die Axen des Strahlsystems $(M)$ zu finden, lassen wir dasselbe durch die Gerade (Transversale) schneiden, welche aus $a$ parallel zu $\mathfrak{B}$ gezogen ist; auf dieser Transversale wird durch das Strahlsystem $(M)$ ein Punktsystem ausgeschnitten, dessen Mittelpunkt offenbar $a$ ist. Die Kreise, welche über den Strecken zwischen je zwei konjugirten Punkten dieses Punktsystems als Durchmesser beschrieben werden können, bilden eine Kreisschaar mit zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten oder einer ideellen gemeinschaftlichen Sekante und es giebt einen einzigen, leicht konstruirbaren Kreis dieser Schaar, welcher durch $M$ geht; dieser Kreis schneidet die Transversale offenbar in zwei solchen konjugirten Punkten ihres Punktsystems, welche mit $M$ verbunden zwei konjugirte Strahlen des Strahlsystems $(M)$ liefern, und da diese Strahlen einen Winkel im Halbkreise einschliessen, also zu einander rechtwinklig sind, so sind es die gesuchten Axen, $a$ und $b$,

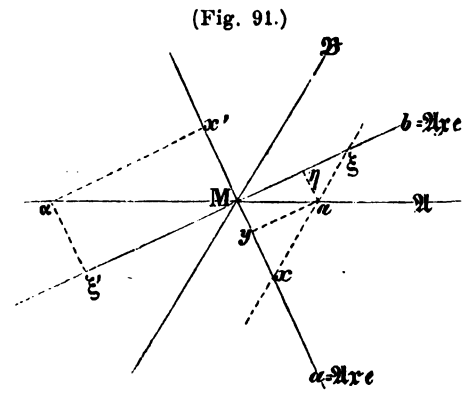
des Netzes. Seien $Mx$ und $M\xi$ die so konstruirten Axen, $x$ und $\xi$ ihre Schnittpunkte mit der Transversale durch $a$, so ist zu bemerken, dass wegen der konstanten Potenz $ax \,.\, a\xi$ gleich ist dem analogen Produkt für irgend zwei andere konjugirte Punkte des Punktsystems auf der Transversale, also auch für ihre beiden Schnittpunkte mit $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$, d. h. $= a\sigma \,.\, a\sigma'$; nun ist aber $a\sigma = Mb$ und wegen der Parallelität verhält sich:

$$\frac{a\sigma'}{Ma} = \frac{M\beta}{\alpha M}, \quad \text{also:}$$

$$xa \,.\, a\xi = Mb \,.\, M\beta \,.\, \frac{Ma}{M\alpha},$$

eine Relation, von welcher wir sogleich Gebrauch machen werden. Es bleibt jetzt übrig, nachdem die Axen des Netzes gefunden sind, die auf ihnen befindlichen Punktsysteme zu ermitteln. Dies kann auf folgende Art geschehen: Die Polare von $x$ muss parallel laufen zu $M\xi$ (Fig. 91), also senkrecht stehen auf

(Fig. 91.)




$Mx$, ferner muss sie durch den Punkt $\alpha$ gehen, weil $x$ auf der Polare von $\alpha$, nämlich der durch $a$ parallel zu $\mathfrak{B}$ gezogenen Geraden liegt; folglich wird das aus $\alpha$ auf $Mx$ gefällte Perpendikel die Polare von $x$ sein, also $Mx$ in dem Punkte $x'$ treffen, welcher der konjugirte von $x$ ist für das auf der $a$-Axe befindliche Punktsystem des Netzes; ebenso trifft das aus $\alpha$ auf die $b$-Axe herabgelassene Perpendikel dieselbe in $\xi'$, dem konjugirten Punkte zu $\xi$ in dem der $b$-Axe zugehörigen Punktsystem. Da wir ausserdem den Mittelpunkt $M$ für diese beiden Punktsysteme kennen, so ist uns ihre Potenz:

$$Mx \,.\, Mx' = P_a \quad \text{und} \quad M\xi \,.\, M\xi' = P_b$$

bekannt und hierdurch auch jedes der beiden Punktsysteme selbst. Zugleich ergeben sich die erwähnten Beziehungen zwischen den Grössen $P_{\mathfrak{A}}\ P_{\mathfrak{B}}\ P_a\ P_b$, wie folgt:

Wir haben bereits in § 33 auf ein Paar elementare Hülfssätze übers rechtwinklige Dreieck aufmerksam gemacht, welche so lauten: „Wenn das rechtwinklige Dreieck $x M \xi$ in $M$ den rechten Winkel hat und $a$ irgend ein Punkt seiner Hypothenuse ist, die Perpendikel aus $a$ auf $Mx$ und $M\xi$ gefällt die Katheten in $y$ und $\eta$ treffen, so ist allemal:

$$\text{(I.)}\quad Mx\,.\,My\,.\,M\xi\,.\,M\eta = xa\,.\,a\xi\ Ma^2 \sin^2 (Ma,\ a\xi)$$

$$\text{(II.)}\quad Mx\,.\,My + M\xi\,.\,M\eta = Ma^2 + xa\,.\,a\xi.$$

Der ganz elementare Beweis dieser Sätze ist oben (§ 33) gegeben worden; der zweite Satz ist die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes für den besonderen Fall, dass $a$ in der Mitte der Hypothenuse liegt.

Die Strecken $My$ und $M\eta$ können wir nun, indem wir diese Sätze auf unsere Figur anwenden, ersetzen durch $Mx'$ und $M\xi'$ denn die Parallelität liefert folgende Verhältnisse:

$$\frac{My}{Mx'} = \frac{Ma}{M\alpha} = \frac{M\eta}{M\xi'};$$

dies in die vorigen Relationen substituirt, giebt:

$$Mx\,.\,Mx'\,.\,M\xi\,.\,M\xi' = xa\,.\,a\xi\,.\,M\alpha^2\,.\,\sin^2 (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

$$Mx\,.\,Mx' + M\xi\,.\,M\xi' = Ma\,.\,M\alpha + xa\,.\,a\xi\,.\,\frac{M\alpha}{Ma},$$

oder wenn für $xa\,.\,a\xi = Mb\,.\,M\beta\,.\,\frac{Ma}{M\alpha}$ gesetzt und die Produkte durch die eingeführte Bezeichnung der Potenz ersetzt werden:

$$\text{(I.)}\quad P_{\mathfrak{A}}\,.\,P_{\mathfrak{B}}\,.\,\sin^2 (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = P_a\,.\,P_b$$

$$\text{(II.)}\quad P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}} = P_a + P_b.$$

(I) „Das Produkt aus den Potenzen der auf einem Paar konjugirter Durchmesser des Netzes befindlichen Punktsysteme multiplicirt mit dem Quadrat des sinus des Winkels zwischen diesen beiden konjugirten Durchmessern ist konstant."

(II) „Die Summe der Potenzen der auf einem Paar konjugirter Durchmesser des Netzes befindlichen Punktsysteme ist konstant."

Diese Sätze sind conform mit den bekannten Eigenschaften

der konjugirter Durchmesser des Kegelschnitts; sie bleiben bestehen für das Netz, auch wenn dasselbe elliptisch ist, also keinen reellen Kernkegelschnitt besitzt, wofern wir nur an die Stelle der Durchmesser den allgemeineren Begriff der 'Potenz des zugehörigen Punktsystems setzen. In dem Falle eines elliptischen Netzes sind allemal beide Werthe $P_{\mathfrak{A}}$ und $P_{\mathfrak{B}}$ negativ, in dem Falle eines hyperbolischen Netzes entweder beide positiv (Kernkegelschnitt-Ellipse) oder einer positiv, der andere negativ (Kernkegelschnitt-Hyperbel). Für zwei konjugirte Hyperbeln, welche dasselbe Strahlsystem der konjugirten Durchmesser haben (§ 32), findet allemal ein derartiges Verhalten statt, dass, wenn bei der einen $P_{\mathfrak{A}}$ positiv und $P_{\mathfrak{B}}$ negativ, bei der andern umgekehrt $P_{\mathfrak{A}}$ negativ und $P_{\mathfrak{B}}$ positiv ist, übrigens aber die absoluten Werthe dieser Potenzen beziehlich dieselben sind. In diesem Sinne können wir uns auch zu der Ellipse den konjugirten Kegelschnitt, der vollständig imaginär ist, denken, indem wir ihm dasselbe Strahlsystem der konjugirten Durchmesser zutheilen, aber auf jedem Paar konjugirter Durchmesser die Potenzen der zugehörigen Punktsysteme gleich und entgegengesetzt annehmen, also die hyperbolischen Punktsysteme in gleichwerthige elliptische verwandeln. Solche vier Netze (Kegelschnitte), welchen die Werthe:

$$\begin{array}{c|c|c|c} +P_a & +P_a & -P_a & -P_a \\ +P_b & -P_b & +P_b & -P_b \end{array}$$

zukommen, sind vier **harmonisch-zugeordnete Kegelschnitte**, wie aus § 56 hervorgeht.

Sind insbesondere die Werthe von $P_a$ und $P_b$ einander gleich, so lässt die obige Konstruktion erkennen, dass, wenn beide positiv oder beide negativ sind, das dem Mittelpunkte $M$ zugehörige Strahlsystem des Netzes (das konjugirte Durchmessersystem) ein Kreissystem wird, also je zwei konjugirte Durchmesser auf einander rechtwinklig sind, woraus denn folgt, dass der Kernkegelschnitt des Netzes ein reeller oder imaginärer Kreis wird. Hieraus folgt die bekannte Eigenschaft eines solchen besonderen Netzes, dass die Polare irgend eines Punktes $p$ senkrecht steht auf der Verbindungslinie $(pM)$ desselben mit dem Mittelpunkte des Netzes, und zwar in demjenigen Punkte $\pi$ dieses Durchmessers $pM$, für welchen $Mp \,.\, M\pi$ gleich dem festen (positiven oder negativen) Werthe der Potenz $P_a$ $(= P_b)$. Sind dagegen die Werthe von $P_a$ und $P_b$ gleich und entgegengesetzt, so ist das

$$x'y \,.\, x'z = x'x \,.\, \xi x' = \text{const.}$$

Wenn wir also den Punkt $x$ festhalten und das Paar konjugirter Punkte $y$, $z$ auf seiner Polare $X$ beliebig verändern, d. h. das ganze Punktsystem durchlaufen lassen, so bleibt der Höhenpunkt $\xi$ des Tripeldreiecks $xyz$ immer derselbe feste Punkt.

Die Fusspunkte $y'$ und $z'$ der aus $y$ und $z$ auf die Seiten des Tripeldreiecks $xyz$ gefällten Perpendikel besitzen die Eigenschaft, dass $y'y$ und $y'z$, ebenso $z'y$ und $z'z$ je zwei konjugirte Strahlen des Netzes sind und, da diese auf einander senkrecht stehen, die Axen der den Punkten $y'$ und $z'$ zugehörigen Strahlsysteme des Netzes. Bei der Veränderung von $y$ und $z$ beschreiben nun $y'$ und $z'$ einen Kreis, dessen Durchmesser $x\xi$ ist. Jeder Punkt dieses Kreises mit $x$ und $\xi$ verbunden liefert die Axen des ihm zugehörigen Strahlsystems im Netze.

Um die Veränderung zu verfolgen, welche mit der Bewegung des Punktes $x$ eintritt, müssen wir ermitteln, wie der Punkt $\xi$ mit $x$ sich verändert; mit $x$ verändert sich zunächst $X$, indem es sich beständig parallel bleibt und

$$Mx \,.\, Mx' = \text{const.}$$

ist; die durch $x$ gezogene Gerade $Y$ soll auch, wie oben bestimmt ist, in ihrer Richtung festgehalten werden, der Pol $y$ wird also auf dem zu dieser Richtung konjugirten Durchmesser $My$ sich bewegen; das Perpendikel $yy'$ bleibt beständig sich parallel und es bleiben daher die Verhältnisse konstant:

$$\frac{My}{M\xi} = \text{const.} \quad \frac{Mx'}{My} = \text{const.}$$

und hieraus auch:

$$\frac{Mx'}{M\xi} = \text{const.}$$

Diese Relation mit der obigen verbunden, giebt

$$Mx \,.\, M\xi = \text{const.}$$

und hieraus schliessen wir, dass die Punkte $x$ und $\xi$ konjugirte Punkte eines bestimmten neuen, auf der Axe befindlichen Punktsystems sind, welches denselben Mittelpunkt $M$ hat. (Wollten wir die kleine Rechnung vermeiden, so wäre ebenso leicht zu zeigen, dass bei der Bewegung von $x$ der Punkt $\xi$ eine mit ihm projektivische Punktreihe durchläuft und dass entsprechende gleiche Strecken der beiden projektivischen Punktreihen verkehrt

auf einander fallen, d. h. wenn $\xi$ nach $x$ gelangt, $x$ nach $\xi$ kommt, woraus dann ebenfalls die involutorische Eigenschaft des Punktenpaares $(x, \xi)$ erhellt.)

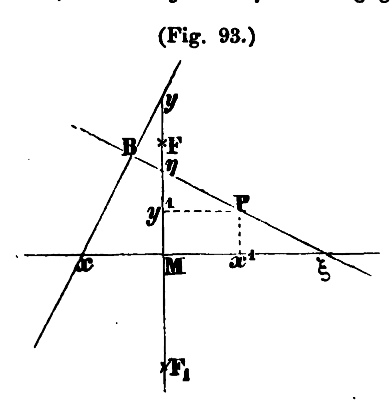
Nachdem diese Abhängigkeit der Punkte $x$ und $\xi$ von einander ermittelt ist, wird die ursprünglich vorgelegte Frage leicht zu beantworten sein. Soll nämlich das dem Punkte $x$ zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem werden, so muss das Tripeldreieck $xyz$ bei $x$ rechtwinklig sein, d. h. der Höhenpunkt $\xi$ dieses Dreiecks muss mit der Ecke $x$ zusammenfallen, und umgekehrt: Wenn der Höhenpunkt $\xi$ mit $x$ zusammenfällt und nur dann, werden $Y$ und $Z$ rechtwinklig zu einander sein. Da nun $x$ und $\xi$ konjugirte Punkte eines bestimmten und aus dem Obigen leicht zu ermittelnden Punktsystems sind, so kommt es nur darauf an, die Asymptotenpunkte dieses Punktsystems zu finden. Diese sind nur reell, wenn das Punktsystem hyperbolisch ist, im andern Falle werden sie durch dieses bestimmte (elliptische) Punktsystem vertreten. Es kann also auf jeder Axe des Netzes höchstens zwei Punkte der verlangten Beschaffenheit geben, dass die ihnen zugehörigen Strahlsysteme des Netzes Kreissysteme werden. Um zu erfahren, ob diese Punkte reell sind, müssen wir das oben ermittelte Punktsystem $(x, \xi)$ auf jeder Axe genauer zu bestimmen suchen. Da die Punkte $x$, $\xi$ auf der in Betracht gezogenen Axe des Netzes ein Punktsystem bilden, so werden sämmtliche über den Strecken $x\xi$ als Durchmesser beschriebene Kreise eine Kreisschaar bilden und zwar mit einer reellen gemeinschaftlichen Sekante, wenn das Punktsystem $(x, \xi)$ elliptisch ist, dagegen mit einer ideellen gemeinschaftlichen Sekante, wenn das Punktsystem $(x, \xi)$ hyperbolisch ist, indem die beiden Asymptotenpunkte desselben die Grenzpunkte (Null-Kreise) der Kreisschaar werden. Welcher Art aber auch diese Kreisschaar sei, immer giebt es durch einen Punkt $B$ der Ebene nur einen einzigen, stets reellen Kreis, welcher der Schaar angehört, oder mit andern Worten, die Kreisschaar erfüllt die ganze unendliche Ebene. Wir haben nun oben gesehen, dass jeder Punkt eines solchen Kreises, welcher über $x\xi$ als Durchmesser beschrieben ist, mit $x$ und $\xi$ verbunden zwei rechtwinklige Strahlen liefert, welche die Axen seines Punktsystems im Netze sind. Da aber jedem Punkte $B$ in der Ebene des Netzes nur ein bestimmtes Strahlsystem zugehört und auch durch jeden Punkt $B$ nur ein

bestimmter Kreis der Kreisschaar hindurchgeht, so können wir umgekehrt schliessen:

**Denkt man sich in sämmtlichen Punkten $B$ der Ebene eines Netzes die Axen der ihnen im Netze zugehörigen Strahlsysteme ermittelt und trifft ein solches Axenpaar eine (oder die andere) Axe des Netzes in dem Punktenpaar $x$, $\xi$, so bildet die Gesammtheit dieser Paare $x$, $\xi$ ein bestimmtes Punktsystem auf der Axe des Netzes oder $x$, $\xi$ sind allemal ein Paar konjugirter Punkte eines und desselben Punktsystems, wo auch der Punkt $B$ angenommen werden mag.**

Hierdurch wird das Punktsystem ($x$, $\xi$) auf eine zweite sehr einfache Weise bestimmt und zwar für jede der Axen des Netzes in gleichartiger Weise, denn die eine der Betrachtung zu Grunde gelegte Axe hat vor der anderen nichts voraus, und durch einen bestimmten Punkt $B$ giebt es nur ein einziges Paar Axen desjenigen Strahlsystems, welches dem Punkte $B$ im Netze zugehört. Denken wir uns also einen beliebigen Punkt $B$ in der Ebene und die Axen seines Strahlsystems, welche in $x$ und $\xi$ die eine, in $y$ und $\eta$ die andere Axe des Netzes treffen mögen, so bestimmen $x$, $\xi$ und der Mittelpunkt $M$ das eine, $y$, $\eta$ und der Mittelpunkt $M$ das andere Punktsystem auf den Axen des Netzes und es ist jetzt leicht ersichtlich, dass von diesen beiden Punktsystemen nothwendig eines hyperbolisch und das andere elliptisch sein muss; denn sobald $x$ und $\xi$ auf derselben Seite von $M$ gelegen sind, müssen $y$ und $\eta$ auf entgegengesetzten Seiten von $M$ liegen und umgekehrt (Fig. 93). Die vier Punkte $x\,\xi\,y\,\eta$ liegen nämlich so, dass jeder von ihnen der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks ist, und es findet demzufolge die Bedingung statt:

(Fig. 93.)




$$Mx \,.\, M\xi + My \,.\, M\eta = 0;$$

das eine dieser beiden Produkte ist also gleich, aber entgegengesetzt dem andern, d. h. wenn das eine positiv ist, muss das

andere negativ sein und umgekehrt. Von den beiden auf den Axen des Netzes hervorgerufenen Punktsystemen ist also eines nothwendig hyperbolisch, das andere elliptisch. Die Asymptotenpunkte des hyperbolischen Punktsystems $F$ und $F_1$ sind die einzigen reellen Punkte in der Ebene des Netzes, für welche das zugehörige Strahlsystem ein Kreissystem wird; sie heissen die **Brennpunkte des Netzes**; auf der andern Axe giebt es ein bestimmtes elliptisches Punktsystem, dessen Potenz den gleichen aber entgegengesetzten Werth hat und dessen imaginäre Asymptotenpunkte als das zweite Paar Brennpunkte des Netzes aufgefasst werden können. Wollen wir noch die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ als dritte Axe des Netzes gelten lassen, insofern sie der dritte Tripelstrahl zu den beiden endlichen Axen des Netzes ist und gewissermaassen als auf jeder Geraden in der Ebene senkrecht stehend angenommen werden kann, so wird auf dieser dritten Axe ebenfalls ein Punktsystem $(z, \zeta)$ durch die Axen eines jeden Strahlsystems im Netze bestimmt werden und dieses Punktsystem ist ein für allemal dasselbe (elliptische), indem es von je zwei unendlich-entfernten Punkten in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen erzeugt wird. Die imaginären Asymptotenpunkte desselben sind die imaginären Kreispunkte der unendlich-entfernten Geraden (§ 35) und können allemal als ein Paar imaginäre Brennpunkte für jedes Netz angesehen werden.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Potenz des Punktsystems $(x, \xi)$, welche gleich und entgegengesetzt der des andern Punktsystems $(y, \eta)$ ist, zu bestimmen oder, was dasselbe ist, den Abstand jedes der Brennpunkte $F F_1$ von dem Mittelpunkte $M$ des Netzes zu ermitteln; dieser ist leicht auszudrücken durch die Potenzen $P_a$ und $P_b$ derjenigen beiden Punktsysteme, welche den Axen des Netzes zugehören. Nehmen wir von den beiden Axen des dem Punkte $B$ zugehörigen Strahlsystems eine, welche in $x$ und $y$ die Axen des Netzes treffen möge, so wird ihr Pol $P$ auf der andern liegen müssen (Fig. 93), also in der durch $B$ auf ihr gezogenen Senkrechten, welche in $\xi$ und $\eta$ die Axen des Netzes trifft; die Polare von $x$ muss nun durch $P$ gehen und senkrecht stehen auf $Mx$, also, wenn das aus $P$ auf $Mx$ herabgelassene Perpendikel diese Gerade in $x'$ trifft, so ist $Mx \, . \, Mx' = P_a$ und ebenso $My \, . \, My' = P_b$, wo $y'$ den Fusspunkt des aus $P$ auf $My$ herabgelassenen Perpendikels, d. h. der Polare von $y$ bedeutet. Aus

der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt nun:

$$\frac{M\eta}{M\xi} = \frac{y'\eta}{y'P} = \frac{y'\eta}{Mx'} = \frac{M\eta - My'}{Mx'}$$

und setzen wir dies Verhältniss in die oben gefundene Relation:

$$Mx \,.\, M\xi + My \,.\, M\eta = 0$$

ein, so folgt:

$$Mx \,.\, Mx' - My \,.\, My' = - My \,.\, M\eta = Mx \,.\, M\xi$$

oder:

$$\begin{cases} Mx \,.\, M\xi = P_a - P_b \\ My \,.\, M\eta = P_b - P_a. \end{cases}$$

Die Potenz desjenigen Punktsystems, dessen Asymptotenpunke die Brennpunkte des Netzes sind, ist hiernach gefunden, also auch die Entfernung der Brennpunkte $FF_1$ vom Mittelpunkte, deren Quadrat gleich dem absoluten Werthe von $(P_a - P_b)$ ist.

Es ist vorhin erwähnt worden, dass die Kreise, welche über je einer Strecke $x\xi$ zwischen zwei konjugirten Punkten des Punktsystems $(x, \xi)$ als Durchmesser beschrieben werden, eine Kreisschaar bilden, deren Grenzpunkte (Nullkreise) die Brennpunkte des Netzes sind. Wir erhalten hiernach für die beiden endlichen Axen des Netzes zwei Kreisschaaren, deren eine zur ideellen, die andere zur reellen gemeinschaftlichen Sekante die eine und die andere Axe des Netzes und die jedesmalige zweite Axe zur Centrale hat; da die Potenz des Punktes $M$ in Bezug auf die Kreise der einen Schaar gleich aber entgegengesetzt der Potenz desselben Punktes in Bezug auf die Kreise der andern Schaar ist, so schneidet jeder Kreis der einen jeden der andern Schaar rechtwinklig, und die Kreise über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser stehen daher in der bekannten Beziehung zu einander, dass sie zwei konjugirte Kreisschaaren bilden. Wir können dies als Satz folgendermaassen aussprechen:

Die beiden Brennpunkte auf der einen Axe des Netzes und die Schnittpunkte der andern mit irgend einem Axenpaar des Strahlsystems, welches einem beliebigen Punkte in der Ebene des Netzes zugehört, liegen allemal auf einem Kreise.

Das dritte zu den beiden konjugirten Kreisschaaren zugehörige Kegelschnittbüschel, welches aus sämmtlichen gleichseitigen Hyperbeln besteht, die $M$ zum Mittelpunkt haben und durch die Brennpunkte $FF_1$ gehen (§ 50), scheint bei dieser Betrachtung

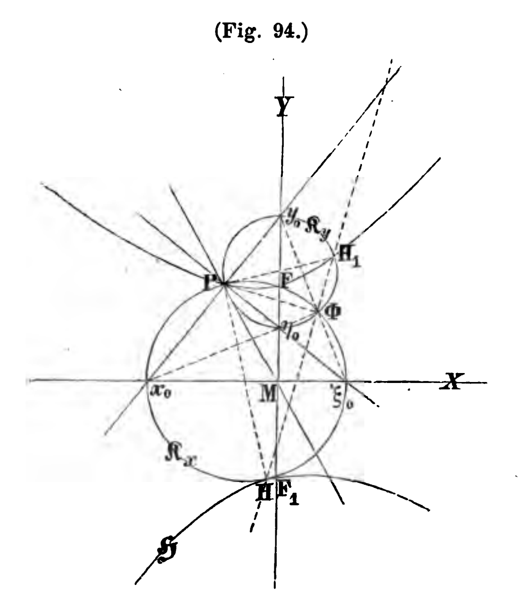
nicht besonders hervorzutreten, auch wenn man $\mathfrak{G}_\infty$ als dritte Axe des Netzes hinzunimmt.

## § 60. Einige Eigenschaften der Axen sämmtlicher Strahlsysteme, welche den Punkten in der Ebene eines Netzes zugehören.

Wir haben in § 56 das Gesetz aufgesucht, welchem die Asymptoten sämmtlicher Strahlsysteme, die den Punkten in der Ebene eines Netzes zugehören, unterworfen sind, sowie den Ort sämmtlicher Asymptotenpunkte auf allen Geraden in der Ebene des Netzes; letzterer war der Kern des Netzes und sämmtliche Asymptoten Tangenten dieses Kernkegelschnitts. Es bietet sich jetzt die Frage dar, welchem Gesetze die Axen sämmtlicher Strahlsysteme im Netze unterworfen sind? Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene ist Axe eines bestimmten Strahlsystems; denn treffe sie eine Axe $X$ des Netzes in $x$ und sei $\xi$ der konjugirte Punkt in demjenigen Strahlsystem $(x, \xi)$ auf dieser Axe (§ 59), dessen Asymptotenpunkte die reellen (oder imaginären) Brennpunkte des Netzes sind, so wird das Perpendikel aus $\xi$ auf die Gerade $\mathfrak{A}$ dieselbe in demjenigen Punkte $p$ treffen, für welchen die Gerade $\mathfrak{A}$ und die darauf Senkrechte die Axen des dem Punkte $p$ zugehörigen Strahlsystems im Netze sind. Durch einen beliebigen Punkt $P$ in der Ebene gehen also unendlich-viele Gerade $\mathfrak{A}$, welche als Axen für bestimmte dem Netze zugehörige Strahlsysteme auftreten; suchen wir den Ort der zugehörigen zweiten Axe $\mathfrak{B}$ zu bestimmen. Das von der Geraden $\mathfrak{A}$ beschriebene Strahlbüschel $(P)$ trifft die Axe $X$ des Netzes in der Punktreihe $(x)$ und die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ in einer Punktreihe, die mit der Punktreihe $(x)$ perspektivisch liegt; denken wir uns das Strahlbüschel $(P)$ um $90^0$ gedreht, so trifft es die $\mathfrak{G}_\infty$ in einer neuen Punktreihe, welche ebenfalls mit dem Strahlbüschel $(P)$ projektivisch ist; der dem $x$ konjugirte Punkt $\xi$ beschreibt bei der Bewegung von $x$ eine Punktreihe $(\xi)$, welche wegen der projektivischen Natur des Punktsystems (§ 16) ebenfalls mit der Punktreihe $(x)$ projektivisch ist, und die Perpendikel aus $\xi$ auf den jedesmaligen Strahl $\mathfrak{A}$ sind nichts anderes, als Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier projektivischer Punktreihen auf den Trägern $X$ und $\mathfrak{G}_\infty$, indem letztere von dem um $90^0$ gedrehten Strahlbüschel $(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{G}$ ausgeschnitten wird. Die

der Axe $\mathfrak{A}$ zugehörige zweite Axe $\mathfrak{B}$ umhüllt daher einen Kegelschnitt und zwar eine Parabel, weil $\mathfrak{G}_\infty$ eine Tangente ist; diese Parabel berührt die beiden endlichen Axen $X$ und $Y$ des Netzes und der Mittelpunkt $M$ des Netzes ist daher ein Punkt der Leitlinie dieser Parabel, weil durch ihn zwei rechtwinklige Tangenten an dieselbe gehen (§§ 34, 36). Da ferner dem festen Punkte $P$ selbst ein bestimmtes Strahlsystem im Netze zugehört, dessen Axen ein besonderes Axenpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist, so liegt auch $P$ in der Leitlinie und $PM$ ist daher die Leitlinie der Parabel. Wir können auch leicht den Brennpunkt dieser Parabel ermitteln; die Axen des dem Punkte $P$ zugehörigen Strahlsystems mögen $X$ in $x_0 \xi_0$ und $Y$ in $y_0 \eta_0$ treffen (Fig. 94), dann gehören die beiden

(Fig. 94.)




über $x_0 \xi_0$ und $y_0 \eta_0$ als Durchmesser beschriebenen Kreise den beiden früher (§ 59) erwähnten konjugirten Kreisschaaren an; diese beiden Kreise haben nun ausser dem Punkte $P$ noch einen zweiten (reellen) Punkt $\Phi$ gemein und $\Phi$ ist der Brennpunkt unserer Parabel; denn da der Brennpunkt einer Parabel, welche einem Dreiseit einbeschrieben ist, allemal auf dem dem Dreiseit umschriebenen Kreise liegt (§ 43) und wir hier zwei der Parabel umschriebene Dreiecke $P x \xi$ und $P y \eta$ haben, so muss der ge-

meinschaftliche Punkt der ihnen umschriebenen Kreise der gesuchte Brennpunkt der Parabel sein; da aber $P$ dieser Punkt offenbar nicht sein kann, so ist $\Phi$ der Brennpunkt der Parabel. Es ist ferner leicht zu sehen, dass $\Phi = (x_0 \eta_0, y_0 \xi_0)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden $x_0 \eta_0$ und $y_9 \xi_0$ ist und dass dieselben auf einander senkrecht stehen, oder dass $\Phi$ der dritte Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks $x_0 y_0 \xi_0 \eta_0$ ist, dessen beide andern $P$ und $M$ sind. Die Gerade, welche die Fusspunkte der aus $\Phi$ auf die Axen $X$ $Y$ gefällten Perpendikel verbindet, ist also nach bekannten Eigenschaften der Parabel die Tangente im Scheitel derselben und läuft parallel der Leitlinie $PM$. Die hier auftretende Parabel ist uns also jetzt durch Leitlinie und Brennpunkt vollständig bekannt und wir können das Ergebniss der vorigen Untersuchung folgendermaassen zusammenfassen:

Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene eines Netzes ist eine Axe eines bestimmten dem Netze zugehörigen Strahlsystems; die andere Axe $\mathfrak{B}$ wird gefunden, indem man den Schnittpunkt $x$ der Geraden $\mathfrak{A}$ mit einer Axe $X$ des Netzes aufsucht, den konjugirten Punkt $\xi$ desjenigen Punktsystems bestimmt, welches die (reellen oder imaginären) Brennpunkte des Netzes auf dieser Axe zu Asymptotenpunkten hat, und aus $\xi$ ein Perpendikel auf $\mathfrak{A}$ herablässt; dieses Perpendikel ist die andere Axe $\mathfrak{B}$ und der Schnittpunkt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = p$ derjenige Punkt von $\mathfrak{A}$, dessen Strahlsystem im Netze $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu Axen hat. Bewegt man die Gerade $\mathfrak{A}$ um einen beliebigen festen Punkt $P$, so verändert sich auch $\mathfrak{B}$ und umhüllt eine Parabel $P^{(2)}$. Diese Parabel hat $PM$, die Verbindungslinie des festen Punktes $P$ mit dem Mittelpunkte $M$ des Netzes, zur Leitlinie und berührt sowohl die beiden Axen des Netzes, als auch die beiden Axen des besonderen Strahlsystems, welches dem Punkte $P$ im Netze zugehört. Jedem Punkte $P$ in der Ebene entspricht also eine bestimmte Parabel $P^{(2)}$; bewegt sich $P$ auf einer Geraden $\mathfrak{A}_0$, so durchläuft $P^{(2)}$ eine Parabelschaar von vier festen Tangenten, nämlich: die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, die beiden Axen $X$ $Y$ des Netzes und diejenige Gerade $\mathfrak{B}_0$, welche die andere Axe zu $\mathfrak{A}_0$ ist; die Leitlinien dieser

Parabelschaar laufen durch den festen Punkt $M$ (§ 43) u. s. f.

Halten wir den Punkt $P$ fest und suchen etwas näher den Zusammenhang der Parabel $P^{(2)}$ mit den beiden konjugirten Kreisschaaren zu erkennen, denen wir noch das dritte konjugirte Büschel gleichseitiger Hyperbeln hinzufügen, so zeigen sich die in § 50 allgemein gefundenen Eigenschaften dreier konjugirter Kegelschnittbüschel für diesen besonderen Fall einfach bestätigt. Ein Kegelschnitt, welchem die beiden Punktsysteme $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ auf den Axen $X$ und $Y$ des Netzes zugehören, ist allemal eine gleichseitige Hyperbel, welche $M$ zum Mittelpunkte hat; denn nach der in § 31 angegebenen Konstruktion geht durch einen gegebenen Punkt $P$ nur ein einziger bestimmter Kegelschnitt, welcher die Punktsysteme $(x, \xi)$ und $(y, \eta)$ zu zugehörigen hat, und dieser Kegelschnitt wird gefunden, indem wir das einzige Strahlenpaar durch $P$ aufsuchen, welches gleichzeitig sowohl das eine, wie das andere Punktsystem in einem Paar konjugirter Punkte trifft. In unserm Falle ist nun dieses Strahlenpaar immer reell, nämlich das Axenpaar des dem Punkte $P$ im Netze zugehörigen Strahlsystems, welches in $x_0 \xi_0$ die Axe $X$ und in $y_0 \eta_0$ die Axe $Y$ trifft. Die Punkte, in welchen diese beiden Strahlen die Polare des Schnittpunkts $(X, Y) = M$, d. h. $\mathfrak{G}_\infty$ treffen, also die unendlich-entfernten Punkte jener beiden rechtwinkligen, durch $P$ gehenden Strahlen sind (§ 31) Punkte des gesuchten Kegelschnitts und dieser ist also eine gleichseitige Hyperbel, weil er zwei unendlich-entfernte Punkte in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen hat. Diese beiden Punkte, die Brennpunkte des Netzes $FF_1$, und der Punkt $P$ bestimmen vollständig den Kegelschnitt. Nennen wir zur Abkürzung die beiden Kreise, welche $x_0 \xi_0$ und $y_0 \eta_0$ zu Durchmessern haben, $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$, die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ (Fig. 94), so hat $\mathfrak{H}$ mit jedem der beiden Kreise noch einen reellen gemeinschaftlichen Punkt ausser $P$, und diese Punkte $HH_1$ sind leicht zu finden; $x_0 \xi_0$ sind nämlich ein Paar konjugirter Punkte für die Hyperbel $\mathfrak{H}$ und $P$ ein Punkt derselben; die Strahlen $Px_0$ und $P\xi_0$ treffen die Hyperbel $\mathfrak{H}$ in den beiden unendlich-entfernten Punkten, deren Verbindungslinie $(\mathfrak{G}_\infty)$ den Pol von $x_0 \xi_0$ in Bezug auf die Hyperbel enthält, weil $x_0 \xi_0$ durch $M$ geht; folglich müssen (§ 31) die durch $x_0$ und $\xi_0$ parallel zu $P\xi_0$ und $Px_0$ gezogenen Geraden sich in einem Punkte $H$ der Hyperbel $\mathfrak{H}$

treffen; dieser liegt gleichzeitig auf dem Kreise $\mathfrak{K}_x$, denn er ist der diametral gegenüberliegende Punkt zu $P$ auf diesem Kreise oder, was dasselbe bedeutet, der zweite Schnittpunkt der Tangente in $P$ am Kreise $\mathfrak{K}_y$, mit dem Kreise $\mathfrak{K}_x$; in gleicher Weise trifft die Tangente in $P$ am Kreise $\mathfrak{K}_x$ den Kreis $\mathfrak{K}_y$ in einem Punkte $H_1$ der Hyperbel $\mathfrak{H}$; die beiden Punkte $H$ und $H_1$ liegen in gerader Linie mit $\Phi$, dem zweiten Schnittpunkte der Kreise $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$, denn die Mittelpunkte dieser beiden Kreise sind die Mitten der Strecken $PH$ und $PH_1$ und die Centrale halbirt die gemeinschaftliche Sekante $P\Phi$; da sie zugleich auf ihr senkrecht steht, so ist auch die Gerade, in welcher die Punkte $HH_1\Phi$ liegen, zur Geraden $P\Phi$ rechtwinklig. Ferner zeigt sich, dass $P\Phi$ die Tangente im Punkte $P$ an der Hyperbel $\mathfrak{H}$ ist, denn da $x_0\xi_0$ ein Paar konjugirter Punkte ist in Bezug auf $\mathfrak{H}$ und $y_0\eta_0$ ein zweites Paar, so ist (§ 31) das Paar $(x_0y_0, \xi_0\eta_0) = P$ und $(x_0\eta_0, \xi_0y_0) = \Phi$ ein drittes Paar konjugirter Punkte für die Hyperbel $\mathfrak{H}$; und da $P$ selbst auf ihr liegt, so ist $P\Phi$ Tangente in $P$. Die Gerade $HH_1\Phi$ ist die Polare des Punktes $P$ in Bezug auf die ihm entsprechende Parabel $P^{(2)}$, denn $P$ liegt in der Leitlinie dieser Parabel, deren Pol der Brennpunkt $\Phi$ derselben ist; ferner steht $HH_1$ senkrecht auf $P\Phi$; folglich ist nach bekannten Eigenschaften der Parabel $HH_1$ die Polare von $P$ in Bezug auf die Parabel $P^{(2)}$; die Schnittpunkte von $HH_1$ mit den beiden durch $P$ gehenden rechtwinkligen Strahlen $Px_0$ und $P\xi_0$ sind daher deren Berührungspunkte mit der Parabel $P^{(2)}$ und hieraus folgt, dass $H$ und $H_1$ die Pole der durch $P$ zu $X$ und $Y$ gezogenen Parallelen in Bezug auf die Parabel $P^{(2)}$ sind, ebenso wie $\Phi$ der Pol von $PM$ ist. Wir können hiernach folgendes Ergebniss zusammenstellen:

Die auf den Geraden $X, Y, Z$ $(=\mathfrak{G}_\infty)$ des Netzes befindlichen Punktsysteme $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$, welche von den Axenpaaren sämmtlicher Strahlsysteme im Netze ausgeschnitten werden, bestimmen paarweise zusammengefasst drei konjugirte Kegelschnittbüschel so, dass die Kegelschnitte eines Büschels je zwei von den Punktsystemen zu zugehörigen haben; diese drei Büschel bestehen aus zwei konjugirten Kreisschaaren, welche über $x\xi$ und $y\eta$ als Durchmesser beschrieben sind, und einem Büschel gleichseitiger Hyperbeln,

welche durch je zwei unendlich-entfernte Punkte $z$, $\zeta$, die in rechtwinkligen Richtungen zu einander liegen, sowie durch die beiden reellen Brennpunkte des Netzes $FF_1$ gehen, und den Mittelpunkt $M$ des Netzes zu ihrem gemeinschaftlichen Mittelpunkte haben. Durch einen beliebigen Punkt $P$ des Netzes gehen drei bestimmte Kegelschnitte dieser Büschel: zwei Kreise $\mathfrak{K}_x$ $\mathfrak{K}_y$ und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$; treffen nämlich die dem Punkte $P$ im Netze zugehörigen Axen in $x_0 \xi_0$ die Axe $X$, in $y_0 \eta_0$ die $Y$, in $z_\infty \zeta_\infty$ die Axe $Z$ ($\mathfrak{G}_\infty$), so ist $\mathfrak{K}_x$ der über $x_0 \xi_0$ als Durchmesser beschriebene Kreis, $\mathfrak{K}_y$ der über $y_0 \eta_0$ als Durchmesser beschriebene Kreis und $\mathfrak{H}$ die durch $z_\infty \zeta_\infty FF_1$ und $P$ gelegte gleichseitige Hyperbel. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x$ $\mathfrak{K}_y$ $\mathfrak{H}$ haben zu je zweien noch einen vierten reellen Punkt gemein, nämlich $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$ den Punkt $\Phi$, $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{H}$ den Punkt $H$, $\mathfrak{K}_y$ und $\mathfrak{H}$ den Punkt $H_1$. Die drei Punkte $HH_1\Phi$ liegen in einer Geraden, welche die Polare des Punktes $P$ in Bezug auf die oben betrachtete Parabel $P^{(2)}$ ist, und die drei Strahlen $PH$, $PH_1$, $P\Phi$ sind die Tangenten der beiden Kreise $\mathfrak{K}_x$ $\mathfrak{K}_y$ und der gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$ in dem gemeinschaftlichen Punkte $P$. Die Punkte $HH_1\Phi$ sind auch die Pole der drei Strahlen, welche von $P$ nach den Schnittpunkten der Seiten des Dreiseits $XYZ$ hingehen, in Bezug auf die Parabel $P^{(2)}$.

Da jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene des Netzes ein Axe für ein bestimmtes dem Netze zugehöriges Strahlsystem ist und der Punkt $p$, welchem dieses Strahlsystem zugehört, nach dem Obigen leicht gefunden wird als Schnittpunkt der zweiten Axe $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$, so bietet sich die Frage dar, welches der Ort des Punktes $p$ ist, wenn wir die Gerade $\mathfrak{A}$ um einen festen Punkt $P$ drehen. Da die Gerade $\mathfrak{B}$ bei dieser Bewegung eine bestimmte Parabel $P^{(2)}$ beschreibt, wie wir gesehen haben, so ist der Ort des Punktes $p$ der Ort der Fusspunkte von allen Perpendikeln, welche aus $P$ auf die Tangenten dieser Parabel herabgelassen werden können, oder die Fusspunktskurve für die Parabel in Bezug auf den Punkt $P$. Diese ist eine Kurve dritten Grades $C^{(3)}$, welche in $P$ einen Doppelpunkt hat, denn sie ist das Erzeugniss zweier

projektivischer Gebilde: eines Strahlbüschels ($P$) und eines krummen Tangentenbüschels (der Parabel)*); wir können aber auch direkt nachweisen, dass sie vom dritten Grade ist, indem wir zeigen, dass es auf jeder beliebigen Geraden in der Ebene im Allgemeinen drei Punkte des gesuchten Ortes giebt. Lassen wir auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{L}$ einen veränderlichen Punkt $\mathfrak{x}$ sich bewegen, ziehen $P\mathfrak{x}$ und die darauf Senkrechte in $\mathfrak{x}$, so umhüllt die letztere offenbar eine zweite Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, welche $P$ zum Brennpunkte und $\mathfrak{L}$ zur Tangente am Scheitel hat; die beiden Parabeln $P^{(2)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ haben in der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ bereits eine gemeinschaftliche Tangente, mithin im Allgemeinen und höchstens noch drei andere; die Schnittpunkte derselben mit der Geraden $\mathfrak{L}$ sind offenbar Punkte des gesuchten Ortes, dieser ist also vom dritten Grade. Denken wir uns kontinuirlich den Strahl $\mathfrak{A}$ um den festen Punkt $P$ gedreht, so trifft ihn die jedesmal zu seiner Richtung senkrechte (einzige) Tangente der Parabel $P^{(2)}$ in dem Punkte $p$, welcher kontinuirlich die ganze Kurve $C^{(3)}$ beschreibt; auf jedem durch $P$ gehenden Strahl $\mathfrak{A}$ giebt es also nur einen solchen Punkt $p$ des Ortes $C^{(3)}$; insbesondere aber gelangt der Strahl $\mathfrak{A}$ bei seiner kontinuirlichen Drehung nothwendig einmal in die Lage $\mathfrak{A}_0$ einer der beiden Axen des Strahlsystems, welches dem Punkte $P$ in Bezug auf das Netz zugehört; die andere Axe $\mathfrak{B}_0$ trifft ihn dann in $P$ selbst, und $P$ ist daher auch ein Punkt des Ortes; zweitens gelangt aber auch der veränderliche Strahl $\mathfrak{A}$ in die Lage von $\mathfrak{B}_0$ und der veränderliche Punkt $p$ fällt also zum zweiten Mal nach $P$; hieraus erkennen wir, dass der Punkt $P$ ein Doppelpunkt der Kurve $C^{(3)}$ ist; die Verbindungslinie $Pp$ ist immer Sehne der Kurve $C^{(3)}$ und geht also bei der kontinuirlichen Drehung um $P$, sobald $\mathfrak{A}$ in die Lage von $\mathfrak{A}_0$ oder $\mathfrak{B}_0$ kommt, in die Tangente an $C^{(3)}$ für den Doppelpunkt $P$ über, weil in jedem dieser Fälle $P$ mit $p$ zusammenfällt. Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte der Kurve $C^{(3)}$ stehen daher auf einander senkrecht. Es ist leicht, einige besondere Punkte der Kurve $C^{(3)}$ anzugeben; offenbar geht sie durch die Brennpunkte $FF_1$ des Netzes, denn die Gerade $PF$ und die darauf Senkrechte in $F$ sind auch ein Paar Axen des dem Punkte $F$ zu-

*) Siehe Crelle-Borchardt'sches Journal für Mathematik Bd. LIV, Seite 31 ff.: „Ueber die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde" von H. Schröter.

gehörigen Strahlsystems, weil dieses ein Kreissystem ist. (Hieraus schliessen wir, dass sie in gleicher Weise durch die beiden imaginären Brennpunkte auf der zweiten Axe und die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte auf der dritten Axe, $\mathfrak{G}_\infty$, geht.) Ferner geht $C^{(3)}$ durch die Fusspunkte der beiden Perpendikel, welche von $P$ aus auf die beiden endlichen Axen $X\,Y$ des Netzes herabgelassen werden, weil die Parabel $P^{(2)}$ die Axen $X\,Y$ zu Tangenten hat; sodann geht $C^{(3)}$ durch den unendlich-entfernten Punkt von der Leitlinie der Parabel $P^{(2)}$, weil als die einzige Tangente der Parabel, welche auf dieser senkrecht steht, die $\mathfrak{G}_\infty$ anzusehen ist. Endlich sind noch zwei Punkte der Kurve $C^{(3)}$ in dem Falle anzugeben, dass das Netz ein hyperbolisches ist. Dann kann es nämlich zwei reelle Tangenten aus $P$ an den Kernkegelschnitt des Netzes geben, deren Berührungspunkte offenbar der $C^{(3)}$ angehören, weil Tangente und Normale allemal als ein Axenpaar eines dem Kegelschnitt zugehörigen Strahlsystems anzusehen sind. Der Polare von $P$ im Netze gehört also ein Punktsytem an, dessen Asymptotenpunkte auf der Kurve $C^{(3)}$ liegen. Noch zu erwähnen sind einige besondere Fälle, in denen die betrachtete Kurve dritten Grades zerfällt. Wenn nämlich $P$ insbesondere auf einer Axe des Netzes angenommen wird, z. B. auf $X$, und wir nennen $x$ diese besondere Lage des Punktes $P$, so treffen alle durch $x$ gehenden Strahlen $\mathfrak{A}$ die Axe $X$ in demselben Punkte $x$ und die Perpendikel aus dem konjugirten Punkte $\xi$ des Punktsystems $(x, \xi)$ schneiden jene Strahlen $\mathfrak{A}$ in solchen Punkten $p$, welche auf einem Kreise liegen, der $x\xi$ zum Durchmesser hat; dieser Kreis $\mathfrak{K}_x$ ist ein Theil der Kurve $C^{(3)}$ und der andere ist die Axe $X$ selbst, denn für jeden ihrer Punkte ist die Axe $X$ und die darauf Senkrechte ein Axenpaar des dem Netze zugehörigen Strahlsystems und $X$ geht beständig durch den angenommenen Punkt $x$. Die Kurve dritten Grades zerfällt also in diesem Falle in einen Kreis $\mathfrak{K}_x$ und eine Gerade $X$, die Parabel $P^{(2)}$ zieht sich dabei auf zwei Punkte, den Punkt $\xi$ und den unendlich-entfernten Punkt von $X$ oder auf deren doppelt zu zählende Verbindungslinie zusammen; in ganz analoger Weise zerfällt $C^{(3)}$ in einen Kreis $\mathfrak{K}_y$ und eine Gerade $Y$, falls der angenommene Punkt $P$ auf der Axe $Y$ des Netzes liegt. Wird endlich $P$ insbesondere auf der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_x$ (der dritten Axe $Z$ des Netzes) angenommen, so zerfällt die Kurve

$C^{(3)}$ in diese Gerade selbst und eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$, denn sobald $P$ im Unendlichen liegt, werden sämmtliche durch ihn gehenden Strahlen parallel; suchen wir zu jedem Schnittpunkt $x$ der Geraden $\mathfrak{A}$ mit $X$ den konjugirten Punkt $\xi$ des Punktsystems $(x, \xi)$ und fällen aus ihm ein Perpendikel auf $\mathfrak{A}$, so bleiben auch diese Perpendikel $\mathfrak{B}$ sich beständig parallel, und da $x, \xi$ ein Punktsystem bilden, also projektivische Punktreihen durchlaufen, so beschreiben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei projektivische Strahlbüschel, deren Mittelpunkte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen. Ihr Erzeugniss ist daher eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}_x$ $\mathfrak{K}_y$ $\mathfrak{H}$ gehören den oben erwähnten drei konjugirten Büscheln an, denn es ist ersichtlich, dass die Hyperbel $\mathfrak{H}$ durch die Brennpunkte des Netzes $FF_1$ geht und die Tangenten in ihren unendlich-entfernten Punkten sich in $M$, dem Mittelpunkte des Netzes, schneiden, dieser also zugleich Mittelpunkt von $\mathfrak{H}$ ist. Wir können nun die gewonnenen Resultate folgendermaassen zusammenfassen:

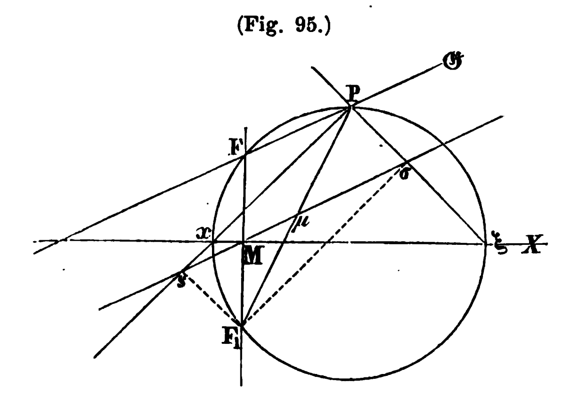
Jede Gerade $\mathfrak{A}$ in der Ebene des Netzes ist Axe für ein bestimmtes dem Netze zugehöriges Strahlsystem; der Mittelpunkt $p$ desselben beschreibt, während $\mathfrak{A}$ sich um einen festen Punkt $P$ dreht, eine bestimmte Kurve dritten Grades $C^{(3)}$, welche $P$ zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat, nämlich die Axen desjenigen Strahlsystems, welches dem Punkte $P$ im Netze zugegehört; die Kurve $C^{(3)}$ geht durch die Brennpunkte des Netzes, durch die Fusspunkte der aus $P$ auf die beiden endlichen Axen des Netzes herabgelassenen Perpendikel, durch den unendlich-entfernten Punkt der Verbindungslinie $PM$, des festen Punktes $P$ mit dem Mittelpunkte $M$ des Netzes, durch die beiden unendlich-entfernten imaginären Kreispunkte und durch die beiden Asymptotenpunkte desjenigen Punktsystems, welches der Polare des Punktes $P$ im Netze zugehört. Insbesondere zerfällt die Kurve $C^{(3)}$, sobald der Punkt $P$ auf einer der drei Axen des Netzes $X, Y, Z$ ($= \mathfrak{G}_\infty$) angenommen wird, und zwar in die jedesmalige Axe und einen Kegelschnitt, welcher für die Axen $X$ und $Y$ je ein Kreis $\mathfrak{K}_x$ und $\mathfrak{K}_y$, für die Axe $Z$ ($= \mathfrak{G}_\infty$) eine gleich-

seitige Hyperbel $\mathfrak{H}$ wird. Die drei Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x \mathfrak{K}_y \mathfrak{H}$ gehören drei konjugirten Kegelschnittbüscheln an (§ 50).

Schliesslich wollen wir noch die Frage beantworten, welchen Ort die Axen der dem Netze zugehörigen Strahlsysteme aller solchen Punkte umhüllen, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ liegen, und brauchen, um die Klasse dieses Ortes zu bestimmen, nur zu untersuchen, wie viele solcher Axen durch einen beliebigen Punkt $P$ des Netzes gehen. Denken wir uns zu diesem Zweck die vorhin betrachtete Kurve $C^{(3)}$, welche dem Punkte $P$ entspricht, konstruirt, so schneidet dieselbe die Gerade $\mathfrak{G}$ im Allgemeinen in drei Punkten, welche offenbar die verlangte Eigenschaft besitzen, dass ihre Verbindungslinien mit $P$ drei Axen solcher Strahlsysteme sind, welche ihnen im Netze zugehören; da durch den beliebig angenommenen Punkt $P$ drei Axen der verlangten Art gehen, so ist der gesuchte Ort eine Kurve dritter Klasse $K^{(3)}$; dieselbe berührt die angenommene Gerade $\mathfrak{G}$ selbst und zwar in demjenigen Punkte $p$, in welchem sie von der zweiten Axe des Strahlsystems getroffen wird, welches die Gerade $\mathfrak{G}$ zu einer Axe hat; denn da $\mathfrak{G}$ Axe eines einzigen bestimmten Strahlsystems im Netze ist, so berührt sie $K^{(3)}$, und durch jeden Punkt von $\mathfrak{G}$ gehen also drei Tangenten, von denen die eine $\mathfrak{G}$ fest bleibt; bewegt sich nun ein veränderlicher Punkt auf $\mathfrak{G}$, so fallen, wenn er nach $p$ gelangt, zwei unendlich-nahe Tangenten zusammen und es ist also $p$ der Berührungspunkt von $\mathfrak{G}$ mit $K^{(3)}$. Tangenten von $K^{(3)}$ sind ferner die beiden endlichen Axen $X$, $Y$ des Netzes und die in den Schnittpunkten derselben mit $\mathfrak{G}$ zu den Axen gezogenen Parallelen; auch die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ berührt $K^{(3)}$. Insbesondere zerfällt diese Kurve, wenn die angenommene Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen der beiden Brennpunkte des Netzes, z. B. $F$, hindurchgeht. In diesem Falle ist nämlich jedes durch $F$ gehende Paar zu einander rechtwinkliger Strahlen ein Axenpaar des Netzes, weil das Strahlsystem für den Brennpunkt $F$ ein Kreissystem ist; die Kurve $K^{(3)}$ zerfällt daher in einen Punkt $F$ und einen Kegelschnitt, nämlich eine Parabel, welche den andern Brennpunkt des Netzes $F_1$ zu ihrem Brennpunkt und die Gerade $\mathfrak{G}$ zur Leitlinie hat. In der That zeigt sich dies in folgender ganz elementaren Weise: Sei $P$ ein beliebiger Punkt der durch $F$ gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ (Fig. 95), so finden wir die Axen des dem Punkte $P$ im Netze zugehörigen Strahlsystems da-

durch, dass wir durch $PFF_1$ einen Kreis legen; derselbe treffe die andere Axe $X$ des Netzes, welche die Brennpunkte nicht ent-

(Fig. 95.)




hält, in den Punkten $x$ und $\xi$; dann sind $Px$ und $P\xi$ die Axen des Strahlsystems für $P$, deren Ort, während $P$ sich auf 𝔖 bewegt, gesucht wird. Da nun $X$ in der Mitte $M$ zwischen $FF_1$ senkrecht darauf steht, so sind in dem Kreise die Winkel $\angle FPx$ und $\angle xPF_1$ einander gleich; ziehen wir durch $M$ eine Parallele zu 𝔖, welche $Px$ und $P\xi$ in $s$ und $\sigma$, $PF_1$ in $\mu$ treffe, so wird also $\angle FPx = \angle Ps\mu = \angle sP\mu$; folglich $\mu s = \mu P$ und, weil das Dreieck $sP\sigma$ bei $P$ rechtwinklig ist, $s\mu = \mu P = \mu\sigma$; ferner ist, weil $M$ die Mitte von $FF_1$, auch $\mu$ die Mitte von $F_1P$ und hieraus folgt, dass $F_1 s$ und $F_1\sigma$ senkrecht stehen auf $Px$ und $P\xi$ und auch auf einander; um nun zu erkennen, wie die Geraden $Px$ und $P\xi$ (oder nur eine von ihnen) sich verändern, wenn $P$ auf der Geraden 𝔖 fortrückt, brauchen wir nur zu bemerken, dass $s$ und $\sigma$ auf der festen Geraden, welche durch $M$ parallel zu 𝔖 gezogen ist, sich bewegen und die auf $F_1 s$ und $F_1\sigma$ errichteten Perpendikel in $s$ und $\sigma$ eben jene Strahlen $Px$ und $P\xi$ sind. Hieraus erkennen wir, dass dieselben eine Parabel umhüllen, welche $F_1$ zum Brennpunkt und 𝔖 zur geraden Leitlinie hat, auch die Axe $X$ des Netzes berührt (§ 36). Verändern wir die Gerade 𝔖, indem wir sie um den Punkt $F$ drehen, so verändert sich auch die entsprechende Parabel, behält aber immer denselben Brennpunkt $F_1$ und die Tangente $X$; ihre Tangenten am Scheitel gehen durch den festen Punkt $M$ und die Scheitel liegen auf einem Kreise, welcher $MF_1$ zum Durchmesser hat.

Das Ergebniss der letzten Betrachtung lässt sich nun folgendermaassen zusammenfassen:

Die Axen der Strahlsysteme im Netze für alle solche Punkte, welche auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ liegen, umhüllen eine Kurve dritter Klasse $K^{(3)}$, welche die Gerade $\mathfrak{G}$ selbst in demjenigen Punkte berührt, für welchen $\mathfrak{G}$ eine Axe des ihm zugehörigen Strahlsystems im Netze ist; die Kurve $K^{(3)}$ berührt auch die drei Axen $X$, $Y$ und $Z$ $(=\mathfrak{G}_\infty)$ des Netzes. Sie zerfällt allemal, sobald $\mathfrak{G}$ durch einen der beiden Brennpunkte des Netzes, z. B. $F$, geht, in diesen Punkt $F$ und eine Parabel, welche den andern Brennpunkt $F_1$ zu ihrem Brennpunkt und die Gerade $\mathfrak{G}$ zu ihrer Leitlinie hat.

Wir bemerken noch, dass die ganze Betrachtung dieses Paragraphen allein abhängt von den drei Axen des Netzes $X$, $Y$ und $Z$ $(=\mathfrak{G}_\infty)$ und den auf ihnen befindlichen Punktsystemen $(x, \xi)$ $(y, \eta)$ $(z, \zeta)$, deren Asymptotenpunkte die Brennpunkte des Netzes sind. Von diesen drei Punktsystemen ist das eine $(z, \zeta)$ auf $\mathfrak{G}_\infty$ ein für alle Mal bekannt, seine Asymptotenpunkte die imaginären unendlich-entfernten Kreispunkte, die beiden andern auf den beiden endlichen Axen des Netzes haben gleiche, aber entgegengesetzte Potenz und nur eines von ihnen ist also hyperbolisch und hat zu seinen Asymptotenpunkten die reellen Brennpunkte $F$ und $F_1$ des Netzes. Durch diese Stücke ist aber das Netz nicht vollkommen bestimmt, sondern es giebt unendlich-viele Netze, welchen dieselben zugehören; diese bilden eine Schaar von confokalen Netzen. Das Netz ist erst völlig bestimmt, sobald wir noch eine Gerade $\mathfrak{L}$ senkrecht auf derjenigen Axe des Netzes $X$, welche die reellen Brennpunkte $FF_1$ enthält, willkührlich als die Polare eines Brennpunktes $F$ annehmen (die Leitlinie für den Brennpunkt $F$). Die Gerade $\mathfrak{L}$ besitzt dabei noch eine einfach-unendliche Willkührlichkeit; der Mittelpunkt des Netzes $M$ theilt die Axe $X$ in zwei unendliche Hälften; trifft die Gerade $\mathfrak{L}$ diejenige Hälfte, welche nicht den Brennpunkt $F$ enthält, so ist das Netz allemal elliptisch, trifft sie die andere Hälfte, so ist es hyperbolisch, und zwar ist alsdann der Kernkegelschnitt Hyperbel, sobald $\mathfrak{L}$ die Axe $X$ zwischen $M$ und $F$ trifft, dagegen Ellipse, sobald $\mathfrak{L}$ diese Hälfte der Axe ausserhalb $MF$ trifft. In der Schaar von konfokalen Netzen ist also ausser der Schaar kon-

fokaler Kegelschnitte (Kernkegelschnitte), welche sich in eine Gruppe Ellipsen und eine Gruppe Hyperbeln trennen (§ 51), noch eine Unendlichkeit von elliptischen Netzen (imaginären Kegelschnitten) enthalten. In der ganzen Schaar von confokalen Netzen ist nun nach der obigen Untersuchung für einen beliebigen Punkt $P$ das Axenpaar des Strahlsystems, welches ihm in jedem der Netze zugehört, allemal dasselbe und es bleiben ebenso die konjugirten Kreisschaaren $(\mathfrak{K}_x)$, $(\mathfrak{K}_y)$ und das konjugirte Büschel gleichseitiger Hyperbeln $(\mathfrak{H})$ ungeändert, sowie auch sämmtliche Parabeln $P^{(2)}$, welche den Punkten $P$ entsprechen und die Kurven $C^{(3)}$ und $K^{(3)}$. Hieraus folgt u. A. nach den oben gefundenen Resultaten der Satz:

Die Berührungspunkte sämmtlicher Tangentenpaare aus einem festen Punkte $P$ an die Kegelschnitte einer confokalen Kegelschnittschaar liegen auf einer Kurve dritten Grades $C^{(3)}$, welche $P$ zum Doppelpunkt und in diesem zwei zu einander rechtwinklige Tangenten hat.

## § 61. Zwei Netze in der Ebene. Netzbüschel und Netzschaar.

Nehmen wir zwei Involutionsnetze in derselben Ebene gelegen an, so entsprechen jedem Punkte $P$ in der Ebene zwei Polaren für das eine und das andere Netz; mögen sich diese beiden Polaren in dem Punkte $Q$ schneiden, dann müssen offenbar auch die beiden Polaren von $Q$ für beide Netze sich in dem Punkte $P$ schneiden; $P$ und $Q$ heissen daher konjugirte Punkte und sind auch in dem früheren Sinne konjugirte Punkte für beide Netze zugleich; zu jedem Punkte $P$ der Ebene gehört also in diesem Sinne ein bestimmter konjugirter Punkt $Q$ und umgekehrt zu $Q$ der konjugirte Punkt $P$. Bewegen wir den Punkt $P$ auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$, so verändert sich der konjugirte Punkt $Q$ auf einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{G}$ ist ein bestimmter Punkt dieses Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ konjugirt. Denn die Polaren der Punkte $P$ auf der Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf das erste Netz laufen durch einen festen Punkt $\pi$ und beschreiben ein Strahlbüschel, welches mit der Punktreihe, die $P$ durchläuft, projektivisch ist. Ebenso beschreiben die Polaren der Punktreihe $(P)$ in Bezug auf das zweite Netz ein

Strahlbüschel $(\pi_1)$, welches mit der Punktreihe $(P)$ projektivisch ist. Die Strahlbüschel $(\pi)$ und $(\pi_1)$ sind daher unter sich projektivisch und je zwei entsprechende Strahlen schneiden sich in demjenigen Punkte $Q$, welcher dem jedesmaligen $P$ konjugirt ist. Der Ort sämmtlicher konjugirten Punkte $Q$ zu den auf der Geraden 𝔊 liegenden Punkten $P$ ist daher das Erzeugniss zweier projektvischer Strahlbüschel, d. h. ein Kegelschnitt 𝔎, der durch die Pole $\pi$ und $\pi_1$ der Geraden 𝔊 rücksichtlich beider gegebenen Netze hindurchgeht. Jeder Geraden 𝔊 in der Ebene gehört hiernach ein bestimmter Kegelschnitt 𝔎 zu, der diejenigen Punkte $Q$ enthält, welche den Punkten $P$ der Geraden 𝔊 rücksichtlich beider gegebenen Netze konjugirt sind. Nehmen wir zwei beliebige Gerade 𝔊 und 𝔊′ an, welche sich in dem Punkte $P_0$ schneiden mögen, so gehören ihnen beziehungsweise zwei bestimmte Kegelschnitte 𝔎 und 𝔎′ zu, welche die konjugirten Punkte von den Punkten jener Geraden enthalten. Die Kegelschnitte 𝔎 und 𝔎′ müssen nothwenig einen reellen, leicht angebbaren Punkt $Q_0$ gemeinschaftlich haben, nämlich denjenigen, welcher dem gemeinschaftlichen Punkte $P_0 = (𝔊, 𝔊')$ konjugirt ist. Sie haben daher noch einen zweiten reellen Punkt $x$, oder noch drei reelle Punkte $xyz$ gemeinschaftlich. Diese besitzen eine besondere Eigenthümlichkeit in Bezug auf die beiden gegebenen Netze. Weil nämlich der Punkt $x$ auf dem Kegelschnitte 𝔎 liegt, so müssen seine beiden Polaren rücksichtlich der beiden gegebenen Netze sich in einem Punkte der Geraden 𝔊 treffen; weil er gleichzeitig auf dem Kegelschnitte 𝔎′ liegt, so müssen seine beiden Polaren sich auch in einem Punkte der Geraden 𝔊′ treffen; in dem Punkte $P_0$, dem einzigen, der 𝔊 und 𝔊′ gemeinschaftlich ist, treffen sie sich aber nicht, denn $x$ ist verschieden von $Q_0$, folglich müssen die beiden Polaren von $x$ für beide Netze zusammenfallen, denn zwei Gerade, die zwei verschiedene Schnittpunkte haben, fallen zusammen. Folglich besitzt der Punkt $x$ und ebenso auch $y$ und $z$ (wenn sie reell sind) die Eigenschaft, dass seine Polare in Bezug auf beide Netze dieselbe Gerade ist. Diese drei Punkte $xyz$ und ihre für beide Netze zusammenfallenden Polaren $XYZ$ hängen nun in gewisser, leicht zu erkennender Weise mit einander zusammen. Sie machen eine besondere Ausnahme von allen übrigen Punkten der Ebene; während nämlich im Allgemeinen jedem Punkte $P$ der Ebene nur ein einziger bestimmter Punkt $Q$ rück-

sichtlich beider Netze konjugirt ist, darf dem Punkte $x$ jeder Punkt von $X$ als konjugirt angesehen werden, weil seine Polaren für beide Netze auf $X$ zusammenfallen und mithin jeder Punkt der beiden zusammenfallenden Geraden als ihr Schnittpunkt gelten kann. Mehr Punkte von solcher Beschaffenheit, als die gefundenen drei: $x\,y\,z$, von denen nothwendig einer, $x$, reell sein muss, kann es überhaupt in der ganzen Ebene nicht geben; denn gäbe es noch einen vierten Punkt $u$, dessen Polare $U$ für beide Netze dieselbe Gerade wäre, so müsste diese $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ in zwei solchen Punkten treffen, deren konjugirte in $u$ zusammenfielen, also beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gemeinschaftlich wären; die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben aber ausser dem schon berücksichtigten Punkte $\mathfrak{Q}_0$ keine anderen Punkte gemeinschaftlich als $x\,y\,z$, wenn sie nicht ganz zusammenfallen. Es giebt daher im Allgemeinen keine Punkte weiter in der Ebene, als $x\,y\,z$, von der Beschaffenheit, dass ihre Polaren $X\,Y\,Z$ in beiden Netzen dieselben Geraden sind. Dies festgestellt, nehmen wir nun den einen immer reellen Punkt $x$ und seine reelle Polare $X$ für beide Netze; der Geraden $X$ gehören dann in den beiden Netzen zwei (im Allgemeinen verschiedene) Punktsysteme zu, welche ein (reelles oder imaginäres) gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte besitzen; ist dasselbe reell, so ist es mit den Punkten $y$ und $z$ identisch, denn dem Punkt $y$ gehört dann in beiden Netzen sowohl der Punkt $z$ als auch der Punkt $x$ zu und $zx$ ist also die Polare $Y$ von $y$ für beide Netze; ebenso $(xy) = Z$ die Polare von $z$ für beide Netze; die Punkte $y$ und $z$ besitzen also die obige Beschaffenheit und müssen mit den noch einzig möglichen der Art identisch sein. Es folgt hieraus, dass die drei Punkte $x\,y\,z$ ein Tripel bilden, welches beiden Netzen gemeinschaftlich ist, und dass ihre Polaren die gegenüberliegenden Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks sind:

$$(yz) = X;\ (zx) = Y;\ (xy) = Z;\ (Y, Z) = x;\ (Z, X) = y;\ (X, Y) = z.$$

Umgekehrt sind $X\,Y\,Z$, von denen nothwendig eines reell sein muss, die einzigen Geraden in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass ihre Pole für beide gegebenen Netze zusammenfallen, und sie bilden ein Tripel konjugirter Strahlen, welches beiden Netzen gemeinschaftlich ist. Dass zwei beliebig gegebene Netze ausser einem Tripel konjugirter Punkte und Strahlen nicht

noch ein Paar Pol und Polare gemeinschaftlich haben können, geht auch daraus hervor, dass das Netz vollständig und eindeutig bestimmt ist durch ein Tripel und ein beliebiges Paar Pol und Polare (§ 57) und zwei Netze, welche diese Stücke gemeinschaftlich haben, identisch sein müssen.

Was die Realität des gemeinschaftlichen Tripels zweier Netze betrifft, so ist, wie wir gesehen haben, einer seiner drei Punkte $x$ und dessen Polare $X$, die Gerade, auf welcher die beiden andern liegen, allemal reell; diese selbst $y$ und $z$ sind stets reell, sobald eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind, weil einer jeden Geraden in Bezug auf ein elliptisches Netz ein elliptisches Punktsystem zugehört und zwei auf einander liegende Punktsysteme allemal ein reelles gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte haben, wenn wenigstens eines von beiden Systemen elliptisch ist; wenn dagegen beide Netze hyperbolisch sind, so können $y$ und $z$ imaginär werden; dies ist aber der Fall zweier reellen Kegelschnitte, welcher in § 53 genau diskutirt ist.

Aus der besonderen den Punkten $x\ y\ z$ allein zukommenden Eigenschaft folgt, dass alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, welche sämmtlichen Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene der beiden Netze entsprechen, durch die drei festen Punkte $xyz$ gehen müssen, denn weil irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ die $X$ in einem Punkte trifft, dessen konjugirter rücksichtlich beider Netze $x$ ist, muss der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch $x$ gehen u. s. f. Auch umgekehrt wird irgend ein durch die Punkte $x\ y\ z$ gelegter Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die Eigenschaft besitzen, dass alle Punkte der Ebene, welche seinen Punkten konjugirt sind, auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen (eigentlich auf einer Kurve vierten Grades, welche sich in vier Gerade auflöst, von denen drei allemal $X\ Y\ Z$ sind). Dies lässt sich sehr einfach umgekehrt nachweisen: Nehmen wir zwei beliebige Punkte $Q'\ Q''$ des dem Dreieck $x\ y\ z$ umschriebenen Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ und seien deren konjugirte Punkte $P'$ und $P''$, so hat die Verbindungslinie $P'\ P''$, als Gerade $\mathfrak{G}$ aufgefasst, sämmtliche Punkte $Q$, welche ihren Punkten $P$ konjugirt sind, auf dem durch die fünf Punkte $Q'\ Q''\ x\ y\ z$ eindeutig bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ und es liegen also auch umgekehrt diejenigen Punkte, welche den Punkten des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ konjugirt sind, auf der Geraden $\mathfrak{G}$.

Durch die beiden in der Ebene gegebenen Netze ist nicht allein das eben angedeutete Beziehungssystem hergestellt, wonach

jedem Punkte $P$ ein bestimmter Punkt $Q$ konjugirt ist und jeder Geraden 𝔊 in der Ebene ein durch drei feste Punkte $xyz$ gehender Kegelschnitt 𝔎 entspricht, sondern auch zugleich das polare Verhalten, wonach jeder Geraden eine Gerade und jedem Punkte ein dem festen Dreiseit $XYZ$ einbeschriebener Kegelschnitt entspricht, denn eine beliebige Gerade 𝔊 hat zu Polen in den beiden Netzen zwei Punkte $\pi$ und $\pi_1$, deren Verbindungslinie 𝔋 die Eigenschaft besitzt, dass ihre Pole für beide Netze wiederum auf 𝔊 liegen; 𝔊 und 𝔋 heissen daher konjugirte Gerade, und wenn 𝔊 sich um einen festen Punkt $P$ dreht, so beschreibt 𝔋 einen Kegelschnitt 𝔈, welcher dem festen Dreiseit $XYZ$ einbeschrieben ist. Das Ergebniss der bisherigen Untersuchung kann nun folgendermaassen zusammengefasst werden:

Sind zwei Netze in der Ebene gegeben, so schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes $P$ in Bezug auf beide Netze in dem konjugirten Punkte $Q$, dessen Polaren sich wiederum in $P$ treffen. Bewegt sich der Punkt $P$ auf einer beliebigen Geraden 𝔊, so durchläuft der konjugirte Punkt $Q$ einen bestimmten Kegelschnitt 𝔎. Sämmtliche Kegelschnitte 𝔎 laufen durch drei feste Punkte $xyz$. Diese bilden ein beiden Netzen gemeinschaftliches Tripel konjugirter Punkte; ihre Polaren sind:

$$X = (yz); \quad Y = (zx); \quad Z = (xy).$$

Die Punkte $xyz$ sind die einzigen in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass für sie die Polaren rücksichtlich beider Netze zusammenfallen. Die drei Punkte $xyz$ sind allemal reell, sobald beide oder eines der beiden gegebenen Netze elliptisch ist; sind beide Netze hyperbolisch, so können zwei Tripelpunkte $yz$ imaginär sein, während der dritte $x$ und seine Polare $X$ immer reell ist (§ 53); die der Geraden $X$ rücksichtlich beider Netze zugehörigen Punktsysteme haben als gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte $y$ und $z$. Anderseits gehören einer beliebigen Geraden 𝔊 in der Ebene rücksichtlich beider Netze zwei Pole zu, deren Verbindungslinie 𝔋 die konjugirte Gerade zu 𝔊 heisst, weil die Verbindungslinie ihrer Pole wiederum 𝔊 ist. Dreht sich 𝔊 um einen festen Punkt $P$,

so **umhüllt 𝔖 einen bestimmten Kegelschnitt 𝔈. Sämmtliche Kegelschnitte 𝔈 berühren drei feste Gerade $XYZ$, welche das beiden Netzen gemeinschaftliche Tripel konjugirter Strahlen bilden und die einzigen Geraden von solcher Beschaffenheit sind, dass ihre Pole rücksichtlich beider Netze zusammenfallen. Das Tripel $XYZ$ coïncidirt mit dem Tripel $xyz$.**

Es ist nicht ohne Interesse, insbesondere solche Lagen der Geraden 𝔊 aufzusuchen, für welche der zugehörige Kegelschnitt 𝔎 eine Parabel, gleichseitige Hyperbel, ein Kreis oder Linienpaar wird. Geht die Gerade 𝔊 in die Unendlichkeit, wird also $\mathfrak{G}_\infty$, so geht der Kegelschnitt 𝔎 in einen besonderen Kegelschnitt 𝔐 über, welcher die Mittelpunkte $m\,m_1$ beider Netze und das gemeinschaftliche Tripel $xyz$ enthält und durch diese fünf Punkte vollständig bestimmt ist. Der Kegelschnitt 𝔐 enthält diejenigen Punkte, welche sämmtlichen unendlich-entfernten Punkten rücksichtlich beider Netze konjugirt sind, und umgekehrt liegen die den Punkten des Kegelschnitts 𝔐 konjugirten Punkte im Unendlichen; er entscheidet also über die Natur des Kegelschnitts 𝔎. Jeder Geraden 𝔊, welche den Kegelschnitt 𝔐 in zwei reellen Punkten trifft, entspricht als Kegelschnitt 𝔎 eine Hyperbel, jeder Geraden 𝔊, welche 𝔐 nicht trifft, eine Ellipse und allen Geraden 𝔊, welche 𝔐 berühren, Parabeln; den sämmtlichen Tangenten des Kegelschnitts 𝔐 entsprechen also Kegelschnitte 𝔎, welche sämmtlich Parabeln sind, und auch umgekehrt sämmtlichen Parabeln, die dem Dreieck $x\,y\,z$ umschrieben sind, Gerade 𝔊, welche den Kegelschnitt 𝔐 umhüllen. Um zweitens eine solche Gerade 𝔊 zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt 𝔎 eine gleichseitige Hyperbel wird, nehmen wir auf $\mathfrak{G}_\infty$ zwei solche Punkte, die in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, $z$ und $\zeta$; alle solche Punktenpaare bilden auf $\mathfrak{G}_\infty$ das bekannte Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte die beiden imaginären unendlich-entfernten Kreispunkte sind. Das Punktenpaar $z$, $\zeta$ hat zu Polaren im ersten Netz zwei bestimmte durch den Mittelpunkt $m$ gehende Strahlen, welche bei der Veränderung von $z$, $\zeta$ ein bestimmtes Strahlsystem beschreiben; in der That, da $z$ und $\zeta$ konjugirte Punkte eines Punktsystems sind, so beschreiben ihre Polaren projektivische Strahlbüschel, die auf einander liegen und bei denen, wie leicht zu sehen ist, entsprechende gleiche Winkel verkehrt

auf einander fallen (§ 17); sie konstituiren also ein Strahlsystem; je zwei konjugirte Strahlen desselben treffen nun den Kegelschnitt 𝔐 in zwei solchen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt $P_0$ läuft (§ 31), und derselbe Punkt würde natürlich resultiren, wenn wir die Polaren von $z$, $\zeta$ in Bezug auf das zweite Netz zu Hülfe nehmen. Hiernach lässt sich der Punkt $P_0$ in leichter Weise finden: Die Axen des ersten Netzes durchbohren den Kegelschnitt 𝔐 nur noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie bestimmt wird; ebenso liefern die Axen des zweiten Netzes eine Durchbohrungssehne in 𝔐 und der Schnittpunkt dieser beiden Durchbohrungssehnen ist der gesuchte Punkt $P_0$; jede durch $P_0$ gehende Gerade trifft den Kegelschnitt 𝔐 in zwei solchen Punkten, deren konjugirte im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen; einer solchen Geraden entspricht allemal eine gleichseitige Hyperbel als Kegelschnitt 𝔎. Es giebt daher unendlich-viele Gerade 𝔊, deren entsprechende Kegelschnitte 𝔎 gleichseitige Hyperbeln werden; dieselben gehen durch einen festen Punkt $P_0$, dessen Konstruktion oben angegeben ist. Der konjugirte Punkt $Q_0$ zu $P_0$ muss der Höhenpunkt des Dreiecks $xyz$ sein, weil alle gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind, zugleich durch den Höhenpunkt desselben gehen (§ 38), woraus eine neue einfache Konstruktion von $P_0$ sich ergiebt. Hiernach wird es auch möglich, eine solche Gerade 𝔊 zu finden, deren entsprechender Kegelschnitt 𝔎 ein Kreis wird. Seien nämlich $t$ und $\tau$ zwei solche Punkte auf dem Kegelschnitt 𝔐, deren konjugirte $z$ und $\zeta$ unendlich-entfernt in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, oder $t\tau$ irgend eine durch $P_0$ gehende Sehne des Kegelschnitts 𝔐, so entsprechen den beiden Tangenten in $t$ und $\tau$ am Kegelschnitt 𝔐 zwei Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte in zwei rechtwinkligen Richtungen liegen. Diese beiden Parabeln, welche durch $xyz$ gehen, haben als vierten gemeinschaftlichen Punkt einen solchen, der nothwendig mit $xyz$ auf einem Kreise liegt (§ 38), und der konjugirte Punkt zu diesem rücksichtlich der beiden Netze ist der Schnittpunkt der beiden Tangenten in $t$ und $\tau$ am Kegelschnitte 𝔐. Dieser liegt auf der Polare des Punktes $P_0$ und jeder Punkt dieser Polare $𝔊_0$ des Punktes $P_0$ in Bezug auf den Kegelschnitt 𝔐 besitzt umgekehrt die Eigenschaft, dass sein konjugirter auf dem dem Dreieck $xyz$ umschriebenen Kreise liegt.

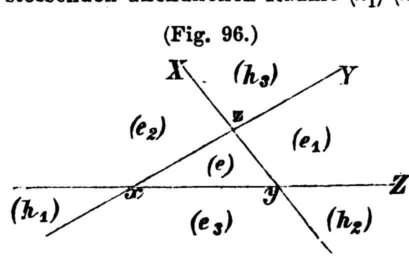
Es giebt also nur eine einzige bestimmte Gerade $\mathfrak{G}_0$ in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass der ihr entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ein Kreis wird, und diese besondere Gerade $\mathfrak{G}_0$ ist die Polare des vorhin ermittelten Punktes $P_0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}$.

Suchen wir endlich solche Gerade $\mathfrak{G}$ in der Ebene auf, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in Linienpaare zerfallen; den Punkten einer derartigen Geraden müssen in den beiden gegebenen Netzen zwei Strahlbüschel von Polaren $(\pi)$ und $(\pi_1)$ zugehören, welche perspektivisch liegen, also in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte zwei entsprechende Strahlen vereinigt haben; eine derartige Gerade $\mathfrak{G}$ muss daher nothwendig einen solchen Punkt enthalten, dessen Polaren im Netze zusammenfallen; es giebt in der ganzen Ebene nur drei Punkte der Art $x\,y\,z$; der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ kann mithin nur dann in ein Linienpaar zerfallen, wenn die Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen der drei Eckpunkte des gemeinschaftlichen Tripels hindurchgeht, und umgekehrt: Sobald die Gerade $\mathfrak{G}$ durch einen Punkt des gemeinschaftlichen Tripels, z. B. $x$ hindurchgeht, zerfällt der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in ein Linienpaar, dessen einer Theil die Gerade $X$ ist; suchen wir den andern Theil desselben auf; dieser muss eine Gerade $\mathfrak{g}$ sein, welche durch $x$ geht, denn demjenigen Punkte von $\mathfrak{G}$, welcher zugleich in $X$ liegt, entspricht als konjugirter Punkt $x$. Die Gerade $\mathfrak{g}$ ist also bestimmt, sobald wir nur irgend einen Punkt der durch $x$ gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ kennen, indem sein konjugirter mit $x$ verbunden den Strahl $\mathfrak{g}$ liefert. Wenn wir die Gerade $\mathfrak{G}$ um $x$ drehen, so verändert sich auch $\mathfrak{g}$, indem es sich um $x$ dreht; es ist leicht zu erkennen, dass $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ konjugirte Strahlen eines bestimmten neuen Strahlsystems sind, dessen Mittelpunkt $x$ ist, oder: Wenn wir einen beliebigen Punkt $P$ und seinen konjugirten Punkt $Q$ mit $x$ verbinden, so sind allemal $xP = \mathfrak{G}$ und $xQ = \mathfrak{g}$ zwei konjugirte Strahlen eines bestimmten Strahlsystems $(x)$; in der That, wir haben nur nöthig, $P$ auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{H}$ zu bewegen, so, dass also $Q$ den ihr entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durchläuft, welcher durch $x$ ($y$ und $z$) geht und von zwei projektivischen Strahlbüscheln $(\pi)$ und $(\pi_1)$ erzeugt wird, die zugleich mit der von $P$ durchlaufenen Punktreihe projektivisch sind; da $x$ auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegt, so beschreibt auch $xQ$ ein mit $\pi Q$ oder $\pi_1 Q$, also auch mit $xP$ projektivisches Strahlbüschel; es

beschreiben also $xP$ und $xQ$ zwei auf einander liegende projektivische Strahlbüschel; dieselben erzeugen nun ein Strahlsystem, weil sowohl der konjugirte Punkt zu $P$ : $Q$ ist, als auch der konjugirte Punkt zu $Q$ : $P$ (§ 17). Dieses bestimmte Strahlsystem $(x)$, welches von dem Strahlenpaar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$ erzeugt wird, hat auch die durch $x$ gehenden beiden Geraden $Y$ und $Z$ zu einem Paar konjugirter Strahlen, denn sobald für $P$ irgend ein Punkt auf $Y$ genommen wird, ist sein konjugirter allemal $y$, mithin $Y$ und $(xy) = Z$ ein Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(x)$. In ganz gleicher Weise erhalten wir zwei Strahlsysteme $(y)$ und $(z)$, deren Mittelpunkte $y$ und $z$ sind und für welche wir immer zwei konjugirte Strahlen erhalten, indem wir ihren Mittelpunkt mit irgend einem Paar konjugirter Punkte $P$ und $Q$ in der Ebene verbinden. Die drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ hängen in der Weise von einander ab, dass durch zwei von ihnen das dritte mitbestimmt ist, denn sobald das gemeinschaftliche Tripel $xyz$ beider gegebenen Netze und irgend ein Paar konjugirter Punkte $P$ und $Q$ für dieselben bekannt sind, sind auch die drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ vollständig bekannt, weil je zwei Seiten des Tripeldreiecks und die von einer Ecke nach $P$ und $Q$ hingehenden Strahlen allemal zwei Paare konjugirter Strahlen eines solchen Strahlsystems sind, welches durch diese beiden Paare vollständig bestimmt wird. Sobald wir nun in zweien dieser Strahlsysteme, z. B. $(x)$ und $(y)$, ausser den selbstverständlichen Paaren $Y$, $Z$ und $Z$, $X$ noch je ein Paar konjugirter Strahlen kennen, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ in $(x)$, $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{g}'$ in $(y)$, sind die Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}') = P$ und $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}') = Q$ allemal konjugirte Punkte und geben mit $z$ verbunden zwei konjugirte Strahlen des dritten Strahlsystems $(z)$, welches dadurch vollständig bestimmt wird; [auch die Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, \mathfrak{g}') = P'$ und $(\mathfrak{G}', \mathfrak{g}) = Q'$ sind natürlich konjugirte Punkte und wir erhalten daher zugleich ein zweites Paar konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(z)$]. Wir können den gegenseitigen Zusammenhang der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ auch so aussprechen: Wenn wir irgend drei Strahlen dieser drei Systeme $(x)$ $(y)$ $(z)$ durch einen Punkt $P$ ziehen, so treffen sich die konjugirten Strahlen zu ihnen allemal wieder in einem Punkte $Q$, welcher der konjugirte Punkt zu $P$ ist in Bezug auf die beiden gegebenen Netze. Hieraus können wir auf die besondere Natur dieser drei Strahlsysteme schliessen und erkennen, dass, sobald das gemeinschaftliche Tripel

$xyz$ reell ist, von den drei Systemen entweder 1) alle hyperbolisch oder 2) eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen. Die Seiten $XYZ$ des Tripeldreiecks theilen nämlich die ganze unendliche Ebene in sieben Räume (Fig. 96), von denen, wie schon früher bemerkt (§ 38), einer, der endliche Dreiecksraum $(e)$, und die drei den Seiten anliegenden unendlichen Räume $(e_1)$ $(e_2)$ $(e_3)$ die elliptischen, die drei an die Ecken anstossenden unendlichen Räume $(h_1)$ $(h_2)$ $(h_3)$ aber die hyperbolischen Räume genannt werden; je nachdem nun das eine Paar konjugirter Punkte $P$ und $Q$, welches zur Bestimmung der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ ausreicht, in diesen Räumen gelegen ist, wird sich nach dem bekannten Kriterium (§ 17) sofort entscheiden lassen, ob die Strahlsysteme hyperbolisch oder elliptisch sind, und hiernach ergiebt sich folgende Tabelle, welche alle möglichen Fälle enthält: Bedeuten nämlich 𝔢 = elliptisch und 𝔥 = hyperbolisch, und drei neben einander gestellte Buchstaben, z. B. 𝔢𝔥𝔢, den Charakter der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ in dieser Reihenfolge, so haben wir:

(Fig. 96.)




Liegt $P$ in dem Raume:

| Liegt $Q$ in dem Raume: | $(e)$ | $(e_1)$ | $(e_2)$ | $(e_3)$ | $(h_1)$ | $(h_2)$ | $(h_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(e)$ | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 |
| $(e_1)$ | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 |
| $(e_2)$ | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 |
| $(e_3)$ | 𝔠𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 |
| $(h_1)$ | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 |
| $(h_2)$ | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔥𝔢𝔢 |
| $(h_3)$ | 𝔢𝔢𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 | 𝔢𝔥𝔢 | 𝔥𝔢𝔢 | 𝔥𝔥𝔥 |

Es treten also überhaupt nur zwei verschiedene Fälle ein: entweder sind alle drei Strahlsysteme hyperbolisch oder eines

hyperbolisch und die beiden andern elliptisch und zwar tritt der letzte Fall ungefähr dreimal so oft ein, als der erstere (strenge in dem Verhältniss von 36 : 13). Ferner erkennen wir aus dem obigen Schema, dass der Fall dreier hyperbolischer Strahlsysteme $(x)$ $y)$ $(z)$ nur dann eintritt, wenn die beiden konjugirten Punkte $P$, $Q$ entweder beide in demselben Raume von jenen sieben oder gleichzeitig in einem Paar von Räumen: $e_1$ und $h_1$ | $e_2$ und $h_2$ | $e_3$ und $h_3$ | enthalten sind; für jede andere Lage tritt der zweite Fall ein, dass eines der drei Strahlsysteme hyperbolisch, die beiden andern elliptisch sind. Hieraus folgt ferner, dass, wenn eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind (der Kernkegelschnitt imaginär), allemal nur der zweite Fall eintreten kann, indem von den Strahlsystemen $(x)$ $(y)$ $(z)$ eines hyperbolisch, die beiden andern elliptisch werden. Wir erkennen dies nämlich sofort, wenn wir uns des Kriteriums für das elliptische Netz erinnern (§ 56): Sobald auf zwei konjugirten Strahlen die beiden dem Netze zugehörigen Punktsysteme elliptisch sind, ist das Netz elliptisch. Wir haben nun das den beiden Netzen gemeinschaftliche Tripel $xyz$, dessen Seiten konjugirte Strahlen sind und welches in dem Falle reell ist, wo eines oder beide Netze elliptisch sind. Die Ebene wird durch die Seiten $XYZ$ des Tripeldreiecks in sieben Regionen $e e_1 e_2 e_3 h_1 h_2 h_3$ getheilt; nehmen wir in dem Raume $(e)$ einen beliebigen Punkt $P$, so treffen $Py$ und $Pz$ resp. die Geraden $Y$ und $Z$ zwischen den Punkten $xz$ und $xy$; soll das Netz elliptisch sein, so muss also die Polare von $P$ die Seiten $xz$ und $xy$ in ihren Verlängerungen treffen, d. h. sie darf in die Region $(e)$ nicht eintreten; wo also auch der Punkt $Q$ auf dieser Polare angenommen werden mag, er kann nicht in $(e)$ liegen, also kann nach dem obigen Schema der Fall $\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}$ nicht eintreten. Nehmen wir zweitens $P$ in der Region $(e_1)$ an, so muss seine Polare, wenn das Netz elliptisch sein soll, $xz$ und $xy$ zwischen diesen Eckpunkten des Tripels treffen; sie darf also in die Regionen $(e_1)$ und $(h_1)$ nicht eintreten und es kann daher wiederum nach unserm Schema der Fall $\mathfrak{h}\mathfrak{h}\mathfrak{h}$ nicht stattfinden; dasselbe gilt, wenn $P$ in der Region $(h_1)$ angenommen wird, und in gleicher Weise erkennen wir es für die Regionen $(e_2)$ und $(h_2)$, $(e_3)$ und $(h_3)$. Es ist also klar, dass, wofern wenigstens eines der beiden gegebenen Netze elliptisch ist, allemal von den drei Strahlsystemen $(x)$ $(y)$ $(z)$ eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen. Wenn

beide Netze hyperbolisch sind und von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Eckpunkt $x$ reell, die beiden andern $y$ und $z$ auf $X$ imaginär sind, so lässt sich erkennen, dass das Strahlsystem $(x)$ nothwendig hyperbolisch sein muss. Lassen wir nämlich einen veränderlichen Punkt $P$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ durchlaufen und verfolgen den konjugirten Punkt $Q$ auf dem entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch $x$ geht, so beschreiben $xP$ und $xQ$ das Strahlsystem $(x)$ und je zwei konjugirte Strahlen desselben durchbohren den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in Punktenpaaren, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt $\mathfrak{x}$ laufen muss (§ 31); trifft nun $xP$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zum andern Male in $Q'$, so ist $QQ'$ eine solche Durchbohrungssehne; anderseits hat aber der Punkt $Q'$ zu seinem konjugirten einen Punkt $P'$, welcher nothwendig auf $\mathfrak{G}$ liegen muss (weil $Q'$ auf $\mathfrak{K}$ liegt) und zugleich auf dem zu $xQ' \equiv xP$ konjugirten Strahl des Systems $(x)$, d. h. auf $xQ$; also ist $P'$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{G}$ mit $xQ$; wir haben nunmehr zwei Paare konjugirter Punkte rücksichtlich beider Netze: $P$ und $Q$, $P'$ und $Q'$ und finden vermittelst derselben unmittelbar ein drittes Paar: $(PP', QQ')$ und $(PQ', P'Q)$ (§ 55); nun ist aber $(PQ', P'Q)$ nichts anderes als der Punkt $x$, folglich muss sein konjugirter $(PP', QQ')$ auf $X$ liegen und, da $PP' \equiv \mathfrak{G}$ ist, der Schnittpunkt $(\mathfrak{G}, X)$ sein; dieser Punkt bleibt fest, während $P$ und $Q$ sich verändern auf $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$; es läuft also die Durchbohrungssehne $QQ'$ durch den festen Punkt $\mathfrak{x} \equiv (\mathfrak{G}, X)$, woraus sich nachträglich eine Bestätigung ergiebt, dass $xP$ und $xQ$ das Strahlsystem erzeugen. Wenn nun die Punkte $y$ und $z$ oder die Schnittpunkte der Geraden $X$ mit dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ imaginär sind, so muss $X$ ausserhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ (d. h. ganz in dem von seinen Tangenten erfüllten Gebiete) gelegen sein oder durch jeden Punkt von $X$ müssen zwei reelle Tangenten von $\mathfrak{K}$ möglich sein und mithin auch durch den Punkt $\mathfrak{x}$; das Strahlsystem $(x)$ ist daher hyperbolisch, indem seine Asymptoten die aus $x$ nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen sind, in welchen die Tangenten aus $\mathfrak{x}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ berühren.

Die Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ haben eine ganz besondere Bedeutung für die beiden in der Ebene gegebenen Netze. Da nämlich irgend zwei konjugirte Strahlen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ des Strahlsystems $(x)$ nach dem Obigen von solcher Beschaffenheit sind, dass zu den Punkten $P$ des einen die konjugirten Punkte $Q$ auf dem an-

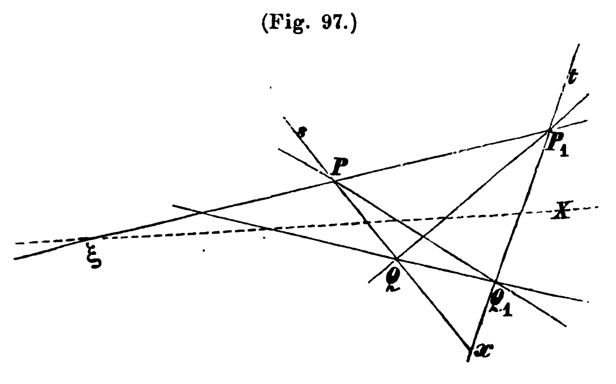
dern liegen und $P, Q$ immer konjugirte Punkte rücksichtlich beider gegebenen Netze sind, so folgt, dass, wenn das Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch ist, jede seiner Asymptoten $s$, $t$ die Eigenschaft besitzen muss, dass ihr rücksichtlich beider Netze dasselbe Punktsystem zugehört oder mit andern Worten, dass sie eine gemeinschaftliche Sekante für die Kernkegelschnitte beider Netze ist; denn eine solche Asymptote enthält zwei zusammenfallende konjugirte Strahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$ und die Punkte $P$ der einen haben ihre konjugirten $Q$ rücksichtlich beider Netze auf der andern; also $P, Q$ bilden auf dieser Asymptote ein Punktsystem, welches beiden Netzen zugehört. Nehmen wir den Fall an, dass zwei Strahlsysteme $(x)$ und $(y)$ hyperbolisch seien und das erste die Asymptoten $s$, $t$, das zweite die Asymptoten $s_1$, $t_1$ habe, dann wird der Schnittpunkt $S$ zweier Asymptoten, z. B. $s$ und $s_1$, seinen konjugirten rücksichtlich beider Netze sowohl in $s$ haben, als auch in $s_1$; folglich muss dieser $S$ selbst sein; es fallen also in $S$ zwei konjugirte Punkte $P, Q$ zusammen, und es muss daher auch $zS$ eine Asymptote des Strahlsystems $(z)$ sein, was mit der vorhin gemachten Bemerkung übereinstimmt, dass die drei Punktsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ entweder sämmtlich hyperbolisch oder nur eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen. Schneiden sich $t$ und $t_1$ in dem Punkte $S_1$, so ist $zS_1$ die zweite Asymptote des Strahlsystems $(z)$; da aber ein Strahlsystem nur zwei Asymptoten haben kann, so müssen in diesen auch die Schnittpunkte:

$$(s, t_1) = S_2 \quad \text{und} \quad (s_1, t) = S_3$$

liegen, oder: die sechs Asymptoten der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ schneiden sich, wenn sie reell sind, zu je dreien in vier Punkten $S\, S_1\, S_2\, S_3$, deren jeder die Eigenschaft besitzt, dass er mit seinem konjugirten rücksichtlich beider Netze zusammenfällt. Diese vier Punkte sind offenbar zugleich die Asymptotenpunkte der Punktsysteme auf denjenigen sechs Geraden, welche von den Asymptoten der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ gebildet werden und deren zugehörige Punktsysteme rücksichtlich beider Netze identisch sind. Die Punkte $SS_1S_2S_3$ sind daher gemeinschaftlich den Kernkegelschnitten beider Netze oder deren Schnittpunkte und das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $SS_1S_2S_3$ ist das gemeinschaftliche Tripel $xyz$. Dies stimmt mit der oben gemachten Bemerkung überein, dass sie nur reell sein können, wenn beide Netze hyperbolisch sind, weil nur in diesem Fall drei

hyperbolische Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ eintreten können; aber nicht für jede zwei hyperbolischen Netze (reelle Kegelschnitte) müssen die Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ alle drei hyperbolisch sein; die Untersuchung dieses reellen Falles ist in § 53 durchgeführt worden. Hier zeigt sich indessen der bemerkenswerthe Umstand, dass auch zwei elliptische Netze (imaginäre Kegelschnitte) allemal ein reelles Paar gemeinschaftlicher Sekanten, d. h. zwei solche sich in $x$ schneidende Gerade (die Asymptoten $s$, $t$ des Strahlsystems $(x)$) besitzen, deren zugehörige Punktsysteme für die Netze identisch sind. Diese beiden Punktsysteme müssen immer elliptisch sein, sobald eines oder beide gegebenen Netze elliptisch sind, sie können aber auch beide elliptisch sein, sobald beide Netze hyperbolisch sind; im letzteren Fall kann indessen auch eines elliptisch und das andere hyperbolisch oder beide hyperbolisch sein, d. h. die Kernkegelschnitte können keinen, zwei oder vier Punkte gemein haben (§ 53). Gehen wir von einem stets reellen Tripelpunkte $x$, dessen Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch ist und die Asymptoten $s$, $t$ hat, aus, so können wir aus der Annahme, dass von den Punktsystemen auf $s$ und $t$ 1) beide elliptisch, 2) eines elliptisch und das andere hyperbolisch, 3) beide hyperbolisch sind, auf die Realität der beiden übrigen Tripelpunkte $y$, $z$ auf $X$ schliessen; nehmen wir nämlich von dem beiden Netzen gleichzeitig zugehörigen Punktsystem auf $s$ irgend ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ und auf der andern Asymptote $t$ irgend ein Paar $P_1 Q_1$ (Fig. 97), so können wir die Verbindungslinie

(Fig. 97.)

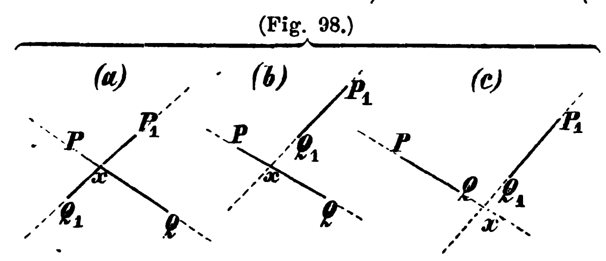



$PP_1$ als 𝔖 auffassen, deren entsprechender Kegelschnitt 𝔎 durch $xQQ_1$ gehen muss und zum Schnittpunkte der Tangenten in $Q$ und $Q_1$

den Punkt $\mathfrak{x}$ haben wird, in welchem $PP_1 = \mathfrak{G}$ der Polare $X$ begegnet, wie aus dem Obigen erhellt; $X$ trifft also $PP_1$ in dem Pol der Geraden $QQ_1$ rücksichtlich des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, oder $PP_1$ und $QQ_1$ treffen $X$ in zwei konjugirten Punkten desjenigen Punktsystems, welches der Geraden $X$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zugehört; dies ist nun, wie wir wissen, für alle möglichen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ immer ein und dasselbe; seine Asymptotenpunkte sind die beiden übrigen Tripelpunkte $y$ und $z$; ein zweites Paar konjugirter Punkte dieses Punktsystems erhalten wir in ganz gleicher Weise, indem wir die Schnittpunkte von $PQ_1$ und $QP_1$ mit $X$ bestimmen, und hieraus folgt denn auch ein drittes Paar nach der bekannten Eigenschaft des vollständigen Vierecks (§ 18), nämlich die Schnittpunkte von $PQ$ und $P_1Q_1$ mit $X$. Die drei Seitenpaare des vollständigen Vierecks $PQP_1Q_1$ treffen demnach die Gerade $X$ in drei Paaren konjugirter Punkte desjenigen Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $y$, $z$ sind, und dies ist immer dasselbe, wie übrigens die Paare $P$, $Q$ und $P_1$, $Q_1$ auf den Asymptoten $s$ und $t$ gewählt werden. Um nun zu entscheiden, ob das Punktsystem auf $X$ hyperbolisch oder elliptisch wird, haben wir nur das bekannte Kriterium (§ 18) anzuwenden, wonach das von den Seitenpaaren eines vollständigen Vierecks auf einer Transversale $X$ bestimmte Punktsystem hyperbolisch ist, sobald eine gerade Anzahl, elliptisch, sobald eine ungerade Anzahl von Ecken zu beiden Seiten der Transversale liegt, oder umgekehrt, je nachdem die vier Ecken so liegen, dass jede ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich findet oder eine innerhalb des von den andern gebildeten Dreiecks gelegen ist. Die beiden Punktsysteme auf den Geraden $s$ und $t$ werden nun durch je zwei Paare konjugirter Punkte bestimmt, von denen das eine auf $s$: $P$, $Q$ auf $t$: $P_1$, $Q_1$, das andere aber der gemeinschaftliche Punkt $x$ und der jeweilige Schnittpunkt mit $X$; beim elliptischen Punktsystem muss von zwei Paaren konjugirter Punkte das eine durch das andere getrennt werden, beim hyperbolischen schliesst das eine Paar das andere ein oder aus, je nachdem beide Paare denselben oder verschiedene Asymptotenpunkte zwischen sich enthalten. Der Punkt $x$ ist ein Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks $PQP_1Q_1$, nämlich der Schnittpunkt des Seitenpaars $PQ$ und $P_1Q_1$; sollen also die genannten Punktsysteme beide elliptisch sein, so lehrt die unmittelbare An-

schauung, dass von den vier Punkten $PQP_1Q_1$ eine gerade oder ungerade Anzahl auf beiden Seiten von $X$ liegen muss, je nach der Lage derselben; es können nämlich hinsichtlich der Lage der vier Punkte $PQP_1Q_1$ zu $x$ drei Fälle eintreten: entweder a) liegt $x$ innerhalb beider Strecken $PQ$ und $P_1Q_1$, oder b) zwischen der einen und ausserhalb der andern oder c) ausserhalb beider (Fig. 98).

(Fig. 98.)




In dem Falle a) wird, damit beide Punktsysteme auf $s$ und $t$ elliptisch seien, $X$ ausserhalb $PQ$ und ausserhalb $P_1Q_1$ die Geraden $s$ und $t$ treffen müssen, also nothwendig alle vier Punkte $PQP_1Q_1$ auf der einen und keinen auf der andern Seite von sich haben; in dem Falle b) wenn $x$ zwischen $PQ$ und ausserhalb $P_1Q_1$ angenommen wird, muss, damit beide Punktsysteme elliptisch seien, $X$ die Strecke $PQ$ ausserhalb und $P_1Q_1$ innerhalb treffen, also eine ungerade Anzahl von Punkten zu beiden Seiten von sich haben; dann ist aber das Punktsystem auf $X$ wiederum hyperbolisch, weil $PQP_1Q_1$ so liegen, dass einer innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks sich befindet; in dem Falle c) endlich, wo $x$ ausserhalb beider Strecken $PQ$ und $P_1Q_1$ liegt, also die vier Punkte so gelegen sind, dass jeder ausserhalb des von den andern gebildeten Dreiecks sich findet, muss, damit beide Punktsysteme elliptisch seien, $X$ sowohl $PQ$, als auch $P_1Q_1$ zwischen diesen Punkten treffen, also zwei Punkte auf der einen und zwei auf der andern Seite von sich haben; das Punktsystem auf $X$ ist daher wiederum hyperbolisch und wir erkennen daraus, dass es allemal hyperbolisch wird, sobald die Punktsysteme auf $s$ und $t$ beide elliptisch sind. Die Punkte $y$ und $z$ sind also in diesem Fall reell. In ganz ähnlicher Weise können wir leicht einsehen, dass, wenn die Punktsysteme auf $s$ und $t$ beide hyperbolisch sind, ebenfalls für alle drei Lagen a), b), c) das Punktsystem auf $X$ hyperbolisch wird, also $y$ und $z$ ebenfalls reell sind, was auch von vorn herein klar ist, weil dann alle vier

Punkte $S S_1 S_2 S_3$ reell sind und $xyz$ zum Diagonaldreieck haben. Wenn dagegen drittens von den Punktsystemen auf $s$ und $t$ eines hyperbolisch, das andere elliptisch ist, so wird für alle drei Lagen a), b), c) das Punktsystem auf $X$ elliptisch, also $y$ und $z$ imaginär, wie die unmittelbare Anschauung lehrt, während von den vier Punkten $S S_1 S_2 S_3$ nur zwei reell, die beiden andern imaginär sind. Die eben ausgeführte Betrachtung kommt auch mit der in § 41 bei einer anderen Veranlassung angestellten überein. Die erlangten Resultate lassen sich nunmehr in folgender Weise zusammenfassen:

Unter den sämmtlichen Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, welche den Geraden $\mathfrak{G}$ in der Ebene rücksichtlich beider gegebenen Netze entsprechen, giebt es Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Denken wir uns denjenigen Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ konstruirt, welcher der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ entspricht und durch das gemeinschaftliche Tripel $xyz$ und die Mittelpunkte $m m_1$ beider Netze bestimmt wird, so entsprechen sämmtlichen Tangenten dieses Kegelschnitts $\mathfrak{M}$ Parabeln, solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}$ in zwei reellen Punkten schneiden, Hyperbeln und solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche $\mathfrak{M}$ nicht schneiden, Ellipsen. Unter den Hyperbeln giebt es unendlich-viele gleichseitige; sie entsprechen allen solchen Geraden $\mathfrak{G}$, welche durch einen bestimmten Punkt $P_0$ gehen; dies ist der Durchschnittspunkt der beiden Durchbohrungs-Sehnen des Kegelschnitts $\mathfrak{M}$ durch die Axenpaare der gegebenen beiden Netze; sein konjugirter Punkt $Q_0$, durch welchen alle gleichseitigen Hyperbeln ausserdem gehen, ist der Höhenpunkt des Dreiecks $xyz$. Unter den Ellipsen giebt es einen einzigen Kreis; er entspricht derjenigen Geraden $\mathfrak{G}_0$, welche die Polare des Punktes $P_0$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ ist. Geht die veränderliche Gerade $\mathfrak{G}$ insbesondere durch einen der Punkte des gemeinschaftlichen Tripels, z. B. durch $x$, so zerfällt der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in ein Linienpaar, dessen einer Theil jedesmal die Polare $X$ dieses Tripelpunktes und dessen anderer Theil eine bestimmte Gerade $\mathfrak{g}$ ist, welche ebenfalls durch $x$ geht. Diejenigen Punkte $Q$,

welche den Punkten $P$ einer solchen durch $x$ gehenden Geraden 𝔊 konjugirt sind, liegen auf der Geraden 𝔤 und umgekehrt. Drehen wir die Gerade 𝔊 um den festen Punkt $x$, so dreht sich auch 𝔤 um denselben und 𝔊, 𝔤 sind konjugirte Strahlen eines bestimmten Strahlsystems $(x)$. Zwei konjugirte Strahlen eines solchen Strahlsystems erhalten wir immer, indem wir $x$ mit irgend einem Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ in der Ebene verbinden; insbesondere sind auch die beiden durch $x$ gehenden Tripelstrahlen ein Paar konjugirter Strahlen des Systems $(x)$. Wir erhalten auf diese Weise, wenn die Tripelpunkte $x\,y\,z$ alle drei reell sind, drei bestimmte Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$, welche entweder alle drei hyperbolisch oder von denen nur eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind. Wenn von den Tripelpunkten nur einer $x$ reell ist, so ist das Strahlsystem $(x)$ allemal hyperbolisch. Die beiden Asymptoten $s$, $t$ eines solchen Strahlsystems sind allemal solche Gerade in der Ebene, für welche die beiden den Netzen zugehörigen Punktsysteme identisch werden; es giebt also nur zwei oder sechs solcher Geraden. In dem letzteren Fall schneiden sich die sechs Asymptoten $s\,t$, $s_1\,t_1$, $s_2\,t_2$, der drei hyperbolischen Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ zu je dreien in vier Punkten $S\,S_1\,S_2\,S_3$, die mithin ein vollständiges Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck $x\,y\,z$ ist. Die Punkte $S\,S_1\,S_2\,S_3$ sind die einzigen in der Ebene von solcher Beschaffenheit, dass jeder von ihnen mit seinem konjugirten rücksichtlich beider Netze zusammenfällt; sie sind zugleich die Asymptotenpunkte derjenigen Punktsysteme, welche den Asymptoten $s\,t$... rücksichtlich des einen (oder anderen) Netzes zugehören (da sie für beide identisch sind). Von diesen vier ausgezeichneten Punkten $S\,S_1\,S_2\,S_3$ sind entweder alle vier reell oder nur zwei oder keiner. Gehen wir von einem allemal reellen Tripelpunkte $x$ aus, dessen Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch ist und die Asymptoten $s$, $t$ hat, so können die beiden Punktsysteme auf $s$ und $t$ entweder beide elliptisch sein, dann sind alle

vier Punkte $S S_1 S_2 S_3$ imaginär, aber die beiden übrigen Tripelpunkte $y$ und $z$ reell, oder von jenen beiden Punktsystemen auf $s$ und $t$ ist eines hyperbolisch und das andere elliptisch, dann sind zwei Punkte $S S_1$ reell, die beiden andern $S_2 S_3$ imaginär und die beiden übrigen Tripelpunkte $y$ und $z$ auch imaginär, oder drittens beide Punktsysteme auf $s$ und $t$ sind hyperbolisch, dann sind alle vier Punkte $S S_1 S_2 S_3$ reell und auch die übrigen Tripelpunkte $y$, $z$. Wenn die beiden Netze hyperbolisch sind, so sind die Punkte $S S_1 S_2 S_3$ die Durchschnittspunkte ihrer Kernkegelschnitte, $x y z$ ihr gemeinschaftliches Tripel und die Asymptoten $st$, $s_1 t_1$, $s_2 t_2$ der drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ die sechs gemeinschaftlichen Sekanten beider Kegelschnitte; aber auch wenn eines oder beide Netze elliptisch sind, ist das gemeinschaftliche Tripel $x y z$ immer reell und von den drei Strahlsystemen $(x)$ $(y)$ $(z)$ eines hyperbolisch, die beiden andern elliptisch, also ein Paar gemeinschaftlicher Sekanten $st$ immer reell, d. h. in diesem Falle zwei solche Gerade, für deren jede die den Netzen zugehörigen beiden Punktsysteme identisch sind.

Es ist noch zu bemerken, dass aus der vorigen Betrachtung auch das umgekehrte Resultat sich ergiebt: Wenn von dem beiden Netzen gemeinschaftlichen Tripel allein $x$ und $X$ reell ($y$ und $z$ imaginär) sind, ein Fall, der nur bei zwei hyperbolischen Netzen eintreten kann und zur Folge hat, dass immer das Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch ist, also die reellen Asymptoten $s$ und $t$ hat, so muss von den beiden Punktsystemen auf $s$ und $t$, welche den Netzen gemeinschaftlich zugehören, das eine hyperbolisch, das andere elliptisch sein, denn wäre dies nicht, so müssten $y$ und $z$ reell sein. Also die beiden Kernkegelschnitte der Netze müssen, damit $y$ und $z$ imaginär seien, zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte haben.

Vermöge der dem Netze innewohnenden Polarität lässt sich eine der vorigen gleichlaufende Betrachtung anstellen, indem man die Paare konjugirter Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ in Bezug auf beide Netze auffasst und die Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ untersucht, welche allen Punkten $P$ in der Ebene entsprechen und sämmtlich dem Dreiseit $X Y Z$ einbeschrieben sind. Diese Betrachtung ist der obigen

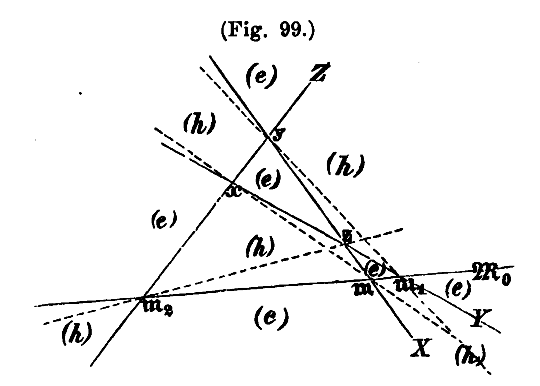
nach dem bekannten Uebertragungsprinzip so gleichförmig nachzubilden, dass es genügt, die Resultate hervorzuheben und nur die abweichenden Punkte etwas näher zu beleuchten. Die Pole einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die beiden gegebenen Netze bestimmen die konjugirte Gerade $\mathfrak{H}$, und wenn $\mathfrak{G}$ sich um einen festen Punkt $P$ dreht, so umhüllt $\mathfrak{H}$ einen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{C}$. Insbesondere ist der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ diejenige Gerade $\mathfrak{M}_0$ konjugirt, welche die Mittelpunkte beider Netze verbindet, und allen Punkten $P$ dieser Geraden $\mathfrak{M}_0$ entsprechen daher Kegelschnitte $\mathfrak{C}$, welche Parabeln sind. Einem solchen Punkte $P$, welcher auf einem Strahle des gemeinschaftlichen Tripels liegt, z. B. auf $X$, entspricht jedesmal ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, welcher sich in ein Punktenpaar auflöst, dessen einer Theil immer derselbe Punkt $x$, der Pol der Geraden $X$, und dessen anderer Theil ein gewisser Punkt $p$ ist, welcher auf $X$ liegt. Verändern wir den Punkt $P$ auf der Geraden $X$, so verändert sich auch $p$ auf derselben und es erzeugt das Punktenpaar $P, p$ ein bestimmtes Punktsystem $(X)$. Irgend zwei konjugirte Gerade $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ treffen einen Tripelstrahl $X$ immer in einem solchen Paar konjugirter Punkte $P, p$ des Punktsystems $(X)$ und die Gerade $\mathfrak{M}_0$ trifft daher die $X$ in dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ desselben. Hieraus folgt, dass, wenn die drei Strahlen des gemeinschaftlichen Tripels $X\,Y\,Z$ sämmtlich reell sind, von den drei Punktsystemen $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ nothwendig entweder alle drei hyperbolisch oder eins hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein müssen; denn auf jedem Tripelstrahl, z. B. $X$, sind immer die beiden Eckpunkte $y, z$ des gemeinschaftlichen Tripels ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems $(P, p)$ und die Gerade $\mathfrak{M}_0$ kann die Seiten des Dreiecks $x\,y\,z$ immer nur in drei solchen Punkten $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2$ treffen, welche entweder alle drei auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten, oder von denen nur einer auf der Verlängerung und die beiden andern auf den Dreiecksseiten selbst liegen; da nun $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2$ die Mittelpunkte der drei Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ und $y, z$; $z, x$; $x, y$ je ein Paar konjugirter Punkte derselben sind, so müssen von den drei Punktsystemen entweder alle oder nur eins hyperbolisch sein. In dem Falle, dass von den drei Tripelstrahlen nur einer $X$ und der Schnittpunkt der beiden andern, $x$ der Pol von $X$, reell ist, lässt sich leicht zeigen, dass das Strahlsystem $(X)$ hyperbolisch sein

muss. Denken wir uns nämlich einen beliebigen Punkt $P$ und den entsprechenden Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ hergestellt, so wird in dem Falle, dass $Y$, $Z$ imaginär sind, ihr Schnittpunkt $x$ innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$ liegen müssen, weil das Tangentenpaar aus $x$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ imaginär ist. Ziehen wir nun durch $P$ irgend eine Gerade $\mathfrak{G}$ und konstruiren die konjugirte Gerade $\mathfrak{H}$, Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$, so bestimmen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ein Paar konjugirter Punkte des Punktsystems $(X)$. Bezeichnen wir dieselben für den Augenblick: $(\mathfrak{G}, X) = s$ und $(\mathfrak{H}, X) = \sigma$, so wird durch $s$ eine zweite Tangente $\mathfrak{H}'$ an $\mathfrak{C}$ gehen, deren konjugirte Gerade $\mathfrak{G}' = P\sigma$ sein muss. Wir haben also zwei Paare konjugirter Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, finden aus ihnen ein drittes Paar $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}', \mathfrak{H}\mathfrak{H}')$ und $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$, und da von diesen beiden Geraden die erstere durch $P = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ geht, so muss die letztere $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}')$ den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ berühren. In der That ist $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}')$ nichts anderes als $s$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}')$ nichts anderes als $\sigma$, folglich $(\mathfrak{G}\mathfrak{H}', \mathfrak{H}\mathfrak{G}') = s\sigma = X$ und die konjugirte Gerade muss daher durch $x$ gehen oder $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}')$ auf der Verbindungslinie $Px$ liegen. Diese Gerade $Px$ bleibt nun fest, während wir die Gerade $\mathfrak{G}$, also auch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ verändern; wenn wir aus den Punkten der Geraden $Px$ die Tangentenpaare $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ an den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ legen, so treffen dieselben die feste Tangente $X$ dieses Kegelschnitts in Punktenpaaren $s$, $\sigma$ des vorhin gefundenen Punktsystems $(X)$ (§ 31). Wir wissen nun im Allgemeinen, dass dieses von der Geraden $Px$ abhängende Punktsystem ein elliptisches ist, wenn die Gerade $Px$ den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ nicht schneidet, ein hyperbolisches, wenn sie denselben in zwei reellen Punkten trifft, weil im letzteren Falle zwei Mal je ein Tangentenpaar zusammenfällt. Da nun nach dem Früheren der Punkt $x$ in unserem Falle innerhalb des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$ liegt, so muss $Px$ denselben in zwei reellen Punkten schneiden, also das Punktsystem $(X)$ hyperbolisch sein w. z. b. w.

Wenn wir sämmtliche Punkte $P$ in der Ebene auffassen und schnell entscheiden wollen, ob der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ Ellipse oder Hyperbel wird, so brauchen wir jetzt nur diejenigen Punkte $P$ in der Ebene zu verfolgen, für welche der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ in einen jener beiden Grenzübergänge zwischen Ellipse und Hyperbel: eine Parabel oder ein Punktenpaar ausartet; diese Orte kennen wir aber aus dem Vorigen,

nämlich die Gerade $\mathfrak{M}_0$, deren Punkten $P$ lauter Parabeln als Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ entsprechen, und die drei Tripelstrahlen $X\,Y\,Z$ (wenn sie sämmtlich reell sind), deren Punkten $P$ Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ entsprechen, welche in Punktenpaare ausarten. Die vier Geraden $X\,Y\,Z\,\mathfrak{M}_0$ theilen das ganze unendliche Gebiet der Ebene in elf Regionen, welche durch jene von einander getrennt werden, und den Punkten $P$ innerhalb derselben Region entsprechen immer Kegelschnitte derselben Art; wir haben nun zu untersuchen, welchen Regionen Hyperbeln und welchen Ellipsen entsprechen. Hierüber erhalten wir unter der Annahme, dass alle drei Tripelstrahlen $X\,Y\,Z$ reell sind, Auskunft, indem wir die Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ ins Auge fassen, welche bestimmt sind durch je ein Paar konjugirter Punkte: $y$, $z$; $z$, $x$; $x$, $y$ und die Mittelpunkte: $\mathfrak{m}\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2$, nämlich die Schnittpunkte von $\mathfrak{M}_0$ mit $X\,Y\,Z$ (Fig. 99). Denken wir uns um einen beliebigen Punkt $P$

(Fig. 99.)




eine Gerade $\mathfrak{G}$ gedreht, welche $X\,Y\,Z$ in den Punkten $a\,b\,c$ treffe, und seien $\alpha\,\beta\,\gamma$ die konjugirten Punkte in den drei Systemen $(X)$ $(Y)$ $(Z)$, so liegen $\alpha\,\beta\,\gamma$ auf der Geraden $\mathfrak{H}$, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ umhüllt. Wir können denselben auch als das Erzeugniss zweier projektivischer Punktreihen, z. B. auf den Trägern $Y$ und $Z$ auffassen, indem wir die Punkte $\beta$ und $\gamma$ verfolgen; um dann den Berührungspunkt des Kegelschnitts $\mathfrak{C}$ mit der Geraden $Y$ zu erhalten, ziehen wir $Py$, welches $Y$ in $\tau$ treffe, und nehmen den zu $\tau$ konjugirten Punkt $t$ des Punktsystems $(Y)$, welches der gesuchte Berührungspunkt sein wird. Um denjenigen Punkt $\beta$ zu finden, welcher dem unendlich-entfernten auf $Z$ entspricht, ziehen wir $P\mathfrak{m}_2$, welches in $b$ die Gerade $Y$ treffe, und

bestimmen den konjugirten $\beta$ zu $b$ des Punktsystems $(Y)$. Jetzt können wir das in § 26 angegebene Kriterium in Anwendung bringen: Liegt nämlich $t$ zwischen $x\beta$, so ist der Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ Ellipse, liegt $t$ ausserhalb $x\beta$, so ist er Hyperbel. Durchmustern wir mit Hülfe dieses Kriteriums die ganze Ebene, indem wir den Punkt $P$ dieselbe durchwandern lassen, so erkennen wir leicht, dass von den elf Regionen, in welche sie durch die Geraden $XYZ\mathfrak{M}_0$ zertheilt wird, fünf den hyperbolischen $(h)$ und die übrigen sechs den elliptischen Charakter $(e)$ haben, indem der dem Punkte $P$ entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ allemal Hyperbel wird, sobald $P$ in einem der Räume $(h)$ liegt, dagegen Ellipse, sobald $P$ in einem der Räume $(e)$ liegt; die Räume $(h)$ sind aber diejenigen, in welche die drei Diagonalen des von den Geraden $XYZ\mathfrak{M}_0$ gebildeten vollständigen Vierseits ganz hineinfallen, während die Räume $(e)$ von den Diagonalen nicht getroffen werden; um jeden Eckpunkt des vollständigen Vierseits gruppiren sich immer zwei Scheitelräume elliptischen und die beiden Neben-Scheitelräume hyperbolischen Charakters (Fig. 99). Wir unterlassen der Kürze wegen die Untersuchung des Falles, in welchem von den drei Tripelstrahlen nur einer $X$ und der Schnittpunkt der beiden andern $x$ reell ist; die beiden Geraden $X$ und $\mathfrak{M}_0$ theilen dann das ganze Gebiet der Ebene nur in vier unendliche Räume, zwei Paar Scheitelräume; dasjenige Paar Scheitelräume, in deren einem $x$ liegt, enthält alle solche Punkte $P$, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ Hyperbeln werden, das andere Paar Scheitelräume diejenigen Punkte $P$, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ Ellipsen sind. Auch möge dem Leser die Aufsuchung derjenigen besonderen Punkte $P$ überlassen bleiben, deren entsprechende Kegelschnitte $\mathfrak{C}$ Kreise oder gleichseitige Hyperbeln werden.

Die drei Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$, von denen entweder eines oder alle drei hyperbolisch sein müssen, haben zu Asymptotenpunkten: $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$; $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{t}_1$; $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_2$, Punkte von besonderer Eigenthümlichkeit in Bezug auf die beiden gegebenen Netze; das Strahlsystem, welches einem dieser sechs Punkte in Bezug auf die beiden Netze zugehört, ist nämlich ein und dasselbe; wenn es hyperbolisch ist, so sind seine beiden Asymptoten sowohl Tangenten des einen als auch des andern Kernkegelschnitts, d. h. gemeinschaftliche Tangenten. Von den sechs Punkten $\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ $\mathfrak{s}_1\mathfrak{t}_1$ $\mathfrak{s}_2\mathfrak{t}_2$

sind entweder zwei oder alle sechs reell; im letzteren Fall liegen sie zu je dreien auf vier geraden Linien, welche die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kernkegelschnitte beider Netze sind; das von denselben gebildete vollständige Vierseit hat $XYZ$ zu seinen drei Diagonalen. Wenn dagegen nur zwei Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ reell sind auf $X$, so müssen die ihnen zugehörigen Strahlsysteme, welche rücksichtlich beider Netze dieselben sind, entweder beide elliptisch sein und dann sind auch $Y$ und $Z$ reell, oder eines elliptisch und das andere hyperbolisch, dann sind $Y$ und $Z$ imaginär. Im ersteren Fall sind entweder beide oder ein Netz elliptisch, oder falls beide Netze hyperbolisch sind, haben ihre Kernkegelschnitte keine reelle gemeinschaftliche Tangente; im letzteren Fall, der nur eintreten kann, wenn beide Netze hyperbolisch sind, haben die Kernkegelschnitte zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten, jedes Paar aber einen reellen Schnittpunkt $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ auf dem Tripelstrahl $X$. Sobald also umgekehrt von dem gemeinschaftlichen Tripel nur ein Strahl $X$ und der Schnittpunkt $x$ der beiden andern reell, diese selbst aber imaginär sind, müssen beide Netze hyperbolisch sein und ihre Kernkegelschnitte nur zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten haben. Halten wir dies mit dem analogen früher gefundenen Resultat zusammen, so folgt aus der Identität und zusammengehörigen Realität des Tripeldreiecks $xyz$ mit dem Tripeldreiseit $XYZ$, dass, wenn zwei Kegelschnitte nur zwei reelle Schnittpunkte haben, sie auch nothwendig zwei reelle gemeinschaftliche Tangenten und nur zwei solche haben müssen und umgekehrt.

Das in dem Vorstehenden betrachtete doppelte Beziehungssystem, welches durch die beiden in der Ebene gegebenen Netze hergestellt wird — indem einerseits jedem Punkte $P$ in der Ebene ein bestimmter Punkt $Q$ konjugirt ist und den Punkten $P$ einer Geraden $\mathfrak{G}$ Punkte $Q$ eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ entsprechen, welcher durch drei unveränderliche Punkte $xyz$ geht, anderseits jeder Geraden $\mathfrak{G}$ eine bestimmte Gerade $\mathfrak{H}$ konjugirt ist und sämmtlichen durch einen Punkt $P$ gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ Gerade $\mathfrak{H}$ entsprechen, die einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ umhüllen, welcher demselben festen Dreiseit $XYZ$ einbeschrieben ist — erfordert zu seiner Bestimmung nicht die vollständige Kenntniss der beiden Netze, sondern nur des gemeinschaftlichen Tripels $xyz$ oder $XYZ$

und einerseits irgend eines Paares konjugirter Punkte $P$, $Q$ oder anderseits konjugirter Strahlen 𝔖, 𝔖 in Bezug auf beide Netze. In der That nehmen wir zuerst das Tripel $xyz$ und irgend ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ als gegeben an, so ist das Beziehungssystem der ersten Art vollständig bestimmt; indem wir nämlich $P$ und $Q$ mit $xyz$ verbinden und diese Punkte unter sich, erhalten wir durch jeden von ihnen zwei Strahlenpaare, welche ein Strahlsystem bestimmen, z. B. in $x$ werden die Strahlen $xP$ und $xQ$, $xy$ und $xz$ als zwei Paare konjugirter Strahlen des Strahlsystems $(x)$ aufgefasst, welches dadurch vollständig bestimmt ist; haben wir auf diese Weise die drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ hergestellt, so finden wir zu jedem andern Punkte $P$ in der Ebene den konjugirten $Q$, indem wir $xP$ und $yP$ ziehen und in den Strahlsystemen $(x)$ und $(y)$ die beiden konjugirten Strahlen zu jenen aufsuchen, welche sich in dem gesuchten Punkte $Q$ treffen. Hierdurch ist nun auch zu jeder Geraden 𝔖 der entsprechende Kegelschnitt 𝔎 leicht herzustellen. Anderseits ist durch das Tripel $XYZ$ und irgend ein Paar konjugirter Strahlen 𝔖, 𝔖 das Beziehungssystem der zweiten Art vollständig bestimmt; die Schnittpunktenpaare von $X$ einmal mit $Y$, $Z$ und zweitens mit 𝔖, 𝔖 bestimmen das Punktsystem $(X)$, und in gleicher Weise erhalten wir die Punktsysteme $(Y)$ und $(Z)$; sind diese ermittelt, so erhalten wir zu jeder andern Geraden 𝔖 die konjugirte 𝔖, indem wir die Schnittpunkte der ersteren mit $X$, $Y$ (oder $Z$) aufsuchen und die zu denselben konjugirten Punkte in den Punktsystemen $(X)$ $(Y)$ (oder $Z$) mit einander verbinden, welche die Gerade 𝔖 bestimmen. Zu jedem beliebigen Punkte $P$ können wir dann in bekannter Weise den entsprechenden Kegelschnitt 𝔈 herstellen, indem wir zu allen durch $P$ gehenden Strahlen 𝔖 die konjugirten 𝔖 konstruiren. Als ein besonderes Paar konjugirter Strahlen, welches neben dem Tripel $XYZ$ zur Bestimmung dieses Beziehungssystems dient, empfiehlt sich $𝔖_\infty$ und $𝔐_0$; die drei Schnittpunkte von $X$, $Y$, $Z$ mit $𝔐_0$ sind dann die drei Mittelpunkte der Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$. Wir müssen noch den andern möglichen Fall in Betracht ziehen, dass von dem Tripel nur ein Eckpunkt $x$ und die gegenüberliegende Seite $X$ (Polare von $x$), auf dieser aber ein elliptisches Punktsystem gegeben ist, dessen Asymptotenpunkte $y$, $z$ imaginär sind; fügen wir dann noch ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$

hinzu, so ist das Beziehungssystem der ersten Art wiederum vollständig bestimmt, aber die vorhin angegebene Konstruktion beliebig vieler anderer Paare konjugirter Punkte $P$, $Q$ ist nicht mehr in Anwendung zu bringen, weil die Punkte $y$, $z$ selbst nicht reell existiren. Wir werden uns in diesem Falle zunächst das Strahlsystem $(x)$ herzustellen haben, von welchem unmittelbar nur das einzige Paar konjugirter Strahlen $xP$ und $xQ$ gegeben ist; die Asymptoten $s$, $t$ dieses Strahlsystems $(x)$ müssen sowohl harmonisch liegen mit $xP$ und $xQ$, als auch mit $xy$ und $xz$, falls die letzteren beiden reell sind; dies lässt sich aber auch unabhängig von ihrer Realität so aussprechen: Die Asymptoten $s$ und $t$ sind das gemeinschaftliche Paar konjugirter Strahlen für zwei concentrisch liegende Strahlsysteme in $x$, deren eines hyperbolisch ist und $xP$, $xQ$ zu Asymptoten hat, während das andere die Strahlen $xy$ und $xz$ zu Asymptoten hat; wenn nun $y$ und $z$ imaginär sind, so wird das zweite Strahlsystem erhalten, indem wir durch $x$ ein Strahlsystem perspektivisch mit dem auf $X$ gegebenen Punktsystem legen, welches elliptisch ist und die imaginären Punkte $y$, $z$ zu Asymptotenpunkten hat. Die beiden concentrischen Strahlsysteme in $x$ sind also bekannt und sie müssen ein reelles Paar konjugirter Strahlen gemeinschaftlich haben, weil eines von ihnen elliptisch ist (§ 16). Dieses Paar $s$, $t$ bildet die Asymptoten des Strahlsystems $(x)$, welches, wie wir auch von früher wissen, nothwendig hyperbolisch sein muss. Ist das Strahlsystem $(x)$ also ermittelt, so lässt sich jetzt zu jeder durch den gegebenen Punkt $P$ gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ herstellen; dieser muss nämlich durch $x$ und $Q$ gehen, das auf $X$ gegebene elliptische Punktsystem zu seinem zugehörigen haben und endlich von dem Strahlsystem $(x)$ in solchen Punktenpaaren durchbohrt werden, deren Verbindungssehne durch den Schnittpunkt $(\mathfrak{G}, X)$ läuft; verbinden wir daher $x$ mit diesem Schnittpunkte $(\mathfrak{G}, X)$ und suchen den konjugirten Strahl in dem Strahlsystem $(x)$ auf, so muss derselbe den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in $x$ berühren; wir kennen daher jetzt fünf Punkte des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, wodurch derselbe vollständig bestimmt wird, nämlich den Punkt $Q$, die beiden in $x$ zusammenfallenden Punkte, d. h. die Tangente in $x$ und das zugehörige Punktsystem auf $X$, d. h. die beiden imaginären Punkte $y$ und $z$. Die Konstruktion des durch diese Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitts ist in

§ 30, Anmerkung, ausgeführt. Wir sind demnach im Stande, zu jeder durch $P$ gezogenen Geraden 𝔊 den entsprechenden Kegelschnitt 𝔎 herzustellen und ebenso zu jeder durch $Q$ gehenden Geraden 𝔊′ den entsprechenden Kegelschnitt 𝔎′ zu finden; jeder beliebige Punkt in der Ebene kann nun als der Schnittpunkt zweier solcher Geraden 𝔊, 𝔊′ angesehen werden; die beiden entsprechenden Kegelschnitte 𝔎𝔎′ haben dann zu ihrem vierten gemeinschaftlichen Punkte ausser $xyz$ denjenigen, welcher dem Schnittpunkte (𝔊, 𝔊′) konjugirt ist. Wie der vierte gemeinschaftliche Punkt der beiden Kegelschnitte 𝔎𝔎′ gefunden wird, ist in § 39 angegeben worden. Wir sind nunmehr im Stande, zu jedem Punkte der Ebene den konjugirten Punkt zu konstruiren, mithin auch zu jeder beliebigen Geraden 𝔊 den entsprechenden Kegelschnitt 𝔎 und haben also das ganze Beziehungssystem der ersten Art auch für den angenommenen Fall herzustellen gelehrt. In ganz analoger Weise wird das Beziehungssystem der zweiten Art hergestellt, wenn zur Bestimmung desselben neben einem beliebigen Paar konjugirter Strahlen 𝔊, 𝔋 von dem Tripel allein ein reeller Strahl $X$ und der Schnittpunkt $x$ der beiden andern mit dem elliptischen Strahlsystem gegeben ist, dessen imaginäre Asymptoten $Y$ und $Z$ sind.

Erwägen wir nun, dass durch ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ und ein Tripel $x y z$ das Netz nicht vollkommen bestimmt wird, sondern, dass es unendlich-viele Netze giebt, welche diese Stücke gemein haben, so steht es uns frei, anstatt der beiden als gegeben angesehenen Netze, von welchen wir ausgingen, andere zu setzen, für welche $P$, $Q$ konjugirte Punkte und $xyz$ ein Tripel ist; durch je zwei solche Netze wird immer dasselbe Beziehungssystem der ersten Art bestimmt und für diese Netze gelten daher genau dieselben Eigenschaften, wie für die beiden ursprünglich angenommenen. Wir können uns sämmtliche Netze der Art auf die Weise hergestellt denken, dass wir um $Q$ eine Gerade 𝔏 drehen und zur Bestimmung des Netzes immer das Tripel konjugirter Punkte $x y z$ und das Paar Pol und Polare: $P$ und 𝔏 nehmen, wodurch das Netz jedesmal vollständig und eindeutig bestimmt wird. Die Gesammtheit dieser Netze nennen wir ein **Netz-Büschel**; die Mächtigkeit desselben ist gleich gross mit der eines Strahlbüschels, denn es giebt so viel Netze im Netzbüschel, als Strahlen 𝔏 durch einen Punkt $Q$. Irgend ein Paar

konjugirter Punkte $P_1\,Q_1$ des Beziehungssystems, welches durch $x\,y\,z$ und $P$, $Q$ bestimmt wird, muss nun auch ein Paar konjugirter Punkte sein für irgend zwei andere Netze des Büschels, welche wir beliebig herausnehmen können, oder mit andern Worten: Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf sämmtliche Netze eines Netz-Büschels laufen durch einen festen (konjugirten) Punkt, welcher Satz bereits in § 57 auf direktem Wege nachgewiesen ist. Da wir irgend zwei Netze des Büschels zur Hervorbringung des Beziehungssystems wählen können, so folgt ferner: Denken wir uns von zwei beliebigen Punkten $P_1$ und $P_2$ die Polaren in Bezug auf irgend ein Netz des Büschels ermittelt, so geht die erste durch den konjugirten Punkt $Q_1$, die zweite durch $Q_2$ und sie schneiden sich in einem Punkte $Q_3$, dessen Polare in Bezug auf das gewählte Netz die Verbindungslinie $P_1 P_2$ ist; der konjugirte Punkt $P_3$ zu $Q_3$ muss also auf $P_1\,P_2$ liegen. Verändern wir das aus dem Büschel gewählte Netz, so verändert sich $Q_3$ und beschreibt denjenigen Ort, welcher alle Punkte enthält, die den Punkten der Geraden $P_1\,P_2 = \mathfrak{G}$ konjugirt sind, d. h. den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Hieraus folgt: Die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ in Bezug auf sämmtliche Netze eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel $x\,y\,z$ umschrieben ist. Dies lässt sich auch so aussprechen: Die Polaren zweier beliebigen Punkte $P_1$ und $P_2$ in Bezug auf sämmtliche Netze eines Büschels beschreiben allemal zwei projektivische Strahlbüschel $(Q_1)$ und $(Q_2)$, welche zu je zwei entsprechenden Strahlen die Polaren in Bezug auf dasselbe Netz haben. Nehmen wir für $\mathfrak{G}$ insbesondere die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$, so enthält der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ die Mittelpunkte aller Netze des Büschels, also: Die Mittelpunkte sämmtlicher Netze eines Büschels liegen auf einem bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher dem Tripel $x\,y\,z$ umschrieben ist. Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{2)}$ entscheidet zugleich über die Natur der in dem Büschel enthaltenen Netze, d. h. ob dieselben hyperbolisch oder elliptisch sind. Zuvörderst ist nämlich klar, dass, wenn die vorhin ermittelten ausgezeichneten Punkte $S\,S_1\,S_2\,S_3$, in deren jeden zwei konjugirte Punkte $P$, $Q$ zusammenfallen, entweder alle vier reell sind oder, wenn

auch nur zwei von ihnen reell sind, offenbar alle Netze des Büschels hyperbolisch sein müssen und ihre Kernkegelschnitte nichts anderes, als ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier oder zwei reellen Mittel- (Grund-) Punkten bilden. Sobald daher von dem gemeinschaftlichen Tripel nur $x$ und $X$ reell sind, $y$ und $z$ imaginär, sind alle Netze des Büschels hyperbolisch und die Kernkegelschnitte haben zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Grundpunkte. Wenn dagegen das Tripel $xyz$ völlig reell ist, so können entweder die oben bestimmten Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ alle drei hyperbolisch oder nur eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sein; im ersteren Fall enthält das Netz-Büschel wiederum lauter hyperbolische Netze, deren Kernkegelschnitte ein gewöhnliches Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten $S\,S_1\,S_2\,S_3$ bilden; im letzteren Fall wird das Büschel theils hyperbolische, theils elliptische Netze enthalten; die Kernkegelschnitte der hyperbolischen Netze bilden ein Kegelschnittbüschel mit vier imaginären Grundpunkten; dies ist aber, wie wir jetzt sehen, nur ein unvollständiges Gebilde, zu dessen Ergänzung noch die imaginären Kegelschnitte hinzutreten müssen, welche den elliptischen Netzen eines solchen Netzbüschels entsprechen. Wir sehen die Richtigkeit der letzten Behauptung leicht ein, wenn wir für den Fall des reellen Tripels und falls von den Strahlsystemen $(x)$ $(y)$ $(z)$ eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch sind, genauer untersuchen, in welcher Weise die konjugirten Punkte $P$, $Q$ die verschiedenen Gebiete der Ebene bedecken. Die ganze unendliche Ebene wird nämlich, wie wir wissen, durch die Seiten des Dreiecks $xyz$ in die sieben Regionen $e$, $e_1\,h_1$, $e_2\,h_2$, $e_3\,h_3$ (Fig. 100) getheilt; nehmen wir an, es sei das Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch, dagegen $(y)$ und $(z)$ elliptisch, dann ist mit Berücksichtigung des bekannten Kriteriums für das elliptische und hyperbolische Strahlsystem (§ 17) aus der Anschauung klar, dass,

(Fig. 100.)



wenn $P$ in der Region $(e)$ liegt, der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_1)$ oder $(h_1)$ liegen muss,

wenn $P$ in den Regionen $(e_1)$ oder $(h_1)$ liegt, der konjugirte Punkt $Q$ in der Region $(e)$ liegen muss,

wenn $P$ in den Regionen $(e_2)$ oder $(h_2)$ liegt, der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_3)$ oder $(h_3)$ liegen muss,

wenn $P$ in den Regionen $(e_3)$ oder $(h_3)$ liegt, der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_2)$ oder $(h_2)$ liegen muss.

Obgleich es zunächst nicht weiter benutzt wird, bemerken wir noch, dass in dem andern Fall, wenn $(x)$ $(y)$ $(z)$ alle drei hyperbolische Strahlsysteme sind, die Vertheilung in folgender Weise stattfindet:

wenn $P$ in der Region $(e)$ liegt, so muss der konjugirte Punkt $Q$ in der Region $(e)$ liegen,

wenn $P$ in den Regionen $(e_1)$ oder $(h_1)$ liegt, so muss der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_1)$ oder $(h_1)$ liegen,

wenn $P$ in den Regionen $(e_2)$ oder $(h_2)$ liegt, so muss der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_2)$ oder $(h_2)$ liegen,

wenn $P$ in den Regionen $(e_3)$ oder $(h_3)$ liegt, so muss der konjugirte Punkt $Q$ in den Regionen $(e_3)$ oder $(h_3)$ liegen.

Ferner wissen wir, dass den unendlich-entfernten Punkten $P$ der Ebene die Punkte $Q$ des Kegelschnitts $\mathfrak{M}^{(2)}$ konjugirt sind. Jeder Punkt $m$ dieses Kegelschnitts ist der Mittelpunkt eines Netzes vom Büschel und dieses Netz ist vollständig bestimmt durch das Tripel $x\,y\,z$ und den Mittelpunkt $m$, dessen Polare $\mathfrak{G}_\infty$ bekannt ist. Die Anschauung lehrt ferner, dass, wenn $m$ in der Region $(e)$ liegt, das Netz nothwendig elliptisch sein muss, weil die drei dem Netze zugehörigen Punktsysteme auf den Tripelstrahlen $X\,Y\,Z$ alle drei elliptisch werden, wie dies bereits in § 45 gelegentlich bemerkt worden ist; wenn dagegen $m$ in einer der andern Regionen liegt, muss das Netz allemal hyperbolisch sein, weil von jenen drei Punktsystemen immer zwei hyperbolisch und das dritte elliptisch wird (§ 56), und zwar zeigt sich, indem wir das dem Punkte $m$ zugehörige Strahlsystem des Netzes ermitteln, dass, wenn $m$ in einem der drei Räume $e_1\,e_2\,e_3$ liegt, der Kernkegelschnitt des hyperbolischen Netzes eine Hyperbel, wenn dagegen $m$ in einem der drei Räume $h_1\,h_2\,h_3$ liegt, derselbe eine Ellipse ist, weil sein Strahlsystem (konjugirtes Durchmessersystem) in dem einen Falle hyperbolisch, in dem anderen elliptisch wird. Halten wir dies fest und bedenken, dass die unendlich-entfernten Punkte nur in den Regionen $e_1\,h_1\,e_2\,h_2\,e_3\,h_3$ vorkommen, so werden die ihnen konjugirten, welche auf dem Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ liegen, unter der gemachten Annahme, dass

das Strahlsystem $(x)$ hyperbolisch, $(y)$ und $(z)$ elliptisch sind, nur in den Regionen $(e)$ $(e_2)$ $(h_2)$ $(e_3)$ $(h_3)$ vorkommen können und müssen, d. h. der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher dem Dreieck $x\,y\,z$ umschrieben ist, trifft die Regionen $e\,e_2\,e_3\,h_2\,h_3$ (dagegen nicht $e_1$ und $h_1$). Hieraus folgt zunächst, dass der Kegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ in diesem Falle Hyperbel sein muss, weil er Punkte hat, die in dem Raume $e$, d. h. innerhalb des Dreiecks $x\,y\,z$ liegen (§ 38), ferner, dass diejenigen seiner Punkte $m$, welche in den Raum $(e)$ hineinfallen, die Mittelpunkte von den elliptischen Netzen des Büschels, die übrigen die Mittelpunkte der hyperbolischen Netze desselben sind, welche selbst wieder in zwei Kategorien zerfallen: Diejenigen, welche in den Räumen $e_2$ und $e_3$ enthalten sind, werden die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen sein, deren Kernkegelschnitte Hyperbeln sind, während die in den Räumen $h_2$ und $h_3$ enthaltenen Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen des Büschels sind, deren Kernkegelschnitte Ellipsen sind. Wenn aber vier Punkte $x\,y\,z\,m$ einer Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ so liegen, dass einer $m$ innerhalb des von den drei andern $x\,y\,z$ gebildeten Dreiecks sich befindet, so müssen immer drei von diesen Punkten auf einem Zweige der Hyperbel und einer auf dem andern Zweige derselben liegen; da nun der Zweig der Mittelpunktshyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$, welcher durch $x$ geht, den Raum $h_1$ nicht treffen darf, so kann er auch den Raum $e$ nicht treffen, sondern muss ganz in den Räumen $e_2$ und $e_3$ enthalten sein, während der andere Zweig durch die Punkte $y$ und $z$ geht und die Räume $e\,h_2\,h_3$ durchstreift. Der eine Zweig der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ enthält also die Mittelpunkte sämmtlicher hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte Hyperbeln sind, der andere Zweig derselben wird durch die Punkte $y$ und $z$ in drei Stücke getheilt: Das endliche Stück zwischen $y$, $z$ enthält die Mittelpunkte der elliptischen Netze (imaginären Kegelschnitte), die beiden übrigen unendlichen Stücke die Mittelpunkte der hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte Ellipsen sind. Hierbei tritt der bemerkenswerthe Uebergang von einem reellen Kegelschnitt (einer Ellipse) zum imaginären Kegelschnitt durch einen Punkt, d. h. Nullkegelschnitt (jeden der Punkte $y$ und $z$) auf. Endlich sind die beiden unendlich-entfernten Punkte der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ die Mittelpunkte zweier hyperbolischen Netze des Büschels, deren Kernkegelschnitte zwei Parabeln sind (§ 42).

Hiedurch ist also die obige Behauptung gerechtfertigt. Auch für den andern Fall, dass die drei Strahlsysteme $(x)$ $(y)$ $(z)$ hyperbolisch sind, zeigt die letzte Betrachtung eine vollkommene Uebereinstimmung mit dem bei der Untersuchung des Kegelschnittbüschels Gefundenen. Der Mittelpunktskegelschnitt $\mathfrak{M}^{(2)}$ darf nämlich in diesem Fall den Raum $(e)$ nicht treffen und kann sowohl Ellipse, als auch Hyperbel sein; ist er Ellipse, so trifft er nur die Räume $e_1$ $e_2$ $e_3$; die Kernkegelschnitte aller Netze des Büschels sind also Hyperbeln; ist er Hyperbel, so muss er die Räume $e_1$ $e_2$ $e_3$ treffen, welche den einen ganzen Zweig der Hyperbel enthalten, während der andere Zweig ganz in einem der Räume $h_1$ oder $h_2$ oder $h_3$ enthalten ist; die Kernkegelschnitte zerfallen also in eine Gruppe Ellipsen, welche ihre Mittelpunkte auf einem Zweige der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben, und eine Gruppe Hyperbeln, welche ihre Mittelpunkte auf dem andern Zweige der Hyperbel $\mathfrak{M}^{(2)}$ haben, und beide Gruppen werden durch zwei Parabeln von einander getrennt, deren Mittelpunkte die unendlich-entfernten Punkte von $\mathfrak{M}^{(2)}$ sind, wie wir es früher von anderer Seite her (§ 42) erkannt haben.

Die Ausführung der gegenüberstehenden Betrachtung ist ohne weitere Schwierigkeit; durch ein Tripel konjugirter Strahlen $XYZ$ und ein beliebiges Paar $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ ist nicht nur ein, sondern es sind unendlich-viele Netze bestimmt, welche eine Netz-Schaar bilden, deren Mächtigkeit gleich gross ist mit der einer geraden Punktreihe. Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf sämmtliche Netze der Schaar liegen auf einer andern (konjugirten) Geraden; daher liegen insbesondere die Mittelpunkte sämmtlicher Netze der Schaar auf einer Geraden $\mathfrak{M}_0$, welche der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ konjugirt ist. Die Polaren eines Punktes in Bezug auf sämmtliche Netze einer Schaar umhüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}$, welcher dem gemeinschaftlichen Tripel $XYZ$ einbeschrieben ist. Die Netze einer Schaar sind sämmtlich hyperbolisch, sobald a) von dem gemeinschaftlichen Tripel allein ein Strahl $X$ und der Schnittpunkt $x$ der beiden andern $Y$, $Z$ reell, diese selbst aber imaginär sind; die Kernkegelschnitte bilden eine Kegelschnittschaar mit zwei reellen und zwei imaginären gemeinschaftlichen Tangenten, b) sobald das Tripel $XYZ$ völlig reell und die oben ermittelten Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ auf ihnen alle drei hyperbolisch sind; die Kernkegelschnitte bilden eine

Kegelschnittschaar mit vier reellen gemeinschaftlichen Tangenten; wenn dagegen c) das Tripel $XYZ$ völlig reell und von den Punktsystemen $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ nur eines hyperbolisch $(X)$, die beiden andern elliptisch sind, so besteht die Netzschaar theils aus hyperbolischen, theils aus elliptischen Netzen; die Kernkegelschnitte der hyperbolischen Netze bilden eine Schaar mit vier imaginären gemeinschaftlichen Tangenten; dieses Gebilde wird aber erst zu einem vollständigen durch Hinzufügung der imaginären Kegelschnitte, welche die elliptischen Netze einer solchen Schaar vertreten. Nach dem Obigen muss in diesem Fall c) die Gerade $\mathfrak{M}_0$ die Seiten des von den Geraden $XYZ$ gebildeten Dreiecks so treffen, dass von den Schnittpunkten zwei in den Seiten selbst und nur einer in der Verlängerung einer Dreiecksseite liegt, also ein Stück der Geraden $\mathfrak{M}_0$ in den endlichen Dreiecksraum $(e)$ hineinfällt. Dieses Stück enthält die Mittelpunkte der elliptischen Netze der Schaar, während diejenigen Stücke von $\mathfrak{M}_0$, welche in $e_1 e_2 e_3$ enthalten sind, die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen mit Hyperbeln als Kernkegelschnitten und die Stücke, welche in die Räume $h_1 h_2 h_3$ fallen, die Mittelpunkte von hyperbolischen Netzen mit Ellipsen als Kernkegelschnitten enthalten.

Schliesslich ermitteln wir noch, in welcher Weise bei diesem durch die Netzschaar hervorgerufenen Beziehungssystem der zweiten Art die konjugirten Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ im Allgemeinen die Ebene erfüllen, wenn wir das gemeinschaftliche Tripel $XYZ$ als vollständig reell annehmen; jede Gerade in der Ebene kann dabei überhaupt nur zwei wesentlich verschiedene Lagen haben: entweder trifft sie alle drei Seiten des von den Geraden $XYZ$ gebildeten Dreiecks in ihren Verlängerungen; in diesem Fall wollen wir sie durch einen einfachen Accent (′) bezeichnen; oder sie trifft eine Dreiecksseite in der Verlängerung und die beiden andern zwischen den Ecken des Dreiecks; in diesem Fall soll sie einen doppelten Accent erhalten (″); unterscheiden wir nun die beiden möglichen Fälle:

1) Die drei Punktsysteme $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ sind alle drei hyperbolisch; dann wird einer Geraden $\mathfrak{G}'$ nothwendig eine Gerade $\mathfrak{H}'$ konjugirt sein und einer Geraden $\mathfrak{G}''$ eine Gerade $\mathfrak{H}''$.

2) Von den drei Punktsystemen $(X)$ $(Y)$ $(Z)$ ist eines hyperbolisch und die beiden andern elliptisch, und zwar nennen wir

das hyperbolische $(X)$, die beiden elliptischen $(Y)$ und $(Z)$; dann ist jeder Geraden $\mathfrak{G}'$ nothwendig eine Gerade $\mathfrak{H}''$ konjugirt, aber einer Geraden $\mathfrak{G}''$, nur dann eine Gerade $\mathfrak{H}'$, wenn sie $X$ ausserhalb der Dreiecksseite, $Y$ und $Z$ innerhalb trifft; dagegen, wenn sie $X$ innerhalb, $Y$ innerhalb und $Z$ ausserhalb trifft, eine Gerade $\mathfrak{H}''$, welche $X$ innerhalb, $Y$ ausserhalb und $Z$ innerhalb trifft; endlich, wenn $\mathfrak{G}''$ $X$ innerhalb, $Y$ ausserhalb, $Z$ innerhalb trifft, muss die konjugirte $\mathfrak{H}''$ $X$ innerhalb, $Y$ innerhalb und $Z$ ausserhalb treffen. —

Das Netzbüschel und die Netzschaar oder das damit zusammenhängende Beziehungssystem der ersten und zweiten Art kann auch anstatt durch das gemeinschaftliche Tripel und ein beliebiges Paar konjugirter Punkte oder Strahlen allgemeiner definirt werden, einerseits durch vier Paare konjugirter Punkte $P$, $Q$ und anderseits durch vier Paare konjugirter Strahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$. Fassen wir nur die erste Art ins Auge, so zeigt die in § 57 ausgeführte Untersuchung, dass sich zwei Netze herstellen lassen, welche vier beliebig gegebene Paare konjugirter Punkte $P$, $Q$ gemeinschaftlich haben; solche zwei Netze bestimmen ein Netzbüschel und jedes Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ für jene beiden Netze ist zugleich ein Paar für jedes beliebige Netz des Büschels, wie wir es auch direkt in § 57 nachgewiesen haben; folglich müssen umgekehrt alle Netze, welche jene vier Paare konjugirter Punkte gemeinschaftlich haben, demselben Büschel angehören; ebenso bilden alle Netze, welche vier Paare konjugirter Strahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ gemeinschaftlich haben, eine Netzschaar; ähnliche Gruppen von Netzen erhalten wir, indem wir vier Paare theils konjugirter Punkte, theils konjugirter Strahlen zur Bestimmung eines solchen Gebildes von einfacher Unendlichkeit auswählen; die nähere Untersuchung derartiger Gebilde bleibe aber dem Leser überlassen.

## § 62. **Drei Netze in der Ebene. Die Tripelkurve. Das Kegelschnittnetz.** *)

Nehmen wir drei beliebige Netze in der Ebene an, so gehört zu einem Punkte $P$ in Bezug auf jedes derselben eine Polare,

*) Vergl. „Ueber die Steiner'sche Fläche vierten Grades" von H. Schröter. Monatsbericht der Berliner Akademie vom 26. November 1863.

und diese drei Polaren werden sich im Allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden; es ist aber von Interesse, den Ort solcher besonderen Punkte $P$ in der Ebene aufzusuchen, für welche die Polaren durch einen und denselben Punkt $Q$ laufen. Suchen wir, um den Grad dieses Ortes zu bestimmen, auf einer beliebigen Geraden $\mathfrak{G}$ die Punkte $P$ von der verlangten Beschaffenheit zu ermitteln. Bezeichnen wir zu diesem Zweck die drei gegebenen Netze durch $(A)$ $(B)$ $(C)$ oder auch, falls die Netze hyperbolisch sind, die Kernkegelschnitte derselben durch diese Buchstaben, so werden, wenn wir einen veränderlichen Punkt die Gerade $\mathfrak{G}$ durchlaufen lassen, seine Polaren $a\ b\ c$ in den drei Netzen $(A)$ $(B)$ $(C)$ drei projektivische Strahlbüschel um die Mittelpunkte $\alpha\ \beta\ \gamma$ beschreiben; die von $a$ und $b$ beschriebenen Strahlbüschel $(\alpha)$ und $(\beta)$ erzeugen also einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher durch $\alpha\ \beta$ und das gemeinschaftliche Tripel der Netze $(A)$ und $(B)$ hindurchgeht und durch diese fünf Punkte völlig bestimmt ist. Die Strahlen $b$ und $c$ erzeugen gleicher Weise einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, welcher durch $\beta\ \gamma$ und das gemeinschaftliche Tripel von $(B)$ und $(C)$ hindurchgeht. Die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben nun im Allgemeinen ausser dem gemeinschaftlichen Punkte $\beta$ noch drei Punkte $Q\ Q'\ Q''$ zu Schnittpunkten, und weil ein solcher Punkt $Q$ auf beiden Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zugleich liegt, müssen $\alpha Q$, $\beta Q$, $\gamma Q$ die drei Polaren ein und desselben Punktes $P$ der Geraden $\mathfrak{G}$ sein, d. h. $P$ und $Q$ werden ein solches besonderes Paar von Punkten sein, welche gleichzeitig für alle drei gegebenen Netze konjugirt sind. Da nun die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ ausser dem Punkte $\beta$ höchstens noch drei Punkte $Q\,Q'\,Q''$ gemein haben (von denen auch zwei imaginär sein können), so giebt es im Allgemeinen drei Punkte $P\,P'\,P''$ auf der willkührlich gewählten Geraden $\mathfrak{G}$, welche dem gesuchten Orte angehören; dieser ist also eine Kurve dritten Grades. Die drei Punkte $Q\ Q'\ Q''$ stehen, wenn sie alle drei reell sind, mit ihren konjugirten Punkten $P\,P'\,P''$ in einem sehr einfachen Zusammenhange, vermöge dessen sie aus jenen unmittelbar gefunden werden können. Fassen wir nämlich nur zwei Paare von ihnen $P\,Q$ und $P'\,Q'$ auf, so müssen (§ 55) die Schnittpunkte $(PP',\ Q\,Q')$ und $(P\,Q',\ Q\,P')$ ein drittes Paar konjugirter Punkte für alle drei gegebenen Netze sein; da der erste Punkt auf der Geraden $\mathfrak{G}$ liegt und es nur noch einen solchen $P''$ giebt, so muss dieser

mit ihm identisch sein und daher der andere mit $Q''$, also:

$$(PP', QQ') = P'' \qquad (PQ', QP') = Q'',$$

d. h. die Punkte $P, P', P''$ sind die drei Schnittpunkte der Dreiecksseiten $Q'Q'', Q''Q, QQ'$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$, oder die sechs Punkte $PP'P'' QQ'Q''$ liegen zu je dreien auf vier geraden Linien, welche ein vollständiges Vierseit bilden.

Es ist klar, dass die gefundene Ortskurve dritten Grades durch die drei gemeinschaftlichen Tripel je zweier der gegebenen Netze: $(B)$ und $(C)$, $(C)$ und $(A)$, $(A)$ und $(B)$ hindurchgehen muss und durch diese neun Punkte vollständig bestimmt wird. In der That, sei $x\,y\,z$ das gemeinschaftliche Tripel von $(B)$ und $(C)$, so ist die Polare von $x$ für beide Netze $(B)$ und $(C)$ dieselbe Gerade $(yz) = X$, also schneiden sich die Polaren von $x$ für alle drei gegebenen Netze $(B)$, $(C)$ und $(A)$ in einem Punkte und $x$ ist also ein Punkt des gesuchten Ortes; sein konjugirter ist der Schnittpunkt von $X$ mit der Polare von $x$ in Bezug auf $(A)$; dasselbe gilt für $y$ und $z$; da aber bekanntlich die Polaren der Ecken eines Dreiecks $x\,y\,z$ in Bezug auf ein Netz $(A)$ die Gegenseiten desselben resp. $yz$, $zx$, $xy$ in drei Punkten treffen, welche auf einer Geraden liegen, so müssen auch die konjugirten Punkte zu den Punkten $xyz$ eines gemeinschaftlichen Tripels von je zwei Netzen auf derselben Geraden sich befinden. [Durch diese neun Punkte der drei gemeinschaftlichen Tripel ist ferner unsere Ortskurve vollständig bestimmt, d. h. es giebt keine zwei Kurven dritten Grades, welche gleichzeitig durch diese neun Punkte hindurchgehen; denn wäre dies der Fall, so müsste ein ganzes Büschel von Kurven dritten Grades durch dieselben neun Grundpunkte gehen, und da zwei Tripel desselben Netzes allemal auf einem Kegelschnitt liegen, so würden besondere Kurven jenes Büschels zerfallen in Kegelschnitte und Gerade, d. h. die drei Tripelpunkte des dritten Tripels müssten auf einer Geraden liegen. Die Punkte eines Tripels können aber im Allgemeinen nie auf einer Geraden liegen, folglich geht durch jene neun Punkte nur eine einzige Kurve dritten Grades.]

Durch die drei als gegeben angenommenen Netze $(A)$ $(B)$ $(C)$ sind zugleich drei Büschel von Netzen gegeben, da je zwei derselben ein Büschel bestimmen; bezeichnen wir diese drei Büschel durch $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$ und bemerken, dass ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ für zwei Kegelschnitte (oder Netze) eines

Büschels zugleich für sämmtliche Kegelschnitte (oder Netze) *) desselben konjugirt sind, so folgt, dass, wenn wir aus den drei Büscheln $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$ irgend drei neue Kegelschnitte resp. $A' B' C'$ herausnehmen und dieselben an Stelle der ursprünglichen $ABC$ setzen, für den Ort solcher Paare konjugirter Punkte $P, Q$, welche in Bezug auf diese drei gleichzeitig konjugirt sind, nothwendig dieselbe vorhin gefundene Ortskurve resultirt; diese Kurve enthält daher auch die gemeinschaftlichen Tripel der neuen Kegelschnittspaare $B' C'$, $C' A'$, $A' B'$ und diese bestimmen drei neue Büschel, aus denen wir wiederum je einen beliebigen $A'' B'' C''$ herausnehmen können u. s. f. Wir erhalten dadurch einen netzartigen Fortgang bis ins Unendliche, immer neue Büschel von Kegelschnitten und neue Tripel $xyz$. Alle diese Tripel liegen auf ein und derselben Ortskurve dritten Grades, welche die **Tripelkurve** genannt werden soll; sämmtliche Kegelschnitte (oder Netze) von doppelt-unendlicher Mächtigkeit, welche allen jenen Büscheln angehören, bilden ein **Kegelschnittnetz** von der Beschaffenheit, dass je zwei Punkte $P$, $Q$, welche in Bezug auf irgend drei Kegelschnitte des Netzes gleichzeitig konjugirt sind, auf der Tripelkurve liegen; solche zwei Punkte sollen **konjugirte Punkte der Tripelkurve** heissen und sind in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte des Netzes konjugirt; auch soll irgend ein Tripel $xyz$, welches zweien Kegelschnitten des Netzes gemeinschaftlich ist und daher auf der Tripelkurve liegt, ein **Tripel der Tripelkurve** genannt werden. Die Tripelkurve kann daher doppelt aufgefasst werden, erstens als der Ort solcher Punkte $P$, deren Polaren in Bezug auf die drei gegebenen Kegelschnitte $(A)$ $(B)$ $(C)$ sich in einem Punkte $Q$ treffen, welcher ebenfalls auf der Tripelkurve liegt, und zweitens als der Ort aller gemeinschaftlichen Tripel $xyz$ irgend zweier Kegelschnitte aus den drei Büscheln $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$. Fassen wir irgend einen Punkt $P$ der Tripelkurve auf, welcher nicht gerade ein Eckpunkt eines gemeinschaftlichen Tripels $xyz$ der Büschel $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$ ist, so werden die Polaren von $P$ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels $(B, C)$ durch

*) Wir werden uns im Folgenden der Einfachheit wegen nur des Ausdrucks „Kegelschnitt" statt des allgemeineren „Netz" bedienen, indem wir unter jenem auch den imaginären Kegelschnitt, welcher durch das elliptische Netz vertreten wird, mit einbegreifen.

den konjugirten Punkt $Q$ laufen und ein Strahlbüschel beschreiben dergestalt, dass jedem Kegelschnitt des Büschels eine und nur eine bestimmte Gerade durch $Q$ entspricht und auch umgekehrt für jede durch $Q$ gezogene Gerade nur ein einziger Kegelschnitt aus dem Büschel $(B, C)$ existirt, in Bezug auf welchen sie die Polare von $P$ ist; dasselbe gilt für das zweite Büschel $(C, A)$; ziehen wir also durch $Q$ eine beliebige Gerade, so giebt es einen bestimmten Kegelschnitt $A'$ aus dem Büschel $(B, C)$ und einen bestimmten Kegelschnitt $B'$ aus dem Büschel $(C, A)$ dergestalt, dass jene Gerade und $P$ Polare und Pol für beide Kegelschnitte $A'$ und $B'$ gleichzeitig sind. Wenn aber zwei Kegelschnitte ein Paar Pol und Polare gemeinschaftlich haben, so gehört dies ihrem gemeinsamen Tripel an; folglich ist jeder Punkt $P$ der Tripelkurve zugleich als Eckpunkt eines Tripels anzusehen, welches zweien Kegelschnitten des Netzes gemeinsam ist, oder die Tripelkurve ist der Ort aller gemeinsamen Tripel irgend zweier Kegelschnitte des Netzes. Halten wir die vorhin durch $Q$ willkührlich gezogene Gerade $\mathfrak{G}$ fest und denken uns die beiden Kegelschnitte $A'$ und $B'$ resp. aus den Büscheln $(B, C)$ und $(C, A)$ ermittelt, für welche $P$ ein Eckpunkt des gemeinschaftlichen Tripels ist, so lassen sich auch die beiden andern Tripelpunkte desselben leicht ermitteln; sie liegen natürlich auf $\mathfrak{G}$ und auf der Tripelkurve selbst, müssen daher die beiden übrigen Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Tripelkurve sein, denn der Punkt $Q$ ist im Allgemeinen kein Punkt des gemeinschaftlichen Tripels von $A'$ und $B'$; die Gerade $\mathfrak{G}$ ist nämlich ganz willkührlich durch $Q$ gezogen; verändern wir sie, so erkennen wir, dass nur ein einziges Mal $P$ und $Q$ Tripelpunkte des gemeinschaftlichen Tripels zweier Kegelschnitte $A'$ und $B'$ werden können, weil durch diese beiden auch der dritte Tripelpunkt unzweideutig mitbestimmt ist; käme es also zwei Mal vor, so müsste auch der dritte Tripelpunkt derselbe sein und doch auf zwei verschiedenen durch $Q$ gehenden Geraden liegen, was ein Widerspruch ist; folglich sind die beiden übrigen Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Tripelkurve die Tripelpunkte des gemeinsamen Tripels von $A'$ und $B'$, dessen erster $P$ ist; nur ein Mal, wenn die Gerade $\mathfrak{G}$ Tangente an der Tripelkurve im Punkte $Q$ wird, fällt einer jener beiden Tripelpunkte nach $Q$; hieraus schliessen wir folgende Eigenschaft der Tripelkurve:

**Jeder beliebige Punkt $P$ der Tripelkurve kann als ein Tripelpunkt von unendlich-vielen Tripeln $xyz$ des Kegelschnittnetzes angesehen werden; die Verbindungslinie der jedesmaligen andern zwei Tripelpunkte läuft durch einen festen Punkt $Q$ der Tripelkurve, den konjugirten Punkt von $P$.** Ferner, wenn ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ der Tripelkurve zugleich zwei Punkte eines Tripels $xyz$ vom Kegelschnittnetze sein sollen, so muss der dritte auf der Tangente in $Q$ an der Tripelkurve und daher auch auf der Tangente in $P$ an derselben gelegen sein, d. h.

**Die Tangenten in zwei konjugirten Punkten $P$, $Q$ der Tripelkurve schneiden sich in einem dritten Punkte $R$ derselben, und $PQR$ bilden das gemeinschaftliche Tripel eines in dem Kegelschnittnetze vorkommenden Büschels.**

Nehmen wir zwei beliebige Punkte der Tripelkurve $Q$ und $Q'$, welche nicht konjugirte Punkte derselben sein sollen, so ist es immer erlaubt, dieselben als zwei Tripelpunkte eines Tripels $xyz$ anzusehen, welches in dem Kegelschnittnetze als gemeinschaftliches Tripel eines Büschels auftritt; denn um den dritten Tripelpunkt $Q''$ zu finden, haben wir nur nöthig, die konjugirten Punkte $P$ und $P'$ zu $Q$ und $Q'$ aufzusuchen, dann muss $Q'P$ durch $Q''$ gehen und ebenso auch $QP'$, also der Schnittpunkt $(QP', Q'P) = Q''$ sein; der konjugirte Punkt von $Q''$ muss nun bekanntlich der Schnittpunkt $(PP', QQ') = P''$ sein, weil die beiden Paare $P$, $Q$ und $P'$, $Q'$ dass dritte Paar konjugirter Punkte $P''\,Q''$ mitbestimmen.

Um zu den beiden willkührlich auf der Tripelkurve angenommenen Punkten $QQ'$ den dritten Tripelpunkt $Q''$ zu finden, haben wir also nur nöthig, den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie $QQ'$ mit der Tripelkurve, den Punkt $P''$, zu bestimmen und seinen konjugirten Punkt $Q''$ zu ermitteln. Dieselbe Beziehung lässt sich auch so ausdrücken:

**Verbindet man ein beliebiges Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ der Tripelkurve mit irgend einem dritten Punkte derselben $Q'$, so treffen diese beiden Strahlen die Tripelkurve zum dritten Male in zwei neuen Punkten, welche wieder ein Paar konjugirter Punkte der Tripelkurve $Q''\,P''$ sind.**

Solche drei Paare konjugirter Punkte der Tripelkurve $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ sind also die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, und je drei nicht in einer Geraden liegende Ecken desselben allemal ein Tripel $xyz$ in dem Kegelschnittnetze. Wir schliessen hieraus folgenden Satz:

Die Seiten eines auf der Tripelkurve liegenden Tripeldreiecks, welches das gemeinschaftliche Tripel $xyz$ eines in dem Kegelschnittnetze auftretenden Büschels ist, schneiden die Tripelkurve immer in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen, und diese drei Schnittpunkte sind zugleich die konjugirten Punkte der Tripelkurve zu den drei Eckpunkten des Tripels, indem je eine Ecke und der dritte Schnittpunkt der gegenüberliegenden Seite des Tripeldreiecks mit der Tripelkurve einander konjugirt sind. Wir können auch umgekehrt sagen:

Wenn irgend eine Gerade der Tripelkurve in den drei Punkten $PP'P''$ begegnet, so bilden die zu ihnen konjugirten Punkte $QQ'Q''$ allemal ein Tripel $xyz$, welches einem in dem Kegelschnittnetze auftretenden Büschel gemeinschaftlich ist.

Um die vorige Betrachtung noch zu vervollständigen, denken wir uns ein beliebiges Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ der Tripelkurve und durch $P$ eine Gerade $\mathfrak{G}$ gezogen; dann giebt es in dem Büschel $(B, C)$ einen einzigen bestimmten Kegelschnitt $A'$, welcher $Q$ und $\mathfrak{G}$ zu Pol und Polare hat, in dem Büschel $(C, A)$ einen einzigen bestimmten Kegelschnitt $B'$, welcher ebenfalls $Q$ und $\mathfrak{G}$ zu Pol und Polare hat, und endlich auch in dem Büschel $(A, B)$ einen solchen Kegelschnitt $C'$. Die Gerade $\mathfrak{G}$ schneidet nun die Tripelkurve ausser in $P$ noch in zwei Punkten $Q'$ und $Q''$ von solcher Beschaffenheit, dass $QQ'Q''$ das gemeinschaftliche Tripel der Kegelschnitte $A'$ und $B'$ ist; aus gleichem Grunde muss aber auch $QQ'Q''$ das gemeinschaftliche Tripel der Kegelschnitte $B'$ und $C'$, sowie $C'$ und $A'$ sein; hieraus folgt, dass $A'B'C'$ ein und demselben Büschel angehören müssen; denn gehörte $C'$ nicht dem Büschel $(A', B')$ an, so hätten $C'$ und $A'$ noch ein zweites von $QQ'Q''$ verschiedenes gemeinschaftliches Tripel; es ist aber nicht möglich, dass zwei verschiedene Kegelschnitte mehr, als ein gemeinschaftliches Tripel haben, weil

sie sonst identisch wären, folglich gehören die drei Kegelschnitte $A' B' C'$ zu demselben Büschel. Dieses Resultat lässt sich auch unabhängig von den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes als Satz aussprechen:

Hat man drei Kegelschnitte $CBA'$ eines Büschels und $ACB'$ eines zweiten Büschels, welches mit dem ersten den Kegelschnitt $C$ gemeinschaftlich hat, so bestimmen auch die Kegelschnittspaare $A, B$ und $A'B'$ zwei Büschel, welche einen Kegelschnitt 𝕮 gemeinschaftlich haben, d. h. die acht Mittelpunkte (Grundpunkte) der beiden Büschel $(A, B)$ und $(A', B')$ liegen auf einem und demselben Kegelschnitte. Oder mit andern auch Worten:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte $ABC$ hat und legt einmal durch die Schnittpunkte von $B$ und $C$ einen beliebigen Kegelschnitt $A'$, dann durch die Schnittpunkte von $C$ und $A$ einen beliebigen Kegelschnitt $B'$, so liegen die vier Schnittpunkte von $A'$ und $B'$ mit den vier Schnittpunkten von $A$ und $B$ auf einem und demselben Kegelschnitt. Hieraus ergiebt sich folgende Aussprache des Satzes:

Wenn man drei beliebige Kegelschnitte $ABC$ hat und legt durch irgend einen Punkt $P$ der Ebene drei neue Kegelschnitte, welche ausserdem durch die vier Schnittpunkte je zweier der gegebenen $B, C$; $C, A$; $A, B$ hindurchgehen, so treffen sich diese neuen Kegelschnitte ausser in $P$ noch in denselben drei Punkten.

Diese Sätze sind ihrer Allgemeinheit wegen bemerkenswerth und enthalten viele besondere Fälle in sich, welche anzuführen hier unterbleiben muss. Für den gegenwärtigen Zweck giebt uns der obige Satz das Mittel an die Hand, zu einem beliebigen Tripel der Tripelkurve $Q Q' Q''$ dasjenige Büschel des Kegelschnittnetzes zu finden, dessen gemeinschaftliches Tripel das gegebene $Q Q' Q''$ ist; denn zur Bestimmung dieses Büschels haben wir nach dem Obigen nur nöthig, die beiden Kegelschnitte $A'$ und $B'$ zu ermitteln, durch welche dies Büschel bestimmt wird. Dass sämmtliche Kegelschnitte des Netzes, welche ein Tripel der Tripelkurve $Q Q' Q''$ gemein haben, umgekehrt ein Büschel bilden müssen, ist von vorn herein klar, weil sie ausserdem noch ein

beliebiges anderes Paar konjugirter Punkte der Tripelkurve $P_1 Q_1$ gemein haben und daher einem Büschel angehören (§ 57). Zu jedem Tripel $Q\,Q'\,Q''$ der Tripelkurve gehört daher ein bestimmtes Büschel des Kegelschnittnetzes. Nehmen wir nun zwei beliebige Tripel der Tripelkurve $Q\,Q'\,Q''$ und $Q_1\,Q_1'\,Q_1''$, so lassen sich die zugehörigen Büschel des Kegelschnittnetzes so ermitteln, dass wir zu $Q$ den konjugirten Punkt $P$ der Tripelkurve suchen, welcher auf $Q'\,Q''$ liegt und der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Tripelkurve ist, sodann denjenigen Kegelschnitt $A'$ aus dem Büschel $(B, C)$, für welchen $Q$ und $Q'\,Q''$ Pol und Polare ist, und denjenigen Kegelschnitt $B'$ aus dem Büschel $(C, A)$, für welchen ebenfalls $Q$ und $Q'\,Q''$ Pol und Polare ist, aufsuchen; die beiden Kegelschnitte $A'\,B'$ bestimmen das Büschel des Kegelschnittnetzes, für welches $Q\,Q'\,Q''$ das gemeinschaftliche Tripel ist; in ganz analoger Weise werden zwei Kegelschnitte $A_1'\,B_1'$ gefunden, deren gemeinschaftliches Tripel das gegebene $Q_1\,Q_1'\,Q_1''$ ist. Nun haben wir aber drei Kegelschnitte $C\,A'\,A_1'$, welche einem Büschel $(B, C)$ angehören, und drei Kegelschnitte $C\,B'\,B_1'$, welche einem zweiten Büschel $(C, A)$ angehören; jene beiden Büschel haben den Kegelschnitt $C$ gemein, folglich müssen nach unserm obigen Satze auch die beiden durch die Kegelschnittpaare $(A'\,B')$ und $(A_1'\,B_1')$ bestimmten Büschel einen Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ gemein haben; für diesen sind daher die gemeinschaftlichen Tripel jener beiden Büschel, d. h. $Q\,Q'\,Q''$ und $Q_1\,Q_1'\,Q_1''$ ebenfalls Tripel konjugirter Punkte, und da bekanntlich zwei Tripel konjugirter Punkte in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt immer sechs Punkte eines Kegelschnitts sind (§ 55), so schliessen wir folgenden doppelten Satz:

Irgend zwei Büschel des Kegelschnittnetzes haben allemal einen Kegelschnitt gemeinschaftlich und

Irgend zwei Tripel der Tripelkurve liegen allemal auf einem Kegelschnitt.

Die letzte Eigenschaft lässt sich auch umkehren: Legt man durch irgend ein Tripel der Tripelkurve einen beliebigen Kegelschnitt, so schneidet derselbe die Kurve im Allgemeinen in drei neuen Punkten, welche wieder ein Tripel bilden; denn da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelkurve willkührlich gewählt werden dürfen und durch das erste Tripel und zwei Punkte der Tripelkurve ein Kegelschnitt bestimmt wird, so muss der dem zweiten

Tripel angehörige einzige dritte Tripel-Punkt sowohl auf dem Kegelschnitt als auch auf der Tripelkurve liegen, d. h. der sechste Schnittpunkt beider sein. Hieraus folgt mit Berücksichtigung der oben gefundenen Eigenschaft der Tripelkurve der Satz:

Wenn man durch drei Punkte eines Tripels der Tripelkurve und einen beliebigen Punkt $Q$ derselben ein Büschel von Kegelschnitten legt, so trifft jeder Kegelschnitt desselben die Tripelkurve im Allgemeinen noch in zwei neuen Punkten, deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt $P$ der Tripelkurve läuft, welcher der dem Punkte $Q$ konjugirte ist. Dieser Satz gilt auch allgemein, unabhängig von den Eigenschaften der Tripel, und führt zu einer Erzeugung der Kurve dritten Grades durch ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlbüschel, welche in projektivische Beziehung zu einander gesetzt werden. (Chasles, Comptes rendus 1853.)

Aus der obigen Bemerkung, dass zwei Tripel der Tripelkurve allemal auf einem Kegelschnitt liegen, folgt eine charakteristische Eigenschaft eines solchen Tripels in Rücksicht auf die Tripelkurve selbst. Denken wir uns nämlich durch das Tripel $Q\,Q'\,Q''$ der Tripelkurve insbesondere einen solchen Kegelschnitt gelegt, welcher in $Q$ und $Q'$ dieselben Tangenten mit der Tripelkurve hat, so hat er bereits fünf Punkte mit der Tripelkurve gemein, welche ihn zugleich bestimmen; sein sechster Schnittpunkt mit der Tripelkurve muss daher der dritte Tripelpunkt zu $Q$ und $Q'$ sein, d. h. $Q''$; es müssen daher auch in $Q''$ zwei Punkte des Kegelschnitts und der Tripelkurve zusammenfallen oder dieser Punkt muss ein Berührungspunkt beider Kurven sein; wir schliessen also:

Die drei Punkte eines Tripels der Tripelkurve liegen allemal so, dass ein Kegelschnitt die Tripelkurve in denselben berühren kann.

Da zwei Eckpunkte eines Tripels der Tripelkurve willkührlich auf derselben angenommen werden dürfen, der dritte Tripelpunkt dann aber vollständig und eindeutig bestimmt ist, so können wir, wenn ein Tripel $Q\,Q'\,Q''$ als bekannt angesehen wird, nach dem obigen Satze die Totalität aller übrigen Tripel leicht überschauen, indem wir alle möglichen Kegelschnitte durch die drei Punkte $Q\,Q'\,Q''$ legen, von denen jeder durch seine drei übrigen Schnittpunkte mit der Tripelkurve immer ein neues Tripel

derselben bestimmt. Kennen wir daher zwei Tripel der Tripelkurve $Q\,Q'\,Q''$ und $Q_1\,Q_1'\,Q_1''$ und wollen zu zwei auf der Tripelkurve willkührlich angenommenen Punkten $S\,S'$ als zwei Eckpunkten eines Tripels derselben den dritten Eckpunkt $S''$ finden, so haben wir nur nöthig, zwei Kegelschnitte durch die je fünf Punkte $Q\,Q'\,Q''\,S\,S'$ und $Q_1\,Q_1'\,Q_1''\,S\,S'$ zu legen, welche sich in dem gesuchten Punkte $S''$ auf der Tripelkurve schneiden müssen. Nach dem Früheren sind nun, wenn wir zwei beliebige Paare konjugirter Punkte auf der Tripelkurve $P$, $Q$ und $P'$, $Q'$ haben, die Schnittpunkte:

$$(P\,Q',\ P'\,Q) = Q'' \qquad (P\,P',\ Q\,Q') = P''$$

ein drittes Paar konjugirter Punkte und diese sechs Ecken des von den vier Geraden:

$$\begin{matrix} P & P' & P'' \\ P & Q' & Q'' \\ P' & Q'' & Q \\ P'' & Q & Q' \end{matrix}$$

gebildeten vollständigen Vierseits, welches der Tripelkurve einbeschrieben ist, haben zu ihren konjugirten Punkten beziehungsweise:

$$\left.\begin{matrix} Q & Q' & Q'' \\ Q & P' & P'' \\ Q' & P'' & P \\ Q'' & P & P' \end{matrix}\right\} \text{vier Tripel der Tripelkurve.}$$

Um jetzt zu zwei willkührlich auf der Tripelkurve gewählten Punkten $S\,S'$ als Eckpunkten eines Tripels der Tripelkurve den dritten Tripelpunkt $S''$ zu finden, haben wir nur durch die je fünf Punkte $Q\,Q'\,Q''\,S\,S'$ und $Q\,P'\,P''\,S\,S'$ einen Kegelschnitt zu legen; der vierte Schnittpunkt dieser beiden Kegelschnitte muss der gesuchte Punkt $S''$ der Tripelkurve sein. Wir haben hiernach beiläufig folgenden Satz gefunden:

Wenn man ein vollständiges Vierseit hat, dessen sechs Ecken zu je dreien auf vier Geraden liegen, so kann man auf vier Arten je drei derselben herausnehmen, welche ein Dreieck bilden, während die drei übrigen auf einer Geraden liegen. Umschreibt man diesen vier Dreiecken vier Kegelschnitte, welche ausserdem durch zwei beliebig gegebene feste Punkte gehen, so laufen alle vier Kegelschnitte durch ein

und denselben neuen Punkt. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist aus den Elementen bekannt, nämlich, dass die den vier Dreiecken, welche sich aus den sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden lassen, umschriebenen Kreise durch ein und denselben Punkt gehen (den Brennpunkt der Parabel, welche dem Vierseit einbeschrieben werden kann).

Wir können auch sehr einfach den vorigen Satz direkt beweisen; seien nämlich die drei Paar Gegenecken des vollständigen Vierseits $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$, so dass die vier Geraden je drei Punkte: $PP'P''$, $PQ'Q''$, $P'Q''Q$, $P''QQ'$ enthalten und ausserdem zwei beliebige Punkte $SS'$ gegeben, so werden die beiden durch je fünf Punkte $QQ'Q''SS'$ und $PP'Q''SS'$ gelegten Kegelschnitte einen vierten Punkt $S''$ gemein haben; da nun bekanntlich die Seiten zweier Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind, selbst einen andern Kegelschnitt berühren (§ 28), so müssen die Seiten der beiden Dreiecke $QQ'Q''$ und $SS'S''$ einen Kegelschnitt berühren und ebenso die Seiten der beiden Dreiecke $PP'Q''$ und $SS'S''$; diese beiden Kegelschnitte sind aber identisch, weil sie fünf Tangenten gemein haben, die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ und die Geraden $Q''QP'$ und $Q''Q'P$; folglich berühren auch $QQ'P''$ und $PP'P''$ diesen Kegelschnitt, d. h. derselbe berührt alle vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$; da nun die Seiten der beiden Dreiecke $QP'P''$ und $SS'S''$ einen Kegelschnitt berühren, so liegen auch die sechs Ecken derselben auf einem andern Kegelschnitt (§ 28), d. h. der durch $QP'P''SS'$ gelegte Kegelschnitt geht durch $S''$ und endlich aus demselben Grunde der durch $Q'P''PSS'$ gelegte Kegelschnitt; also laufen die vier angegebenen Kegelschnitte durch einen und denselben Punkt w. z. b. w.

Der Kegelschnitt, welcher die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die drei Seiten des Dreiecks $SS'S''$ berührt, kann auch als bestimmt angesehen werden durch zwei beliebige Tripel $QQ'Q''$ und $SS'S''$, deren sechs Seiten ihn berühren; da nun die Gerade, welche die drei zu $QQ'Q''$ konjugirten Punkte $PP'P''$ enthält, denselben Kegelschnitt berührt, so muss auch diejenige Gerade, welche die zu $SS'S''$ konjugirten Punkte $RR'R''$ enthält, ihn berühren und wir erkennen also, dass die acht Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite

einen und denselben Kegelschnitt berühren. Dies giebt folgenden Satz:

Die Seiten zweier Tripel der Tripelkurve berühren einen Kegelschnitt, der auch diejenigen beiden Geraden zu Tangenten hat, welche die den Eckpunkten der Tripel konjugirten Punkte der Tripelkurve enthalten, so dass also die Seiten zweier solcher vollständigen Vierseite, wie oben eines $(PQP'Q'P''Q'')$ in Betracht gekommen ist, immer einen und denselben Kegelschnitt berühren.

Von besonderem Interesse für die vorliegende Betrachtung ist es, die beiden willkührlichen Punkte $SS'$ auf zwei Diagonalen des vollständigen Vierseits anzunehmen: $S$ auf der Diagonale $PQ$ und $S'$ auf der Diagonale $P'Q'$, dann muss auch der dritte Punkt $S''$ auf der Diagonale $P''Q''$ liegen. In der That, durch die vier Seiten des vollständigen Vierseits und die Gerade $SS'$ als Tangenten ist derjenige Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ bestimmt, welcher zugleich $SS''$ und $S'S''$ berührt. Das Diagonaldreieck des einem Kegelschnitt umschriebenen vollständigen Vierseits ist immer ein Tripel in Bezug auf diesen Kegelschnitt (§ 30); folglich sind die drei Geraden $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ ein Tripel konjugirter Strahlen in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$; da nun $SS'$ eine Tangente desselben ist, welche $PQ$ in $S$ trifft, so wird die andere durch $S$ gehende Tangente der vierte harmonische Strahl, dem $SS'$ zugeordnet, sein, während $SP$ und der von $S$ nach dem Schnittpunkte $(P'Q', P''Q'')$ hingehende Strahl das andere Paar zugeordneter Strahlen ist; in gleicher Weise konstruiren wir die zweite durch $S'$ gehende Tangente des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$; diese Tangente, sowie die vorige müssen durch den vierten harmonischen Punkt auf $P''Q''$ gehen, welcher dem Schnittpunkte mit $SS'$ zugeordnet ist, während die beiden andern zugeordneten die Punkte $(PQ, P''Q'')$ und $(P'Q', P''Q'')$ sind; also ist dieser vierte harmonische Punkt der Schnittpunkt jener beiden Tangenten, d. h. der Punkt $S''$. Wir haben mithin gesehen, dass, wenn von den beiden willkührlich anzunehmenden Punkten $SS'$ der eine $S$ auf der Diagonale $PQ$ und der andere $S'$ auf $P'Q'$ liegt, dann der dritte $S''$ auf der dritten Diagonale $P''Q''$ des vollständigen Vierseits liegen muss.

Wählen wir nun, indem wir zu unserer Tripelkurve zurück-

kehren, auf welcher das vollständige Vierseit liegt, dessen drei Paar Gegenecken $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ drei Paare konjugirter Punkte der Tripelkurve sind, die beiden Punkte $S$ und $S'$ so, dass $S$ der dritte Schnittpunkt der Geraden $PQ$ mit der Tripelkurve und gleicherweise $S'$ der dritte Schnittpunkt von $P'Q'$ mit derselben wird, dann muss $S''$ auf der Geraden $P''Q''$ liegen und zugleich auf der Tripelkurve, weil $SS'S''$ ein Tripel der Tripelkurve bilden, folglich ist $S''$ der dritte Schnittpunkt der Geraden $P''Q''$ mit der Tripelkurve; wir erhalten hieraus folgenden Satz:

Wenn man ein beliebiges Tripel der Tripelkurve $QQ'Q''$ hat, so treffen die Seiten desselben $Q'Q''$, $Q''Q$, $QQ'$ die Kurve zum dritten Male in drei neuen Punkten $PP'P''$, welche die konjugirten Punkte der Tripelkurve zu den ersteren sind und in gerader Linie liegen; die drei Verbindungslinien $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ treffen ferner die Tripelkurve in drei neuen Punkten $SS'S''$, welche wiederum ein neues Tripel der Tripelkurve sind.

Hieraus folgt weiter, da wir wissen, dass die Tangenten in zwei konjugirten Punkten $PQ$ an der Tripelkurve sich in einem dritten Punkte $R$ derselben treffen und die drei Punkte $PQR$ ein Tripel der Tripelkurve bilden, folglich der konjugirte Punkt zu $R$ der dritte Schnittpunkt $S$ der Geraden $PQ$ mit der Tripelkurve sein muss: die dritten Schnittpunkte der Tangenten in $PP'P''$ oder in $QQ'Q''$ mit der Tripelkurve sind die drei Punkte $RR'R''$ und konjugirte Punkte zu den obigen Punkten $SS'S''$; da diese ein Tripel bilden, so müssen jene auf einer geraden Linie liegen, also:

Die drei Tangenten der Tripelkurve in den drei Eckpunkten eines Tripels derselben treffen sie in drei neuen Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Schneidet eine beliebige Gerade die Tripelkurve in drei Punkten und man zieht die Tangenten in denselben, so treffen sie die Tripelkurve in drei neuen Punkten, welche wieder auf einer Geraden liegen.

Diese Sätze gestatten ein eigenthümliches Fortschreiten zu einem Cyklus, indem man einerseits von einer Geraden zu einer nächsten u. s. f. oder anderseits von einem Tripel $QQ'Q''$ zu einem folgenden $SS'S''$ u. s. f. weiter geht; die Frage, ob ein solcher Cyklus sich schliesst oder bis ins Unendliche fortläuft,

ist dabei von besonderem Interesse, erfordert jedoch tiefer gehende Untersuchungen. (Vgl. Steiner, geom. Lehrsätze, Crelle's Journal Bd. XXXII pag. 182 und 300.)

Nehmen wir zwei beliebige Tripel der Tripelkurve $Q\,Q'\,Q''$, $Q_1\,Q_1'\,Q_1''$ und ihre konjugirten Punkte $P\,P'\,P''$, $P_1\,P_1'\,P_1''$, so haben wir zwei vollständige Vierseite, die der Tripelkurve einbeschrieben sind und deren acht Seiten, wie wir gesehen haben, einen und denselben Kegelschnitt berühren; bezeichnen wir diese acht Geraden:

$$\begin{array}{llll} Q'\,Q''\,P = \mathfrak{A} & & Q_1'\,Q_1''\,P_1 = \mathfrak{A}_1 \\ Q''\,Q\,P' = \mathfrak{B} & & Q_1''\,Q_1\,P_1' = \mathfrak{B}_1 \\ Q\,Q'\,P'' = \mathfrak{C} & & Q_1\,Q_1'\,P_1'' = \mathfrak{C}_1 \\ P\,P'\,P'' = \mathfrak{D} & & P_1\,P_1'\,P_1'' = \mathfrak{D}_1. \end{array}$$

Zugleich haben wir acht Tripel der Tripelkurve, nämlich:

$$\begin{array}{lcl} P'\,P''\,Q & \text{und} & P_1'\,P_1''\,Q_1 \\ P''\,P\,Q' & & P_1''\,P_1\,Q_1' \\ P\,P'\,Q'' & & P_1\,P_1'\,Q_1'' \\ Q\,Q'\,Q'' & & Q_1\,Q_1'\,Q_1''. \end{array}$$

Da irgend zwei Tripel der Tripelkurve immer sechs Punkte eines Kegelschnitts sind, also auch die Seiten zweier Tripeldreiecke immer sechs Tangenten eines Kegelschnitts sind, so haben wir ein Brianchon'sches Sechsseit:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{B}_1,$$

dessen Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden; diese sind:

$$P\,P_1 \quad P'\,P_1' \quad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1).$$

Der Schnittpunkt $(P\,P_1,\ P'\,P_1')$ liegt also in der Geraden $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1)$; anderseits haben wir das Brianchon'sche Sechsseit:

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{A}_1,$$

dessen Hauptdiagonalen:

$$Q\,Q_1 \quad Q'\,Q_1' \quad (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1)$$

sich ebenfalls in einem Punkte treffen, also liegt auch der Schnittpunkt:

$$(Q\,Q_1,\ Q'\,Q_1') \text{ in der Geraden } (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1);$$

folglich ist die Verbindungslinie:

$[(PP_1,\ P'P_1'),\ (Q\,Q_1,\ Q'\,Q_1')]$ identisch mit der Geraden $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1)$.

In gleicher Weise zeigen die beiden Brianchon'schen Sechsseite:

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{C}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1,$$

dass die Verbindungslinie:

$$[(P' P_1', P'' P_1''), (Q' Q_1', Q'' Q_1'')]$$

identisch mit der Geraden ($\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1$) ist, und endlich die beiden Brianchon'schen Sechsseite:

$$\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{A}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_1,$$

dass die Verbindungslinie:

$$[(P'' P_1'', P P_1), (Q'' Q_1'', Q Q_1)]$$

identisch mit der Geraden ($\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$) ist. Aus dem Brianchon'schen Sechsseit:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_1$$

folgt aber, dass die drei Hauptdiagonalen:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}\mathfrak{A}_1) \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}\mathfrak{B}_1) \quad (\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}\mathfrak{C}_1)$$

sich in einem Punkte treffen, also auch die mit ihnen identischen durch die $PP'P''$ und $QQ'Q''$ ausgedrückten Geraden; sehen wir die letzteren an, so erkennen wir, dass es die Verbindungslinien korrespondirender Ecken zweier Dreiseite sind, gebildet von den Geraden:

einerseits $\quad P P_1 \quad P' P_1' \quad P'' P_1''$
und anderseits $\quad Q Q_1 \quad Q' Q_1' \quad Q'' Q_1''$;

folglich müssen die korrespondirenden Seiten selbst sich in drei Punkten treffen, die auf einer Geraden liegen (§ 11), d. h. die drei Schnittpunkte:

$$(P P_1, Q Q_1) \quad (P' P_1', Q' Q_1') \quad (P'' P_1'', Q'' Q_1'')$$

liegen auf einer Geraden; diese drei Punkte:

$$P_2 \qquad P_2' \qquad P_2''$$

sind nach dem Früheren nichts anderes, als die dritten Schnittpunkte der Geraden $P P_1$, $P' P_1'$, $P'' P_1''$ mit der Tripelkurve; also haben wir den Satz:

Schneidet irgend eine Gerade die Tripelkurve in den drei Punkten $PP'P''$ und eine zweite Gerade in $P_1 P_1' P_1''$, so treffen die drei Geraden $PP_1$, $P'P_1'$, $P''P_1''$ die Tripelkurve in drei neuen Punkten $P_2 P_2' P_2''$, welche wiederum auf einer Geraden liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz willkührlich und giebt zu weiteren Beziehungen Anlass.)

Oder:

Hat man irgend zwei Tripel der Tripelkurve $QQ'Q''$ und $Q_1 Q_1' Q_1''$ (die allemal auf einem Kegelschnitt liegen), so treffen die drei Verbindungslinien $QQ_1$, $Q'Q_1'$, $Q''Q_1''$

die Tripelkurve in drei neuen Punkten, die allemal auf einer Geraden liegen. (Die Zuordnung ist dabei ganz gleichgültig.) Da die drei Punkte:

$$P_2 = (PP_1, QQ_1) \quad P_2' = (P'P_1', Q'Q_1') \quad P_2'' = (P''P_1'', Q''Q_1'')$$

auf einer Geraden liegen, so müssen ihre konjugirten:

$$Q_2 = (PQ_1, QP_1) \quad Q_2' = (P'Q_1', Q'P_1') \quad Q_2'' = (P''Q_1'', Q''P_1'')$$

ein Tripel bilden, also:

Hat man irgend ein Tripel $QQ'Q''$ der Tripelkurve und eine beliebige Gerade, welche derselben in den Punkten $P_1P_1'P_1''$ begegnet, so treffen die drei Verbindungslinien $QP_1$, $Q'P_1'$, $Q''P_1''$ die Tripelkurve in drei neuen Punkten $Q_2Q_2'Q_2''$, welche allemal ein Tripel der Tripelkurve bilden. (Die Zuordnung ist dabei völlig indifferent.)

Aus den verschiedenen Zuordnungen, welche hierbei möglich sind, werden sich neue Beziehungen ergeben, deren Aufsuchung hier zu weit führen würde. Wir bemerken nur noch, dass die vorige Betrachtung beiläufig eine Eigenschaft von acht Tangenten eines Kegelschnitts liefert; der polare Nebensatz lässt sich so aussprechen:

Hat man acht beliebige Punkte eines Kegelschnitts und theilt dieselben irgendwie in zwei Gruppen von je vier, welche in beliebiger Weise einander zugeordnet werden:

$$a\,b\,c\,d \quad \text{und} \quad a_1\,b_1\,c_1\,d_1,$$

bestimmt man ferner die drei Paar Schnittpunkte:

$$(ab, a_1b_1) = x \quad (ac, a_1c_1) = y \quad (ad, a_1d_1) = z$$
$$(cd, c_1d_1) = \xi \quad (bd, b_1d_1) = \eta \quad (bc, b_1c_1) = \zeta,$$

so schneiden sich die drei Verbindungslinien $x\xi$, $y\eta$, $z\zeta$ in einem Punkte.

Um die Totalität sämmtlicher Kegelschnitte, welche in einem Netze enthalten sind und sich zu Büscheln ordnen, in anschaulicher Weise zu übersehen, denken wir uns, indem wir von den drei willkührlich angenommenen Kegelschnitten $ABC$, welche nicht einem Büschel angehören, ausgehen, zunächst ein Büschel $(B, C)$ aus den beiden Kegelschnitten $B$ und $C$ hergestellt und verfolgen einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$, welcher das ganze Büschel $(B, C)$ durchläuft; der dritte feste Kegelschnitt $A$ und der

veränderliche $\mathfrak{A}$ konstituiren nun ein veränderliches Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) und alle Kegelschnitte desselben bilden die Gesammtheit der Kegelschnitte des Netzes, d. h. wenn wir an Stelle von $A\ B\ C$ drei beliebige andere Kegelschnitte des Netzes, welche nicht demselben Büschel angehören, in der angegebenen Weise zur Bildung des Netzes verwenden, so treten keine neuen Kegelschnitte mehr auf, sondern nur die früheren, aber in anderer Anordnung zu Büscheln vereinigt. Nehmen wir nämlich zunächst aus dem Büschel ($C$, $A$) einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ und bilden das veränderliche Büschel ($B$, $\mathfrak{B}$), so wird jeder Kegelschnitt $X$ desselben gleichzeitig in einem der vorigen Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) enthalten sein und umgekehrt; denn weil $B\ \mathfrak{B}\ X'$ einem Büschel angehören und $C\ \mathfrak{B}\ A$ einem andern, so wird nach dem oben bewiesenen Satze ein Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ existiren müssen, welcher gleichzeitig dem Büschel ($B$, $C$) und dem Büschel ($A$, $X$) angehört, oder die Mittelpunkte dieser beiden Büschel müssen auf ein und demselben Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ liegen; folglich gehört $X$ einem Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) an, bei welchem $\mathfrak{A}$ aus dem Büschel ($B$, $C$) genommen ist; also jeder Kegelschnitt aus dem veränderlichen Büschel ($B$, $\mathfrak{B}$) ist gleichzeitig unter den aus dem veränderlichen Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) hervorgehenden Kegelschnitten enthalten und umgekehrt. Es gehen daher dieselben Kegelschnitte des Netzes hervor, ob wir ($B$, $C$) und $A$ oder ($C$, $A$) und $B$ oder endlich auch ($A$, $B$) und $C$ in der angegebenen Weise zur Bildung des Netzes verwenden. Nehmen wir ferner einen beliebigen Kegelschnitt $D$ aus einem der unendlich-vielen Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) heraus, z. B. aus dem Büschel ($A$, $\mathfrak{A}_0$), so liegen einmal $D\ A\ \mathfrak{A}_0$ in einem Büschel, zweitens $B\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_0$ in einem Büschel, folglich haben die Büschel ($D$, $B$) und ($A$, $\mathfrak{A}$) einen Kegelschnitt gemein; dieser bestimmt mit $A$ das veränderliche Büschel ($A$, $\mathfrak{A}$) und kann also jedesmal auch aus dem Büschel ($B$, $D$) genommen werden, d. h. verwenden wir ($B$, $D$) und $A$ zur Bildung des Netzes, so erhalten wir dieselben Kegelschnitte, als wenn wir ($B$, $C$) und $A$ in gleicher Weise dazu verwenden; hieraus folgt weiter, dass auch ($B$, $A$) und $D$ dieselben Kegelschnitte des Netzes liefern, folglich auch ($B$, $E$) und $D$ und endlich auch ($D$, $E$) und $F$, wenn $D\ E\ F$ irgend drei nicht demselben Büschel angehörige Kegelschnitte bezeichnen, welche aus der Gesammtheit ($A$, $\mathfrak{A}$) entnommen sind. Aus dem Vorigen ergiebt sich unmittelbar, dass durch einen willkührlich an-

**genommenen Punkt** $p$ **der Ebene unendlich-viele Kegelschnitte des Netzes gehen, welche ein Büschel bilden**, denn man braucht nur durch $p$ den einzigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{A}_0$ zu legen, welcher dem Büschel $(B, C)$ angehört, und den einzigen bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{B}_0$, welcher dem Büschel $(C, A)$ angehört; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0$ bestimmen ein Büschel, welches sämmtliche Kegelschnitte des Netzes enthält, die durch $p$ gehen. Bestimmen wir noch den Kegelschnitt $\mathfrak{C}_0$, welcher durch $p$ geht und dem Büschel $(A, B)$ angehört, so gehört er, wie wir oben gesehen haben, gleichzeitig dem Büschel $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ an. Ferner folgt hieraus, dass **durch zwei willkührlich in der Ebene angenommene Punkte** $p$ **und** $p_1$ **nur ein einziger bestimmter Kegelschnitt des Netzes hindurchgeht**, denn es giebt in dem vorhin bestimmten Büschel $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$ nur einen einzigen bestimmten Kegelschnitt, welcher durch den gegebenen Punkt $p_1$ geht. Das Kegelschnittnetz ist also ein Gebilde von doppelter Unendlichkeit, weil jeder Kegelschnitt desselben zwei Willkührlichkeiten enthält.

Die vorige Bemerkung giebt zugleich Aufschluss über die besondere Natur der in einem Netze enthaltenen Kegelschnitte. Es giebt nämlich **unendlich-viele gleichseitige Hyperbeln** in dem Netze, welche ein besonderes Büschel des Netzes bilden; nehmen wir die beiden obigen Punkte $p p_1$ im Unendlichen in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen an, so geht durch sie eine bestimmte gleichseitige Hyperbel des Netzes; nehmen wir ein zweites Paar unendlich-entfernter Punkte $p p_1$ in zwei rechtwinkligen Richtungen an, so bestimmt dasselbe eine zweite gleichseitige Hyperbel; diese beiden bestimmen ein ganzes Büschel von gleichseitigen Hyperbeln (§ 38), welche dem Netze angehören; weiter giebt es im Allgemeinen keine gleichseitige Hyperbel in dem Netze; denn käme noch eine dritte vor, welche nicht dem vorigen Büschel angehörte, so würde sie mit jeder der früheren ein neues Büschel von lauter gleichseitigen Hyperbeln erzeugen und es müssten daher alle Kegelschnitte des Netzes gleichseitige Hyperbeln sein; sind daher die Kegelschnitte $A B C$, welche wir als gegeben ansehen, nicht alle drei gleichseitige Hyperbeln, so giebt es in dem Netze nur ein einziges bestimmtes Büschel gleichseitiger Hyperbeln; wenn aber die drei gegebenen Kegelschnitte $A B C$ selbst gleichseitige Hyperbeln sind, so

besteht das Netz aus lauter gleichseitigen Hyperbeln und hat daher einen speciellen Charakter. Unter den Kegelschnitten des Netzes giebt es ferner im Allgemeinen unendlich-viele Parabeln; lassen wir nämlich die willkührlich anzunehmenden Punkte $p p_1$ in einen Punkt der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ zusammenfallen, so wird der durch jene bestimmte Kegelschnitt des Netzes eine Parabel, weil er $\mathfrak{G}_\infty$ berührt. Jeder Punkt von $\mathfrak{G}_\infty$ ist also der Mittelpunkt einer bestimmten dem Netze angehörigen Parabel, welche nach dem Obigen leicht herzustellen ist. Denken wir uns zwei solche Parabeln des Netzes konstruirt, deren unendlich-entfernte Punkte $p$, $\pi$ in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen, so bestimmen dieselben ein Büschel des Netzes, in welchem nothwendig ein Kreis vorkommen muss, oder die vier Schnittpunkte dieser beiden Parabeln liegen auf einem Kreise (§ 38); dieses ist im Allgemeinen der einzige Kreis unter den Kegelschnitten des Netzes; denn konstruiren wir ein anderes Paar Parabeln, deren unendlich-entfernte Punkte $p'$ und $\pi'$ ebenfalls in zwei zu einander rechtwinkligen Richtungen liegen, so müssen ihre Schnittpunkte auf demselben Kreise liegen; seien nämlich $P$ und $\Pi$ die beiden ersten, $P'$ und $\Pi'$ die beiden andern Parabeln, so können wir $P \Pi P'$ für die drei ursprünglichen das Netz erzeugenden Kegelschnitte $ABC$ setzen; in dem Büschel $(P, \Pi)$ ist der Kreis $\mathfrak{K}$ enthalten; $\mathfrak{K}$ und $P'$ bestimmen ein zweites Büschel des Netzes, in welchem nothwendig noch eine Parabel ausser $P'$ enthalten sein muss, welche ihren unendlich-entfernten Punkt in einer senkrechten Richtung zu derjenigen des unendlich-entfernten Punktes von $P'$ hat; ist $p'$ der letztere und $\pi'$ der erstere, so giebt es durch $\pi'$ nur eine einzige Parabel des Netzes $\Pi'$, welche die eben genannte ist; daher haben auch umgekehrt die beiden Parabeln $P' \Pi'$ ihre Schnittpunkte auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}$ ist gemeinschaftlich den beiden Büscheln $(P, \Pi)$ und $(P', \Pi')$. Endlich kommen unter den Kegelschnitten des Netzes auch Linienpaare in unendlicher Menge vor; jedes Büschel enthält im Allgemeinen drei Linienpaare, von denen eines immer reell ist. Der von allen diesen Geraden umhüllte Ort ist eine bestimmte Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche mit der Tripelkurve in innigem Zusammenhange steht. Da nämlich durch einen beliebigen Punkt $p$ der Ebene nur einfach unendlich-viele Kegelschnitte des Netzes gehen, welche ein Büschel bilden $(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0)$,

so gehen durch den Punkt $p$ im Allgemeinen nur drei gerade Linien, welche Theile von Linienpaaren sind, die, als Kegelschnitte betrachtet, dem Netze angehören; also ist der Ort von diesen Geraden eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Vermöge der obigen Erzeugung des Netzes können wir die Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ in der Weise konstruiren, dass wir einen veränderlichen Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ das Büschel $(B, C)$ durchlaufen lassen und für die beiden Kegelschnitte $A$ und $\mathfrak{A}$ jedesmal die sechs gemeinschaftlichen Sekanten ermitteln, welche den gesuchten Ort $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen.

Dieses Resultat lässt sich in Form eines Satzes aussprechen, der zu vielen interessanten speciellen Fällen Veranlassung bietet:

*Drei beliebige Kegelschnitte $ABC$ haben zu zweien zusammengefasst drei Mal je sechs gemeinschaftliche Sekanten; diese achtzehn Geraden sind Tangenten ein und derselben Kurve dritter Klasse.*

Zu der Tripelkurve hat die gefundene Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ eine besondere leicht erkennbare Beziehung; eine gemeinschaftliche Sekante zweier Kegelschnitte des Netzes hat nämlich die Eigenschaft, dass die beiden Punktsysteme, welche ihr in Bezug auf beide Kegelschnitte zugehören, identisch sind (§ 61); nehmen wir nun irgend einen dritten Kegelschnitt des Netzes, welcher nicht mit den beiden vorigen demselben Büschel angehört, so gehört in Bezug auf ihn jener Geraden ein zweites Punktsystem zu und die beiden auf einander liegenden Punktsysteme haben im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Paar konjugirter Punkte $P, Q$. Da dies konjugirte Punkte für drei Kegelschnitte des Netzes sind, welche nicht demselben Büschel angehören, so sind es konjugirte Punkte für sämmtliche Kegelschnitte des Netzes, also ein Paar konjugirter Punkte der Tripelkurve; eine gemeinschaftliche Sekante zweier Kegelschnitte des Netzes ist mithin allemal die Verbindungslinie zweier konjugirten Punkte $P, Q$ der Tripelkurve und auch umgekehrt; denn ziehen wir die Verbindungslinie irgend eines Paares konjugirter Punkte der Tripelkurve $P, Q$ und nehmen einen beliebigen Punkt $p$ derselben, so geht durch $p$ ein einziger bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ aus dem Büschel $(B, C)$ und ein einziger bestimmter Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ aus dem Büschel $(C, A)$; die beiden Kegelschnitte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ müssen $PQ$ ausser in $p$ in einem und demselben Punkte $\pi$ treffen, welcher der vierte harmonische dem $p$ zugeordnete ist, während $P$ und $Q$ die beiden andern zugeordneten

Punkte sind; folglich ist $PQ$ eine gemeinschaftliche Sekante der beiden Kegelschnitte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Netzes. Wir haben also folgenden Satz:

Die Verbindungslinien sämmtlicher Paare konjugirter Punkte der Tripelkurve: $PQ$ umhüllen eine Kurve dritter Klasse, welche identisch ist mit derjenigen, die von sämmtlichen Linienpaaren, welche unter den Kegelschniten des Netzes auftreten, berührt wird.

Die Verbindungslinie $PQ$ zweier konjugirter Punkte der Tripelkurve schneidet im Allgemeinen jeden Kegelschnitt des Netzes in zwei Punkten, welche harmonisch liegen mit $P$, $Q$ und zugeordnet sind, also immer in Punktenpaaren ein und desselben Punktsystems, dessen Asymptotenpunkte $P$, $Q$ sind. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Eine Gerade von solcher Beschaffenheit, dass sie drei beliebig in der Ebene gegebene Kegelschnitte $ABC$ in drei Punktenpaaren eines Punktsystems (sechs Punkten einer Involution) trifft, umhüllt eine Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$, welche zugleich die achtzehn gemeinschaftlichen Sekanten je zweier der gegebenen drei Kegelschnitte berührt. Die Asymptotenpunkte der Punktsysteme auf allen solchen Geraden liegen auf einer Kurve dritten Grades (der Tripelkurve von den drei Kegelschnitten $ABC$). Es ist leicht, den Berührungspunkt einer Geraden $PQ$ mit der von ihr eingehüllten Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu ermitteln; denken wir uns ein der Tripelkurve einbeschriebenes vollständiges Vierseit, wie es früher in Betracht gezogen ist: $PQP'Q'P''Q''$, dessen drei Paar Gegenecken aus drei Paaren konjugirter Punkte der Tripelkurve bestehen, in der Weise verändert, dass wir ein Paar $PQ$ festhalten und das zweite Paar $P'Q'$ ihm allmählich nähern, indem wir zuletzt $P'$ mit $P$ und also auch $Q'$ mit $Q$ zusammenfallen lassen, dann geht $P''$ in den Schnittpunkt der beiden Tangenten an der Tripelkurve in $P$ und $Q$, und $Q''$ also in den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie $PQ$ mit der Tripelkurve über; es ist aber $Q'' = (PQ', P'Q)$; um nun den Schnittpunkt $(PQ, P'Q')$ für den Grenzfall des Zusammenfallens von $P$, $Q$ mit $P'Q'$ zu ermitteln, haben wir nur die harmonische Eigenschaft des vollständigen Vierecks zu berücksichtigen, um zu

erkennen, dass der gesuchte Berührungspunkt der vierte harmonische, dem dritten Schnittpunkt $Q''$ zugeordnete Punkt sein wird; also: Die veränderliche Verbindungslinie $PQ$ zweier konjugirter Punkte der Tripelkurve berührt die von ihr eingehüllte Kurve dritter Klasse in dem vierten harmonischen Punkt, welcher dem dritten Schnittpunkt von $PQ$ mit der Tripelkurve zugeordnet ist, während $P$ und $Q$ das andere Paar zugeordnet-harmonischer Punkte sind.

Hieraus folgt, dass die Tripelkurve $C^{(3)}$ und die Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ sich in denjenigen Punkten, in welchen sie sich treffen, auch berühren, d. h. dieselbe Tangente haben, oder anders ausgedrückt, dass die sämmtlichen Schnittpunkte beider Kurven paarweise zusammenfallen. Denn sei $Q$ ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ und denken wir uns die Tangente in $Q$ an der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ gezogen, so muss von ihren beiden übrigen Schnittpunkten mit der Tripelkurve, die $P$ und $P'$ heissen mögen, einer der konjugirte Punkt $P$ zu $Q$ sein, weil $\mathfrak{K}^{(3)}$ der von sämmtlichen Verbindungslinien $PQ$ umhüllte Ort ist, und der andere $P'$ mit $Q$ zusammenfallen, weil $Q$ der Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, also der vierte harmonische Punkt zu $PQP'$; da nun dieser mit $Q$ zusammenfällt, so muss auch $P'$ in $Q$ hineinfallen (§ 8); der übrigens noch denkbare Fall, dass $P$ und $P'$ konjugirte Punkte der Tripelkurve sein könnten, zeigt sich als unzulässig; denn da $Q$ der Berührungspunkt mit $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, so müsste sein zugeordneter vierter harmonischer Punkt zu $PP'$ der dritte Schnittpunkt mit der Tripelkurve sein, also wiederum $Q$; wenn aber von vier harmonischen Punkten zwei zugeordnete zusammenfallen, so muss auch von dem andern Paare zugeordneter Punkte einer hineinfallen; fiele der vierte harmonische Punkt aber nicht auf $Q$, so hätte die Gerade vier Schnittpunkte mit der Tripelkurve, was unmöglich ist; folglich muss $P$ oder $P'$ mit $Q$ zusammenfallen, wie oben behauptet ist. Ein solcher Schnittpunkt $Q_0$ der beiden Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ besitzt also die Eigenthümlichkeit, dass die Tangente in ihm für beide Kurven dieselbe ist; diese Tangente schneidet die Tripelkurve $C^{(3)}$ zum dritten Mal in dem Punkte $P_0$, welcher der konjugirte zu $Q_0$ ist. Nun ist früher bewiesen worden, dass die Tangente in $P_0$ die Tripelkurve $C^{(3)}$ zum dritten Male in dem-

jenigen Punkte schneidet, der konjugirt ist zum dritten Schnittpunkte von $P_0 Q_0$ mit $C^{(3)}$; da dieser aber $Q_0$ selbst ist, so ist sein konjugirter wieder $P_0$, d. h. die Tangente in $P_0$ schneidet die Tripelkurve $C^{(3)}$ in drei zusammenfallenden Punkten; sie heisst eine Wendetangente und ihr Berührungspunkt $P_0$ ein Wendepunkt der Tripelkurve. Die weitere Ausführung dieser Betrachtung giebt die Anzahl und gegenseitige Lage der Wendepunkte einer Kurve dritten Grades $C^{(3)}$. Auch für die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ haben die gemeinschaftlichen Punkte $Q_0$ von $\mathfrak{K}^{(3)}$ und $C^{(3)}$, in welchen diese Kurven sich zugleich berühren, eine eigenthümliche Bedeutung. Im Allgemeinen giebt es nämlich von einem beliebigen Punkte aus drei Tangenten an die Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$; liegt der angenommene Punkt auf der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ selbst, so fallen zwei durch ihn gehende Tangenten in die eine zusammen, welche $\mathfrak{K}^{(3)}$ in dem angenommenen Punkte selbst berührt, und es bleibt noch eine dritte Tangente übrig, welche im Allgemeinen von diesen beiden zusammenfallenden verschieden ist. Ist aber insbesondere der angenommene Punkt ein Schnittpunkt $Q_0$ der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ mit $C^{(3)}$, so muss auch die dritte Tangente mit den beiden erstern zusammenfallen. Dies können wir auf folgende Art erkennen: Irgend zwei Paare konjugirter Punkte der Tripelkurve $P, Q$ und $P' Q'$ bestimmen, wie wir wissen, ein drittes Paar $(PP', QQ') \equiv P''$ und $(PQ', QP') \equiv Q''$ und das vollständige Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ drei Paare konjugirter Punkte der Tripelkurve sind, hat zu seinen drei Diagonalen $PQ$, $P'Q'$, $P''Q''$ drei Tangenten der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$; denken wir uns nun den Wendepunkt $P_0$ als drei unendlich-nahe Punkte $P P' P''$, deren Verbindungslinie die Wendetangente in $P_0$ ist, so fallen $Q Q' Q''$ in $Q_0$ zusammen (ohne indessen in gerader Linie zu liegen, da nur immer zwei $Q$ mit dem dritten $P$ in einer Geraden liegen); von dem vollständigen Vierseit wird also eine Seite die Wendetangente in $P_0$ und die drei andern fallen auf $P_0 Q_0$ zusammen; die drei Diagonalen fallen folglich auch auf diese Gerade und der Punkt $Q_0$ ist also ein solcher ausgezeichneter Punkt der Kurve $\mathfrak{K}^{(3)}$, dass durch ihn drei zusammenfallende Tangenten $(Q_0 P_0)$ derselben gehen; er heisst ein Rückkehrpunkt und die Tangente in ihm eine Rückkehrtangente der Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$. Die Schnittpunkte der beiden Kurven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind also für die letztere

zugleich Rückkehrpunkte; in ihnen berühren sich die beiden Kurven und die Tangenten in diesen Punkten gehen durch die Wendepunkte von $C^{(3)}$.

Wir brechen hier die allgemeine Betrachtung des Kegelschnittnetzes ab, da eine weitere Ausführung die dem Buche gesteckten Grenzen überschreiten und zu einer Theorie der Kurven dritten Grades führen würde, in Bezug auf welche wir auf L. Cremona's Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, Bologna 1862, verweisen, wo auch die den Gegenstand betreffende Literatur in vollständigster Weise angeführt ist. Wir wollen nur noch auf einen besonderen Fall des Kegelschnittnetzes hinweisen, welcher zu vielen Beziehungen zwischen Kegelschnitten und, noch weiter specialisirt, zu bekannten Resultaten aus der Kreistheorie führt. Wenn nämlich die drei zur Bestimmung des Netzes erforderlichen Kegelschnitte $A\ B\ C$ die besondere Lage haben, dass zwei (reelle oder imaginäre) Punkte ihnen gemeinschaftlich sind, d. h. eine gemeinschaftliche Sekante aller drei Kegelschnitte existirt, dann muss die Tripelkurve zerfallen in diese Gerade und einen Kegelschnitt; denn da der gemeinschaftlichen Sekante dasselbe Punktsystem rücksichtlich aller drei Kegelschnitte zugehört, so ist jedes Paar konjugirter Punkte desselben ein Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ der Tripelkurve; dieser gehört also die ganze Gerade an und der übrige Theil kann nur noch ein Kegelschnitt sein; letzterer geht auch durch die beiden gemeinschaftlichen Punkte der drei Kegelschnitte $A\ B\ C$ oder hat dasselbe Punktsystem auf der gemeinschaftlichen Sekante von $ABC$ zu seinem zugehörigen, weil die Asymptotenpunkte desselben als ein besonderes zusammenfallendes Paar konjugirter Punkte $P$, $Q$ der Tripelkurve anzusehen, also die beiden Doppelpunkte derselben sind. Jeder dieser Punkte ist zugleich als ein Theil der Kurve dritter Klasse $\mathfrak{K}^{(3)}$ anzusehen, welche von allen Verbindungsstrahlen $PQ$ umhüllt wird. Diese Kurve zerfällt daher in drei Punkte; der dritte Punkt ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt derjenigen drei gemeinschaftlichen Sekanten der Kegelschnittpaare $B$, $C$; $C$, $A$; $A$, $B$, welche den übrigen Theil des Linienpaares im Büschel bilden, zu dem die eine gemeinschaftliche Sekante aller drei Kegelschnitte $A\ B\ C$ gehört (§ 39). Die Verbindungslinien aller Paare konjugirter Punkte $P\,Q$ auf dem Kegelschnitt, welcher von der Tripelkurve übrig bleibt, laufen

daher sämmtlich durch einen Punkt. Wir können also folgenden Satz aussprechen:

Wenn drei Kegelschnitte $ABC$ eine (reelle oder ideelle) gemeinschaftliche Sekante $s$ haben, so haben je zwei derselben $B$ und $C$, $C$ und $A$, $A$ und $B$ noch eine gemeinschaftliche Sekante $t\,t'\,t''$, den übrigen Theil des Linienpaares, welches in je einem der drei Büschel $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$ vorkommt und von welchem $s$ ein Theil ist. Die drei Geraden $t\,t'\,t''$ schneiden sich in einem Punkte $O$. Von den drei gemeinschaftlichen Tripeln der drei Büschel liegen drei Eckpunkte auf $s$, die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher die Eigenschaft besitzt, dass von jedem Punkte $P$ desselben die drei Polaren in Bezug auf $ABC$ sich wieder in einem Punkte $Q$ desselben Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ treffen; die Verbindungslinie $PQ$ läuft durch den festen Punkt $O$, der zugleich der Pol der Geraden $s$ in Bezug auf den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist.

Zu ganz bekannten Resultaten werden wir geführt durch weitere Specialisirung der allgemeinen Betrachtung; nehmen wir nämlich insbesondere für die drei beliebig zu wählenden Kegelschnitte $A\,B\,C$ drei Kreise an, so haben dieselben die unendlich-entfernte Gerade zu einer gemeinschaftlichen (ideellen) Sekante $s$; der Punkt $O$ wird der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise $A\,B\,C$, der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der die drei angenommenen Kreise rechtwinklig schneidende Kreis und $O$ sein Mittelpunkt. Das Kegelschnittnetz besteht in diesem Falle aus lauter Kreisen, was mit dem oben gefundenen Resultat, dass in dem allgemeinen Kegelschnittnetz nur ein Kreis vorkommt, in keinem Widerspruch steht.

Die Durchführung der polar gegenüberstehenden Betrachtung, welche, gleichfalls von drei beliebigen Kegelschnitten $A\,B\,C$ ausgehend, die drei Schaaren $(B, C)$ $(C, A)$ $(A, B)$ und die durch sie bestimmte Tripelkurve dritter Klasse ins Auge fasst, darf dem Leser überlassen bleiben, da sie in allen wesentlichen Punkten der in diesem Paragraphen durchgeführten Untersuchung nachgebildet werden kann.

---

# Anhang.

Ein Kegelschnitt ist vollständig und eindeutig bestimmt, sobald man von ihm den Mittelpunkt $m$ und ein Tripel konjugirter Punkte $xyz$ kennt (§ 45), oder allgemeiner: ein Involutions-Netz ist vollständig bestimmt durch ein Tripel konjugirter Punkte und ein Paar von Pol und Polare (§ 57); wählt man für das letztere die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ und den Mittelpunkt $m$, so lässt sich leicht das demselben zugehörige Strahlsystem (das System der konjugirten Durchmesser) und das Axenpaar ermitteln mit den ihm zugehörigen Punktsystemen. Bezeichnen $P_a$ und $P_b$ die Potenzen der auf den beiden Axen des Netzes (oder Kegelschnitts) befindlichen, demselben zugehörigen Punktsysteme (d. h. für den Fall der Ellipse die Quadrate der Halbaxen derselben), so haben wir in § 34 für die Verbindungen $(P_a + P_b)$ und $P_a \,.\, P_b$ folgende Ausdrücke gefunden:

(1.) $$P_a + P_b = P_{\mathfrak{K}},$$

wo $P_{\mathfrak{K}}$ bedeutet die Potenz des Mittelpunktes $m$ in Bezug auf den dem Tripeldreieck $xyz$ umschriebenen Kreis, und

(2.) $$P_a \,.\, P_b = 2 \,.\, p_1 p_2 p_3 r,$$

wo $p_1\, p_2\, p_3$ bedeuten die Perpendikel, welche vom Mittelpunkte $m$ auf die Seiten des Tripeldreiecks $xyz$ herabgelassen werden und $r$ den Radius des dem Dreieck $xyz$ umschriebenen Kreises.

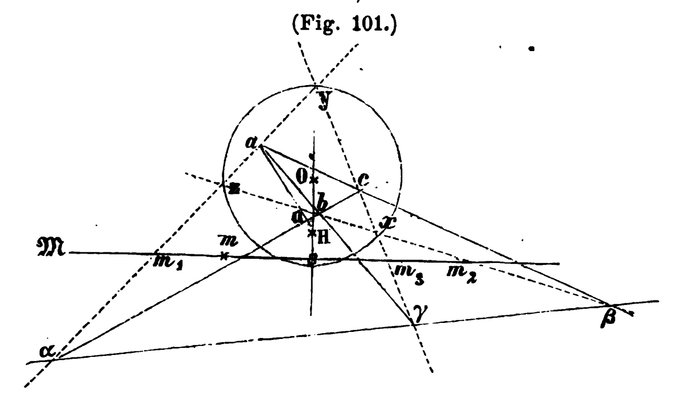
Aehnliche Ausdrücke lassen sich für diese Verbindungen ermitteln, sobald der Kegelschnitt oder das Netz durch andere Bestimmungsstücke gegeben ist; wir haben in §§ 33 und 58 irgend ein Paar konjugirter Durchmesser mit den auf ihnen befindlichen Punktsystemen zur Bestimmung angenommen und daraus die bekannten Beziehungen zwischen den konjugirten Durchmessern abgeleitet. Andere Bestimmungsarten von besonderem Interesse sind die beiden folgenden:

1) Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts und drei Tangenten, 2) der Mittelpunkt und drei beliebige Punkte desselben sind zur Bestimmung gegeben.

In diesen beiden Fällen hat Steiner für die Verbindung $P_a \cdot P_b$ interessante Ausdrücke angegeben*), und Faure für die Verbindung $P_a + P_b$**), ohne dass dieselben, soviel mir bekannt ist, auf synthetischem Wege bewiesen worden sind. Es scheint daher nicht unangemessen, eine einfache Ableitung jener Ausdrücke hier nachträglich mitzutheilen, wie sie aus den in dem Buche dargelegten Betrachtungen sich ergiebt.

1) Wenn man von einem Kegelschnitte den Mittelpunkt $m$ und drei Tangenten, welche ein Dreieck $abc$ bilden, kennt, so kann jede beliebige durch $m$ gezogene Gerade $\mathfrak{M}$ als die Mittelpunktslinie einer Kegelschnittschaar von vier Tangenten betrachtet werden, deren drei die Seiten des Dreiecks $abc$ sind; dieser Schaar gehört offenbar auch der gesuchte Kegelschnitt an und die vierte gemeinschaftliche Tangente der Schaar wird nach § 44 so gefunden: Die Mitten der Dreiecksseiten $bc$, $ca$, $ab$ seien

(Fig. 101.)




$a_1 b_1 c_1$; die Seiten dieses neuen Dreiecks $a_1 b_1 c_1$ treffen $\mathfrak{M}$ in den Punkten $m_1 m_2 m_3$; zieht man $m_1 a$, $m_2 b$, $m_3 c$ und macht $m_1 \alpha = a m_1$; $m_2 \beta = b m_2$; $m_3 \gamma = c m_3$, so liegen die drei Punkte $\alpha \beta \gamma$ auf einer Geraden, welche die gesuchte vierte Tan-

*) J. Steiner: „Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte," Crelle's Journal für Mathematik, Bd. XXX, Seite 97.

**) Nouvelles Annales de mathématiques p. M. Terquem et M. Gerono, tome XX, pag. 56.

gente der Schaar ist. Die drei Geraden $m_1 a$, $m_2 b$, $m_3 c$ sind die Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der Schaar gebildeten vollständigen Vierseits und schneiden sich in den Punkten $x\,y\,z$, die ein Tripel konjugirter Punkte für sämmtliche Kegelschnitte der Schaar bilden. Beschreiben wir um das Dreieck $x\,y\,z$ einen Kreis, so ist die Potenz des gegebenen Mittelpunktes $m$ in Bezug auf diesen Kreis nach dem Früheren gleich $P_a + P_b$. Sei $O$ der Mittelpunkt dieses um $x\,y\,z$ beschriebenen Kreises und aus $O$ ein Perpendikel auf die Gerade $\mathfrak{M}$ herabgelassen, welches in $s$ treffen möge, so enthält dies Perpendikel nothwendig den Höhenpunkt $H$ des Dreiecks $abc$ (§ 44) und es ist:

$$sO^2 - sH^2 = mO^2 - mH^2 = m_1 O^2 - m_1 H^2;$$

ferner, wenn wir mit $R$ den Radius des dem Dreieck $x\,y\,z$ umbeschriebenen Kreises bezeichnen:

$$m_1 y \,.\, m_1 z = m_1 O^2 - R^2,$$

und da $y$ und $z$ harmonisch-zugeordnete Punkte sind mit $a\alpha$, deren Mitte $m_1$ ist, so folgt:

$$m_1 y \,.\, m_1 z = m_1 a^2 = m_1 O^2 - R^2;$$

wir erhalten also:

$$mO^2 - R^2 = mH^2 + m_1 a^2 - m_1 H^2.$$

Denken wir uns die Höhe $Ha$ gezogen, welche die gegenüberliegende Seite $bc$ in $\mathfrak{a}$ treffen mag, so ist $\mathfrak{a}$ ein Punkt im Kreise, der über $a\alpha$ als Durchmesser beschrieben werden kann, folglich:

$$Ha \,.\, H\mathfrak{a} = Hm_1^2 - m_1 a^2$$

und hiernach

$$mO^2 - R^2 = mH^2 - Ha \,.\, H\mathfrak{a};$$

$mO^2 - R^2$ ist aber die Potenz des Punktes $m$ in Bezug auf den dem Dreieck $xyz$ umschriebenen Kreis, also nach dem Obigen:

$$P_a + P_b = mH^2 - Ha \,.\, H\mathfrak{a},$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite drückt nichts anderes aus, als die Potenz des Punktes $m$ in Bezug auf einen neuen Kreis, der den Punkt $H$ zum Mittelpunkt und das Dreieck $a\,b\,c$ zum Tripeldreieck hat; dieser Kreis $\mathfrak{K}$ ist nur reell, wenn der Punkt $H$ ausserhalb des Dreiecks $a\,b\,c$ liegt, d. h. das Dreieck selbst ein stumpfwinkliges ist; der imaginäre Kreis kann aber

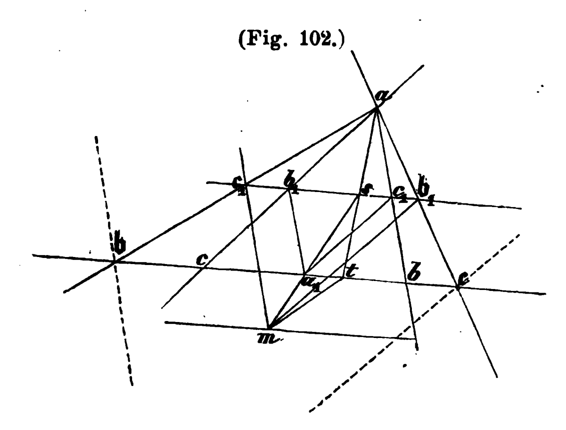
durch das ihm zugehörige reelle Involutions-Netz vertreten werden, das Quadrat des Radius durch das Produkt $Ha \,.\, H\mathfrak{a}$, welches in dem nicht reellen Falle negativ wird, weil $a$ und $\mathfrak{a}$ auf entgegengesetzten Seiten von $H$ liegen. Unter dieser Modifikation können wir allgemein den Satz aussprechen:

$$\text{(I.)} \qquad P_a + P_b = P_{\mathfrak{K}}.$$

**Wird einem beliebigen Dreiseit ein Kegelschnitt einbeschrieben, so ist die Summe der Potenzen der auf seinen Axen befindlichen zugehörigen Punktsysteme (ev. die Summe der Quadrate der Halbaxen) gleich der Potenz des Mittelpunktes vom Kegelschnitt in Bezug auf denjenigen Kreis, welcher den Höhenpunkt des gegebenen Dreiseits zu seinem Mittelpunkt und die Ecken desselben zu einem Tripel konjugirter Punkte hat.**

Um einen Ausdruck für die zweite Verbindung $P_a \,.\, P_b$ zu erhalten, scheint es einfacher, durch $m$ eine besondere Linie $\mathfrak{M}$ zu legen, die durch die Mitte $a_1$ der Seite $b\,c$ des gegebenen Dreiecks hindurchgeht; trifft $m\,a_1$ die Verbindungslinie $b_1\,c_1$ in $s$ und $a\,s$ die Seite $bc$ in $t$, so ist $t$ der Berührungspunkt des Kegelschnitts mit der Seite $bc$, was sich auch leicht a posteriori nachweisen lässt. Da nämlich $m$ der Mittelpunkt und $a\,b$ eine

(Fig. 102.)




Tangente des Kegelschnitts ist, so erhalten wir die mit ihr parallele Tangente, indem wir eine von $m$ ebenso weit wie $a\,b$ nach entgegengesetzter Seite liegende Parallele ziehen; diese

möge $bc$ in $\mathfrak{b}$ treffen; ebenso erhalten wir die parallele Tangente zu $ac$, indem wir eine von $m$ ebenso weit wie $ac$ abstehende nach entgegengesetzter Seite hin liegende Parallele ziehen, die $bc$ in $\mathfrak{c}$ treffen möge. Sämmtliche Paare paralleler Tangenten treffen nun die feste Tangente $bc$ in Punktenpaaren eines Punktsystems (§ 31), dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt von $bc$ mit dem Kegelschnitt ist; um ihn zu finden, ziehen wir durch $m$ Parallele zu jenen beiden Tangenten, oder $m\mathfrak{c}_1$ parallel zu $a_1b_1$ und $m\mathfrak{b}_1$ parallel zu $a_1c_1$, so dass $\mathfrak{c}_1$ die Mitte von $a\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ die Mitte von $a\mathfrak{c}$ wird und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ mit $b_1c_1$ auf derselben Geraden liegen; dann ist wegen der Parallelität:

$$\frac{sb_1}{s\mathfrak{c}_1} = \frac{sa_1}{sm} = \frac{sc_1}{s\mathfrak{b}_1},$$

folglich

$$sb_1 \,.\, s\mathfrak{b}_1 = sc_1 \,.\, s\mathfrak{c}_1;$$

es sind also $b_1\mathfrak{b}_1$ und $c_1\mathfrak{c}_1$ zwei Punktenpaare eines Punktsystems, dessen Mittelpunkt $s$ ist und ebenso wegen der Parallelität, weil:

$$\mathfrak{b}t = 2\mathfrak{c}_1 s; \quad ct = 2b_1 s; \quad \mathfrak{c}t = 2\mathfrak{b}_1 s; \quad bt = 2c_1 s$$

$$tb \,.\, t\mathfrak{b} = tc \,.\, t\mathfrak{c},$$

d. h. $t$ der Mittelpunkt eines Punktsystems, dessen zwei Punktenpaare $b\mathfrak{b}$ und $c\mathfrak{c}$ sind, also $t$ der Berührungspunkt der Tangente $bc$ mit dem Kegelschnitt. Die Potenz dieses Punktsystems auf der Tangente, welches von sämmtlichen Paaren paralleler Tangenten ausgeschnitten wird, ist gleich aber entgegengesetzt der Potenz desjenigen Punktsystems, welches dem durch $m$ parallel zur Tangente gezogenen Durchmesser in Bezug auf den Kegelschnitt zugehört; dieser Durchmesser ist der konjugirte Durchmesser zu $mt$; wir haben also die Potenzen der Punktsysteme auf zwei konjugirten Durchmessern:

$$P_{\mathfrak{A}} = (mt)^2; \quad P_{\mathfrak{B}} = bt \,.\, t\mathfrak{b} = ct \,.\, t\mathfrak{c}.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen diesen beiden konjugirten Durchmessern mit $\varphi$, so ist bekanntlich:

$$P_{\mathfrak{A}} \,.\, P_{\mathfrak{B}} \,.\, \sin^2\varphi = P_a \,.\, P_b. \quad (\S\ 58.)$$

Bezeichnen wir nun die Perpendikel, welche auf die Dreiecksseiten $b_1c_1$, $c_1a_1$, $a_1b_1$ von $m$ aus herabgelassen werden, durch $p_1\,p_2\,p_3$, so liefert die Parallelität folgende einfache Beziehungen:

$$mt^2 \,.\, \sin^2\varphi = p_1^2 \cdot \frac{ma_1^2}{ms^2};$$

sei noch das Perpendikel von $s$ auf $m\mathfrak{b}_1$ durch $\mathfrak{p}_2$, das von $s$ auf $m\mathfrak{c}_1$ durch $\mathfrak{p}_3$ bezeichnet, so haben wir:

$$\frac{a_1 m}{ms} = \frac{p_2}{\mathfrak{p}_2} = \frac{p_3}{\mathfrak{p}_3} \text{ und } m\mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{p}_3 = \mathfrak{c}_1 s \cdot p_1,$$

also

$$mt^2 \cdot \sin^2\varphi = p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{m\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{c}_1 s \cdot \mathfrak{p}_2}.$$

Da ferner

$$\frac{\mathfrak{p}_2}{s c_1 \cdot \sin c_1} = \frac{m\mathfrak{b}_1}{a_1 c_1} = \frac{m\mathfrak{c}_1}{a_1 b_1},$$

so folgt:

$$mt^2 \cdot \sin^2\varphi = p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{a_1 b_1}{\sin c_1} \cdot \frac{1}{\mathfrak{c}_1 s \cdot s c_1}$$

und mit Berücksichtigung der oben gefundenen Beziehung:

$$P_{\mathfrak{B}} = bt \cdot t\mathfrak{b}_1 = 4 \cdot c_1 s \cdot s\mathfrak{c}_1; \quad P_{\mathfrak{A}} = mt^2$$

$$P_{\mathfrak{A}} \cdot P_{\mathfrak{B}} \sin^2\varphi = P_a \cdot P_b = 4\, p_1 p_2 p_3 \cdot \frac{a_1 b_1}{\sin c_1}.$$

Das Verhältniss $\frac{a_1 b_1}{\sin c_1}$ drückt bekanntlich den Durchmesser des dem Dreieck $a_1 b_1 c_1$ umschriebenen Kreises oder den Radius $r$ des dem gegebenen Dreieck $abc$ umschriebenen Kreises aus, so dass folgt:

(II.) $$P_a \cdot P_b = 4 \cdot p_1 p_2 p_3 \cdot r, \quad \text{d. h.:}$$

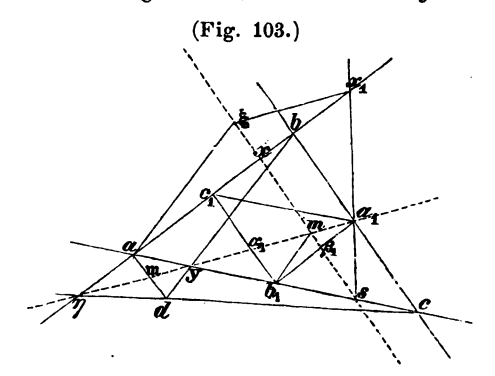
**Wird einem beliebigen Dreiseit ein Kegelschnitt einbeschrieben, so ist das Produkt der Potenzen der auf seinen Axen befindlichen zugehörigen Punktsysteme (ev. das Produkt der Quadrate der Halbaxen) gleich dem vierfachen Produkt der aus seinem Mittelpunkte auf die Seiten desjenigen Dreiseits herabgelassenen Perpendikel, welches die Mitten der Seiten des gegebenen verbindet, multiplicirt mit dem Radius des dem gegebenen Dreiseit umschriebenen Kreises.**

2) Wenn man von einem Kegelschnitte den Mittelpunkt $m$ und drei beliebige Punkte $a\,b\,c$ kennt, so findet man ein Paar konjugirter Durchmesser, indem man (Fig. 103) durch $m$ eine Parallele zu $bc$ und die Verbindungslinie von $m$ mit der Mitte $a_1$ der Seite $bc$ zieht; die diesen beiden konjugirten Durchmessern zugehörigen Punktsysteme kann man auf folgende Art finden:

Die Gerade $ma_1$ treffe $ac$ und $ab$ resp. in $y$ und $\eta$ und eine durch $a$ zu $bc$ parallel gezogene Gerade treffe $ma_1$ in $\mathfrak{m}$; macht man $\mathfrak{m}d = a\mathfrak{m}$, so gehört offenbar $d$ dem Kegelschnitt

an und das demselben einbeschriebene Viereck $abcd$ hat zu seinem Diagonaldreieck das von den Punkten $y\eta$ und dem unendlich-entfernten auf $bc$ gebildete, weil offenbar $ydb$ und $\eta dc$ in

(Fig. 103.)



je einer Geraden liegen; folglich sind $y\eta$ ein Paar konjugirter Punkte auf dem Durchmesser $ma_1$ und

$$my \,.\, m\eta = P_{\mathfrak{B}}.$$

Treffe ferner der durch $m$ zu $bc$ parallel gezogene Durchmesser $ab$ in $x$, und sei auf $ab$ der vierte harmonische dem $x$ zugeordnete Punkt $x_1$, während $a$ und $b$ das andere Paar zugeordneter Punkte sind; treffe endlich die durch $x_1$ zu $ma_1$ parallel gezogene Gerade $mx$ in $\xi$, so ist $x\xi$ ein Paar konjugirter Punkte auf dem Durchmesser, welcher zu $ma_1$ konjugirt ist, also:

$$mx \,.\, m\xi = P_{\mathfrak{A}}.$$

Der Punkt $\xi$ lässt sich noch auf eine etwas kürzere Art ermitteln; da auf $bc$ der unendlich-entfernte Punkt und die Punkte $a_1$, $b$, $c$ vier harmonische Punkte sind und ebenso auch $xx_1\,ba$, so schneiden sich $mx$, $ac$, $x_1a_1$ in einem Punkte $s$, und da ferner $b_1a_1$ parallel $ax_1$, $a_1m$ parallel $x_1\xi$, so ist $b_1m$ parallel $a\xi$; um also $\xi$ zu finden, brauchen wir nur durch $a$ eine Parallele zu $b_1m$ zu ziehen, welche $mx$ in dem konjugirten Punkte $\xi$ treffen wird.

Die ausgeführte Konstruktion giebt wegen Aehnlichkeit der Dreiecke manche Beziehungen; bezeichnen wir mit $p_1p_2p_3$ die drei von $m$ auf die Dreiecksseiten: $bc$, $ca$, $ab$ herabgelassenen Perpendikel und mit $\pi_1\pi_2\pi_3$ die drei Perpendikel von $m$ auf die Dreiecksseiten: $b_1c_1$, $c_1a_1$, $a_1b_1$, welche durch die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks gehen, so haben wir:

$$\frac{my}{ma_1} = \frac{p_2}{\pi_2} \qquad \frac{m\eta}{ma_1} = \frac{p_3}{\pi_3} \qquad ma_1 \,.\, \sin\varphi = p_1$$

$$my \,.\, m\eta \,.\, \sin^2\varphi = \frac{p_1^2 p_2 p_3}{\pi_2 \pi_3} = P_{\mathfrak{B}} \sin^2\varphi$$

$$mx \,.\, \sin b = p_3; \quad \frac{m\xi}{b_1 a} = \frac{sm}{sb_1} = \frac{p_2}{\pi_1}; \quad mx \,.\, m\xi \cdot \frac{\sin b_1}{a_1 c_1} = \frac{p_2 p_3}{\pi_1}$$

$$mx \,.\, m\xi = \frac{p_2 p_3}{\pi_1} \cdot \frac{a_1 c_1}{\sin b_1} = P_{\mathfrak{A}}$$

$$P_{\mathfrak{A}} \,.\, P_{\mathfrak{B}} \sin^2\varphi = P_a \,.\, P_b = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot \frac{a_1 c_1}{\sin b_1}$$

oder wenn wir durch $r$ den Radius des dem gegebenen Dreieck $abc$ umschriebenen Kreises bezeichnen,

(III.) $$P_a \,.\, P_b = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot r, \quad \text{d. h.:}$$

Wird einem beliebigen Dreieck ein Kegelschnitt umschrieben, so ist das Produkt der Potenzen der auf seinen Axen befindlichen zugehörigen Punktsysteme (ev. das Produkt der Quadrate der Halbaxen) gleich dem Quadrate des Produkts der drei Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seiten des gegebenen Dreiecks, dividirt durch das Produkt der drei Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Mitten der Seiten des gegebenen gebildet wird, multiplicirt mit dem Radius des dem gegebenen Dreieck umschriebenen Kreises.

Um endlich einen Ausdruck für die Verbindung $P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}}$, welche bekanntlich gleich $P_a + P_b$ ist, zu gewinnen, führen wir noch die Schnittpunkte $(my, b_1 c_1) = \alpha_1$ und $(mx, a_1 b_1) = \beta_1$ ein; dann folgt:

$$\frac{mx}{m\beta_1} = \frac{p_3}{\pi_3}; \quad \frac{m\beta_1}{ma_1} = \frac{\alpha_1 b_1}{\alpha_1 a_1}; \quad mx = \frac{p_3}{\pi_3} \cdot ma_1 \cdot \frac{\alpha_1 b_1}{\alpha_1 a_1}$$

$$\frac{m\xi}{b_1 a} = \frac{p_2}{\pi_1}; \quad \frac{a_1 c_1}{\alpha_1 c_1} = \frac{p_1}{\pi_2}; \quad m\xi = \frac{p_1 p_2}{\pi_1 \pi_2} \cdot \alpha_1 c_1$$

$$mx \,.\, m\xi = P_{\mathfrak{A}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} ma_1 \cdot \frac{\alpha_1 b_1 \,.\, \alpha_1 c_1}{\alpha_1 a_1};$$

$$my \,.\, m\eta = P_{\mathfrak{B}} = ma_1^2 \cdot \frac{p_2 p_3}{\pi_2 \pi_3}; \quad \frac{ma_1}{m\alpha_1} = \frac{p_1}{\pi_1}$$

$$P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} ma_1 \left\{ m\alpha_1 + \frac{\alpha_1 b_1 \,.\, \alpha_1 c_1}{\alpha_1 a_1} \right\}.$$

Die Verbindung $\frac{\alpha_1 b_1 \,.\, \alpha_1 c_1}{\alpha_1 a_1}$ lässt sich dadurch einfach darstellen,

dass wir um das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ legen, der $m\alpha_1$ in $\mathfrak{a}_1$ zum andern Male treffen möge; dann ist wegen der Potenz des Punktes $\alpha_1$ in Bezug auf diesen Kreis:

$$\alpha_1 b_1 \cdot \alpha_1 c_1 = \alpha_1 a_1 \cdot \alpha_1 \mathfrak{a}_1, \quad \text{also}$$

$$P_{\mathfrak{A}} + P_{\mathfrak{B}} = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot m a_1 \cdot m \mathfrak{a}_1$$

und $m a_1 \cdot m \mathfrak{a}_1$ ist die Potenz des Punktes $m$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{K}$, welche wir mit $P_{\mathfrak{K}}$ bezeichnen wollen, also:

$$\text{(IV.)} \qquad P_a + P_b = \frac{p_1 p_2 p_3}{\pi_1 \pi_2 \pi_3} \cdot P_{\mathfrak{K}}, \qquad \text{d. h.:}$$

Wird einem beliebigen Dreieck ein Kegelschnitt umschrieben, so ist die Summe der Potenzen der auf seinen Axen befindlichen zugehörigen Punktsysteme (ev. die Summe der Quadrate der Halbaxen) gleich dem Produkt der drei Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Seiten des gegebenen Dreiecks, dividirt durch das Produkt der drei Perpendikel auf die Seiten desjenigen Dreiecks, welches von den Mitten der Seiten des gegebenen gebildet wird, multiplicirt mit der Potenz des Mittelpunktes in Bezug auf denjenigen Kreis, welcher durch die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks gelegt werden kann (Neunpunktkreis).

# Verbesserungen.

Seite 12 Zeile 4 v. o. st. zugeordeter l. zugeordneter
,, 13 ,, 13 v. u. ,, zugeordneteter l. zugeordneter
,, 13 ,, 3 v. u. ,, zugordnete l. zugeordnete
,, 20 ,, 10 v. u. ,, lasssen l. lassen
,, 21 ,, 4 v. u. ,, entsprechende Strahlen l. Strahlen heissen entsprechende
,, 36 ,, 10 v. o. ,, $\frac{tg\,(x\,y)}{tg\,(x_1 y_1)}$ l. $\frac{tg\,(x_1 y_1)}{tg\,(x\,y)}$
,, 40 ,, 10 v. o. ,, $\mathfrak{A}$ in der Figur l. $\mathfrak{A}_1$
,, 40 ,, 16 v. u. ,, $\mathfrak{c}_1(\infty)$ l. $\mathfrak{x}_1(\infty)$
,, 60 ,, 7 v. o. das Wort „beiden“ einmal zu streichen.
,, 65 ,, 3 v. u. st. „muss“ l. „ist“
,, 93 ,, 17 v. u. ,, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ l. $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}$
,, 95 ,, 3 v. o. hinter „beliebiger“ zu ergänzen „Projectionsstrahl“
,, 109 ,, 9 v. o. st. folglich l. so
,, 114 ,, 11 v. u. ,, liegenden parallelen l. liegende parallele
,, 115 ,, 20 v. u. ,, $\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}$ l. $\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{f}$
,, 124 ,, 10 v. o. ,, schneiden sich l. ist
,, 138 ,, 16 v. u. ,, $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1$ l. $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}$
,, 154 ,, 9 v. u. ,, treffen sich $\pi_3$ l. treffen sich in $\pi_3$
,, 157 ,, 15 v. u. ,, $a\,s$ l. $\alpha\,s$
,, 159 ,, 14 v. o. ,, $K_1$ l. $K$
,, 159 ,, 14 v. u. ,, erhält l. enthält
,, 160 ,, 3 v. u. ,, deren Polaren l. dem Polar-Dreiseit
,, 172 ,, 1 v. o. ,, dass die bei l. dass bei
,, 175 ,, 23 v. o. ,, Hypothenuse l. Hypotenuse
,, 177 ,, 6—8 v. u. die Worte von „also“ bis „Ellipse“ in Klammern zu schliessen.
,, 183 ,, 16 v. o. st. $M^1$ l. $Mx^1$
,, 183 ,, 1 v. u. ,, $Ax^1$ l. $\mathfrak{A}x^1$
,, 191 in Fig. 48 ,, $f$ und $f_1$ l. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$
,, 204 Zeile 20 v. o. ,, ausgehende l. ausgehenden
,, 212 ,, 3 v. o. ,, „$x$ nach $e$“ und „$x_1$ auf $e_1$“ l. „$x$ nach $a$“ und „$x_1$ auf $a_1$“
,, 212 ,, 6 v. o. ,, $(b^1\,b^1)$ l. $(b^1\,b_1^{\,1})$
,, 225 ,, 18 v. o. ,, sie l. $\mathfrak{A}$ die
,, 228 ,, 5 v. o. ,, in $\delta^1$ l. $\delta^1$
,, 230 ,, 6 v. u. ,, Hperbeln l. Hyperbeln
,, 231 ,, 5 v. o. die Worte von „weil“ bis „wird“ zu streichen.
,, 239 ,, 4 v. o. st. der l. den
,, 244 ,, 7 v. u. ,, ein l. einen
,, 248 ,, 11 v. o. ,, $G$ l. $\mathfrak{G}$
,, 248 ,, 13 v. u. ,, $G$ l. $\mathfrak{G}$
,, 256 ,, 8 v. o. ,, $a\,a$ l. $a\,\alpha$
,, 256 ,, 12 v. o. ,, und also l. und werden also
,, 258 ,, 7 v. o. ,, elliptisch l. hyperbolisch
,, 258 ,, 7 v. o. ,, hyperbolisch l. elliptisch.
,, 260 ,, 2 v. o. ,, $(a, a)$ l. $(a, \alpha)$

Seite 261 Zeile 13 v. o. st. $\alpha^1 \alpha^1$ l. $a^1 \alpha^1$

„ 266 „ 9 v. o. „ durch $s$ l. durch jedes $s$

„ 274 „ 5 v. o. „ $K$ l. $\mathfrak{K}$

„ 279 „ 3 v. u. „ $P$ l. $B$

„ 284 „ 12, 13 v. u. st. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ l. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$.

„ 284 „ 8 v. u. st. dem l. einem

„ 285 „ 20 v. o. „ $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ l. $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}$

„ 285 „ 25 v. o. „ mit l. für

„ 319 „ 1 v. o. „ $G_\infty$ l. $\mathfrak{G}_\infty$

„ 324 „ 5 v. o. „ keinem l. einem

„ 330 „ 18 v. o. „ möge l. mögen

„ 348 „ 5 v. u. die Worte „zu haben“ sind zu streichen.

„ 355 „ 21 v. o. st. $\alpha^1 h^1$ l. $\alpha h^1$

„ 370 „ 6 v. o. „ der Pol l. die Polare

„ 372 „ 17 v. u. „ $G_\infty$ l. $\mathfrak{G}_\infty$

„ 373 „ 10 v. o. „ $G_\infty$ l. $\mathfrak{G}_\infty$

„ 382 „ 12 v. o. „ $p_1$ l. $p$,

„ 385 Seitenzahl „ 38 l. 385

„ 387 Zeile 17 v. u. die Worte „letzteren“ und „ersteren“ sind zu vertauschen.

„ 387 „ 2 v. u. st. ; l. ,

„ 396 „ 1 v. o. „ Gruppen l. Gruppe

„ 398 „ 6 v. o. „ Polaren l. Polare

„ 399 „ 4 v. o. „ $o_1 \mathfrak{q}_1$ l. $o_1 \mathfrak{q}$,

„ 403 „ 3 v. o. „ $Py: | e_1 h_1 h_2 |$ l. $| e_1 h_1 h_3 |$
4 v. o. „ $Pz: | e_1 h_1 h_3 |$ $| e_1 h_1 h_2 |$

„ 410 „ 4 v. u. die Worte „Viereck“ und „Vierseit“ sind zu vertauschen.

„ 426 „ 21 v. o. st. in l. und

„ 429 „ 14 v. o. „ $os$ l. $xs$

„ 436 „ 16 v. o. „ Gegenecken l. Gegenseiten

„ 438 „ 14 v. u. „ $b b_1$; $b^1 b_1^1$ l. $b b^1$; $b_1 b_1^1$

„ 442 „ 2 v. u. „ Punktsystems l. Punktsystem

„ 446 „ 12 v. o. „ treffen l. treffe

„ 450 „ 9 v. o. „ parabolische l. hyperbolische

„ 457 „ 18 v. u. „ $B_2 o$ l. $B_3 o$

„ 457 „ 12 v. u. „ $\mathfrak{A} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}$ l. $\mathfrak{A} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$

„ 461 „ 20 v. o. „ $\mathfrak{A}_1$ l. $\mathfrak{A}$

„ 462 „ 2 v. u. „ Punktenpaare l. Punktsysteme

„ 464 „ 14 v. o. „ $\pi_1 p_1$ l. $\pi_1 \mathfrak{p}_1$

„ 469 „ 19 v. o. „ $s_{04}$ l. $\sigma_{04}$

„ 471 „ 16 v. u. „ ihrer l. dieser

„ 476 „ 7 u. 15 v. o. st Hypothenuse l. Hypotenuse

„ 481 „ 3 v. u. st. Punktsystems l. Strahlsystems

„ 486 „ 1 v. u. „ $Px\xi$ und $Py\eta$ l. $Px_0\xi_0$ und $Py_0\eta_0$

„ 487 „ 5 v. o. „ $y_9 \xi_0$ l. $y_0 \xi_0$

„ 492 „ 6 v. u. „ $X$ l. $Y$

„ 502 „ 11 v. o. hinter „wird“ ergänze „sie“

„ 511 „ 8 v. u. hinter $X$ ergänze „ist“

„ 516 „ 1 v. u. st. „Strahlsystem“ l. „Punktsystem“

„ 537 „ 13 v. o. das Wort „auch“ zu streichen.

„ 538 „ 7—9 v. o. die Worte von „zu $Q$“ bis „sodann“ zu streichen.

„ 550 „ 14 v. o. st. „ein“ l. „einer“.



